آنالیز ریاضی

جلد سوم

گریگوری میخائیلوویچ فیختن‌گولتس

ترجمه

باقر امامی / پرویز شهریاری

MATH75.IR

گریگوری میخائیلوویچ فیختن‌گولتس

آنالیز ریاضی

(محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی)

جلد سوم

ترجمهٔ : باقر امامی
پرویز شهریاری

تهران ـ ۱۳۶۸

MATH75.IR

انتشارات فردوس ـ خیابان مجاهدین اسلام، شمارهٔ ۲۶۲ ـ تلفن **۳۰۲۵۳۳**

آنالیز ریاضی (محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی) جلد سوم
گریگوری میخائیلوویچ فیختن‌گولتس
ترجمهٔ : باقر امامی، پرویز شهریاری
امور فنی : حسن نیک‌بخت
چاپ اول : ۱۳۶۸، تهران
تیراژ : ۳۰۰۰ نسخه
حروفچینی : رهنما ـ مهدی
فیلم و زینگ : لادن
چاپ : چاپخانه تابش
همهٔ حقوق محفوظ است.

MATH75.IR

فهرست

فصل پانزدهم

انتگرال‌های منحنی‌الخط. انتگرال‌های ستیلتیس

§۱. انتگرال‌های منحنی‌الخط نوع اول ۱۸۰۵
۵۴۳. تعریف انتگرال منحنی‌الخط نوع اول ۱۸۰۵
۵۴۴. تبدیل به انتگرال معین عادی ۱۸۰۷
۵۴۵. مثال‌ها ۱۸۱۰
§۲. انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم ۱۸۱۶
۵۴۶. تعریف انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم ۱۸۱۶
۵۴۷. وجود و محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم ۱۸۱۹
۵۴۸. حالت دورهٔ بسته. جهت‌دارکردن صفحه ۱۸۲۲
۵۴۹. مثال‌ها ۱۸۲۴
۵۵۰. تقریب به‌کمك انتگرال روی خط شکسته ۱۸۲۹
۵۵۱. محاسبهٔ مساحت به‌کمك انتگرال منحنی‌الخط ۱۸۳۱
۵۵۲. مثال‌ها ۱۸۳۵
۵۵۳. بستگی بین دو نوع انتگرال منحنی‌الخط ۱۸۳۹
۵۵۴. مسأله‌هایی ازفیزیك ۱۸۴۱
§۳. شرط‌های استقلال انتگرال منحنی‌الخط نسبت به مسیر ۱۸۴۹
۵۵۵. طرح مسأله؛ ارتباط با مسألهٔ مربوط به‌دیفرانسیل کامل ۱۸۴۹
۵۵۶. مشتق‌گیری انتگرالی که به مسیر خود بستگی ندارد ۱۸۵۱
۵۵۷. محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط برحسب تابع اولیه ۱۸۵۳
۵۵۸. معیار دیفرانسیل کامل و پیداکردن تابع اولیه درحالت حوزهٔ راست‌گوشه ۱۸۵۵

MATH75.IR

۵۵۹. تعمیم مطلب برای حالت حوزهٔ غیرمشخص ۱۸۵۷
۵۶۰. نتیجه‌های نهایی ۱۸۶۰
۵۶۱. انتگرال نسبت به دورهٔ بسته ۱۸۶۱
۵۶۲. حالت حوزهٔ همبند غیرساده، یا وجود نقطه‌های خاص ۱۸۶۳
۵۶۳. انتگرال گوس ۱۸۶۸
۵۶۴. حالت سه بعدی ۱۸۷۲
۵۶۵. مثال‌ها ۱۸۷۴
۵۶۶. کاربرد درفیزیك ۱۸۸۱
§۴. تابع‌های با تغییر محدود ۱۸۸۵
۵۶۷. تعریف تابع با تغییر محدود ۱۸۸۵
۵۶۸. طبقهٔ تابع‌های با تغییر محدود ۱۸۸۷
۵۶۹. ویژگی‌های تابع با متغیر محدود ۱۸۹۱
۵۷۰. معیارهای شناخت تابع با تغییر محدود ۱۸۹۴
۵۷۱. تابع‌های پیوستهٔ با تغییر محدود ۱۸۹۷
۵۷۲. منحنی‌های راستاپذیر ۱۹۰۰
§۵. انتگرال ستیلتیس ۱۹۰۳
۵۷۳. تعریف انتگرال ستیلتیس ۱۹۰۳
۵۷۴. شرط‌های کلی وجود انتگرال ستیلتیس ۱۹۰۴
۵۷۵. حالت‌های وجود انتگرال ستیلتیس ۱۹۰۵
۵۷۶. ویژگی‌های انتگرال ستیلتیس ۱۹۰۹
۵۷۷. انتگرال گیری جزء به جزء ۱۹۱۲
۵۷۸. تبدیل انتگرال ستیلتیس به انتگرال ریمن ۱۹۱۳
۵۷۹. محاسبهٔ انتگرال ستیلتیس ۱۹۱۶
۵۸۰. مثال‌ها ۱۹۲۱
۵۸۱. توضیح هندسی انتگرال ستیلتیس ۱۹۳۰
۵۸۲. قضیهٔ میانگین؛ برآوردها ۱۹۳۱
۵۸۳. عبور حدی در زیر علامت انتگرال ستیلتیس ۱۹۳۴
۵۸۴. مثال‌ها و اضافه‌ها ۱۹۳۶
۵۸۵. تبدیل انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم به انتگرال ستیلتیس ۱۹۴۳

فصل شانزدهم

انتگرال‌های دوگانه

§۱. تعریف و ویژگی‌های سادهٔ انتگرال‌های دوگانه ۱۹۴۵
۵۸۶. مسألهٔ مربوط به حجم تیر استوانه‌ای ۱۹۴۵
۵۸۷. تبدیل انتگرال دوگانه به انتگرال تکراری ۱۹۴۷
۵۸۸. تعریف انتگرال دوگانه ۱۹۴۹
۵۸۹. شرط‌های وجود انتگرال دوگانه ۱۹۵۰
۵۹۰. طبقهٔ تابع‌های انتگرال‌پذیر ۱۹۵۲
۵۹۱. انتگرال پایین و انتگرال بالا، به عنوان حد ۱۹۵۵
۵۹۲. ویژگی‌های تابع انتگرال‌پذیر و انتگرال‌های دوگانه ۱۹۵۶
۵۹۳. انتگرال به عنوان تابع جمعی حوزه؛ مشتق‌گیری نسبت به‌حوزه ۱۹۶۰
§۲. محاسبه انتگرال دوگانه ۱۹۶۳
۵۹۴. تبدیل انتگرال دوگانه به‌انتگرال تکراری، درحالت حوزهٔ مستطیلی ۱۹۶۳
۵۹۵. مثال‌ها ۱۹۶۷
۵۹۶. تبدیل انتگرال دوگانه به‌انتگرال تکراری، درحالت حوزهٔ منحنی‌الخط ۱۹۷۹
۵۹۷. مثال‌ها ۱۹۸۳
۵۹۸. کاربرد در مکانیک ۲۰۰۰
۵۹۹. مثال‌ها ۲۰۰۳
§۳. دستور گرین ۲۰۱۳
۶۰۰. به‌دست آوردن دستور گرین ۲۰۱۳
۶۰۱. کاربرد دستور گرین در بررسی انتگرال‌های روی منحنی ۲۰۱۷
۶۰۲. مثال‌ها و اضافه‌ها ۲۰۱۹
§۴. تغییر متغیر در انتگرال دوگانه ۲۰۲۳
۶۰۳. تبدیل حوزه‌های مستوی ۲۰۲۳
۶۰۴. مثال‌ها ۲۰۲۶
۶۰۵. بیان مساحت درمختصات منحنی‌الخط ۲۰۳۲
۶۰۶. ملاحظه‌های تکمیلی ۲۰۳۵
۶۰۷. نتیجه‌گیری هندسی ۲۰۳۸
۶۰۸. مثال‌ها ۲۰۴۰

۶۰۹. تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه ۲۰۵۱
۶۱۰. شباهت باانتگرال‌های ساده، انتگرال بر روی حوزه‌های جهت‌دار ۲۰۵۴
۶۱۱. چند مثال ۲۰۵۵
§۵. انتگرال دوگانهٔ ناویژه ۲۰۶۵
۶۱۲. انتگرال‌های گسترده برحوزهٔ نامتناهی ۲۰۶۵
۶۱۳. قضیهٔ تقارب مطلق، در انتگرال‌های دوگانهٔ ناویژه ۲۰۶۸
۶۱۴. تبدیل انتگرال دوگانه به انتگرال تکراری ۲۰۷۱
۶۱۵. انتگرال از تابع‌های نامحدود ۲۰۷۳
۶۱۶. تغییرمتغیر در انتگرال‌های ویژه ۲۰۷۵
۶۱۷. مثال‌ها ۲۰۷۷

فصل هفدهم

مساحت سطح
انتگرال‌های روی سطح

§۱. سطح‌های دورویه ۲۱۰۰
۶۱۸. رویهٔ سطح ۲۱۰۰
۶۱۹. مثال‌ها ۲۱۰۲
۶۲۰. جهت‌دارکردن سطح وفضا ۲۱۰۴
۶۲۱. انتخاب علامت در دستورها، برای کسینوس‌های هادی قائم‌ها ۲۱۰۶
۶۲۲. حالت سطح قطعه به قطعه هموار ۲۱۰۸
§۲. مساحت سطح خمیده ۲۱۰۹
۶۲۳. مثال شوارتز ۲۱۰۹
۶۲۴. تعریف مساحت سطح‌های خمیده ۲۱۱۲
۶۲۵. یادداشت ۲۱۱۲
۶۲۶. وجود مساحت سطح و محاسبهٔ آن ۲۱۱۴
۶۲۷. روش سطح‌های چندوجهی محاطی ۲۱۱۹
۶۲۸. حالت‌های خاص تعیین مساحت ۲۱۲۲
۶۲۹. مثال‌ها ۲۱۲۳

§۳. انتگرال‌های روی سطح نوع اول ۲۱۴۳
۶۳۰. تعریف انتگرال روی سطح نوع اول ۲۱۴۳
۶۳۱. تبدیل به انتگرال دوگانهٔ عادی ۲۱۴۴
۶۳۲. کاربردهای مکانیکی انتگرال‌های سطحی نوع اول ۲۱۴۶
۶۳۳. مثال‌ها ۲۱۴۹
§۴. انتگرال‌های روی سطح نوع دوم ۲۱۵۸
۶۳۴. تعریف انتگرال‌های سطحی نوع دوم ۲۱۵۸
۶۳۵. حالت‌های خاص ساده ۲۱۶۱
۶۳۶. حالت کلی ۲۱۶۳
۶۳۷. شرح اثبات ۲۱۶۵
۶۳۸. بیان حجم جسم به‌کمك انتگرال روی سطح ۲۱۶۷
۶۳۹. دستور ستوکس ۲۱۷۱
۶۴۰. مثال‌ها ۲۱۷۵
۶۴۱. کاربرد دستور ستوکس در بررسی انتگرال‌های منحنی‌الخط درفضا ۲۱۸۳

فصل هجدهم

انتگرال‌های سه‌گانه و چندگانه

§۱. انتگرال سه‌گانه و محاسبهٔ آن ۲۱۸۶
۶۴۲. مسألهٔ مربوط به محاسبه جرم جسم ۲۱۸۶
۶۴۳. انتگرال سه‌گانه و شرط‌های وجود آن ۲۱۸۷
۶۴۴. ویژگی‌های تابع‌های انتگرال‌پذیر و انتگرال‌های سه‌گانه ۲۱۸۸
۶۴۵. محاسبهٔ انتگرال سه‌گانهٔ گسترده درمکعب‌مستطیل ۲۱۹۱
۶۴۶. محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه نسبت به حوزهٔ دلخواه ۲۱۹۳
۶۴۷. انتگرال‌های سه‌گانهٔ ناویژه ۲۱۹۵
۶۴۸. مثال‌ها ۲۱۹۵
۶۴۹. کاربردهای مکانیکی ۲۲۰۶
۶۵۰. مثال‌ها ۲۲۰۸
§۲. دستور گوس ـ استروگرادسکی ۲۲۱۸
۶۵۱. دستور استروگرادسکی ۲۲۱۸

۶۵۲. کاربرد دستور استروگرادسکی در بررسی انتگرال‌های روی سطح ۲۲۲۲
۶۵۳. انتگرال گوس ۲۲۲۳
۶۵۴. مثال‌ها ۲۲۲۶
§۳. تغییر متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه ۲۲۳۱
۶۵۵. تبدیل فضا و مختصات منحنی‌الخط ۲۲۳۱
۶۵۶. مثال‌ها ۲۲۳۳
۶۵۷. بیان حجم درمختصات منحنی‌الخط ۲۲۳۶
۶۵۸. یادداشت‌های تکمیلی ۲۲۳۹
۶۵۹. نتیجه‌گیری‌های هندسی ۲۲۴۰
۶۶۰. مثال‌ها ۲۲۴۲
۶۶۱. تغییرمتغیر در انتگرال‌های سه‌گانه ۲۲۵۳
۶۶۲. مثال‌ها ۲۲۵۴
۶۶۳. جاذبهٔ ازطرف جسم و پتانسیل برنقطهٔ درونی ۲۲۶۰
§۴. عنصرهای آنالیز برداری ۲۲۶۴
۶۶۴. اسکالرها و بردارها ۲۲۶۴
۶۶۵. میدان اسکالر (عددی) و میدان برداری ۲۲۶۵
۶۶۶. گرادیان ۲۲۶۷
۶۶۷. شار بردار [فلوی بردار] از طریق سطح ۲۲۷۰
۶۶۸. دستور استروگرادسکی. واگرائی ۲۲۷۲
۶۶۹. گردش بردار. دستور ستوکس. طوفان ۲۲۷۴
۶۷۰. میدان‌های خاص ۲۲۷۶
۶۷۱. مسألهٔ وارون‌آنالیز برداری ۲۲۸۱
۶۷۲. کاربردها ۲۲۸۲
§۵. انتگرال‌های چندگانه ۲۲۹۰
۶۷۳. مسألهٔ مربوط به جاذبه و پتانسیل دو جسم ۲۲۹۰
۶۷۴. حجم جسم n بعدی. انتگرال n گانه ۲۲۹۲
۶۷۵. تغییر متغیر در انتگرال‌های n گانه ۲۲۹۵
۶۷۶. مثال‌ها ۲۲۹۹

فصل نوزدهم

رشته‌های فوریه

§۱. مقدمه ۲۳۲۹
۶۷۷. کمیت‌های متناوب و آنالیز همساز ۲۳۲۹
۶۷۸. تعیین ضریب‌ها با روش اولر ـ فوریه ۲۳۳۲
۶۷۹. دستگاه تابع‌های متعامد ۲۳۳۵
۶۸۰. انطباق مثلثاتی ۲۳۴۱
§۲. بسط تابع به رشتهٔ فوریه ۲۳۴۴
۶۸۱. طرح موضوع. انتگرال دیریکله ۲۳۴۴
۶۸۲. پیش‌قضیهٔ اصلی اول ۲۳۴۷
۶۸۳. نظام موضعی کردن ۲۳۴۹
۶۸۴. معیارهای دینی و لیپ‌شیتس دربارهٔ همگرائی رشته‌های فوریه ۲۳۵۱
۶۸۵. پیش‌قضیهٔ اصلی دوم ۲۳۵۵
۶۸۶. معیار دیریکله ـ ژردان ۲۳۵۶
۶۸۷. حالت تابع‌های نامتناوب ۲۳۵۸
۶۸۸. حالت بازهٔ دلخواه ۲۳۶۰
۶۸۹. بسط تابع، تنها برحسب کسینوس‌ها و یا تنها برحسب سینوس‌ها ۲۳۶۱
۶۹۰. مثال‌ها ۲۳۶۵
۶۹۱. بسط $\ln\Gamma(x)$ ۲۳۸۲
§۳. تکمیل ۲۳۸۵
۶۹۲. رشته‌های با ضریب‌های نزولی ۲۳۸۵
۶۹۳. مجموع رشته‌های مثلثاتی به‌کمک تابع‌های تحلیلی با متغیرمختلط ۲۳۹۲
۶۹۴. مثال‌ها ۲۳۹۵
۶۹۵. شکل مختلط رشته‌های فوریه ۲۴۰۲
۶۹۶. رشته‌های مزدوج ۲۴۰۵
۶۹۷. رشته‌های فوریهٔ تکراری ۲۴۰۹
§۴. خصلت همگرائی در رشته‌های فوریه ۲۴۱۱
۶۹۸. برخی اضافه‌ها درمورد پیش‌قضیه‌های اصلی ۲۴۱۱
۶۹۹. معیارهای تقارب یکنواخت در رشته‌های فوریه ۲۴۱۴

۷۰۰. رفتار رشتهٔ فوریه، درنزدیکی نقطه‌های ناپیوستگی: حالت خاص ۲۴۱۸
۷۰۱. حالت تابع غیرمشخص ۲۴۲۴
۷۰۲. ویژگی‌های رشتهٔ فوریه. ملاحظه‌های مقدماتی ۲۴۲۷
۷۰۳. ساختن خصوصیت‌ها ۲۴۳۱
§۵. برآورد باقی‌مانده در ارتباط با ویژگی‌های دیفرانسیلی تابع‌ها ۲۴۳۳
۷۰۴. بستگی بین ضریب‌های فوریهٔ تابع با مشتق‌های آن ۲۴۳۳
۷۰۵. برآورد مجموع جزئی، درحالت تابع کران‌دار ۲۴۳۴
۷۰۶. ارزیابی باقیمانده، درحالت تابعی که مشتق kام آن، کران‌دار است ۲۴۳۶
۷۰۷. حالتی که تابع، دارای مشتق kام با تغییر محدود باشد ۲۴۳۸
۷۰۸. تأثیر ناپیوستگی تابع و مشتق‌های آن، بر مرتبهٔ کوچکی ضریب‌های فوریه ۲۴۴۰
۷۰۹. حالتی که تابع، دربازهٔ $[\pi, 0]$ داده شده باشد ۲۴۴۵
۷۱۰. روش جداکردن ویژگی‌ها ۲۴۴۸
§۶. انتگرال فوریه ۲۴۵۸
۷۱۱. انتگرال فوریه، به‌عنوان حالت حدی رشتهٔ فوریه ۲۴۵۸
۷۱۲. ملاحظه‌های مقدماتی ۲۴۶۰
۷۱۳. معیارهای کافی ۲۴۶۲
۷۱۴. تغییر شکل پیش‌فرض اصلی ۲۴۶۴
۷۱۵. صورت‌های مختلف دستور فوریه ۲۴۶۷
۷۱۶. تبدیل فوریه ۲۴۶۹
۷۱۷. برخی ویژگی‌های تبدیل فوریه ۲۴۷۳
۷۱۸. مثال‌ها و اضافه‌ها ۲۴۷۴
۷۱۹. حالت تابع‌های با دو متغیر ۲۴۸۳
§۷. ضمیمه (کاربردها) ۲۴۸۵
۷۲۰. انحراف خروج ازمرکز سیاره، نسبت به انحراف متوسط آن ۲۴۸۵
۷۲۱. مسألهٔ نوسان تارها ۲۴۸۷
۷۲۲. مسألهٔ مربوط به انتشار گرما درمیلهٔ متناهی ۲۴۹۴
۷۲۳. حالت میلهٔ نامتناهی ۲۴۹۹
۷۲۴. تغییر شکل شرط‌های حدی ۲۵۰۲
۷۲۵. انتشار گرما، درصفحهٔ دایره‌ای ۲۵۰۴

۷۲۶. آنالیز همساز عملی. طرحی برای دوازده عرض ۲۵۰۶
۷۲۷. مثال‌ها ۲۵۱۰
۷۲۸. طرح برای بیست وچهار عرض ۲۵۱۴
۷۲۹. مثال‌ها ۲۵۱۶
۷۳۰. مقایسهٔ مقدارهای تقریبی و مقدارهای دقیق ضریب‌های فوریه ۲۵۱۷

فصل بیستم

رشته‌های فوریه (ادامه)

§۱. عمل روی رشته‌های فوریه ۲۵۲۱
۷۳۱. انتگرال‌گیری جمله به جمله از رشتهٔ فوریه ۲۵۲۱
۷۳۲. مشتق‌گیری جمله به جمله از رشتهٔ فوریه ۲۵۲۴
۷۳۳. تمامیت دستگاه مثلثاتی ۲۵۲۵
۷۳۴. تقریب یکنواخت تابع‌ها. قضیهٔ ویرشتراس ۲۵۲۷
۷۳۵. تقریب تابع به‌طور متوسط. ویژگی‌های مربوط به‌حداکثر وحداقل در قطعه‌های رشتهٔ فوریه ۲۵۳۱
۷۳۶. بسته‌بودن دستگاه مثلثاتی. قضیهٔ لیاپونوف ۲۵۳۵
۷۳۷. تعمیم معادلهٔ بسته‌بودن ۲۵۳۸
۷۳۸. ضرب رشته‌های فوریه ۲۵۴۱
۷۳۹. برخی کاربردهای معادلهٔ بسته‌بودن ۲۵۴۳
§۲. استفاده از روش‌های تعمیم مجموع در رشته‌های فوریه ۲۵۵۱
۷۴۰. پیش‌قضیهٔ اصلی ۲۵۵۱
۷۴۱. جمع رشته‌های فوریه، با روش پواسون ــ آبل ۲۵۵۳
۷۴۲. حل مسألهٔ دیریکله برای دایره ۲۵۵۷
۷۴۳. جمع رشته‌های فوریه با روش سه‌زارو ــ فه‌یر ۲۵۶۰
۷۴۴. برخی کاربردهای جمع تعمیم یافتهٔ رشته‌های فوریه ۲۵۶۳
۷۴۵. مشتق‌گیری جمله به جمله از رشته‌های فوریه ۲۵۶۶
§۳. منحصر به‌فردبودن بسط مثلثاتی تابع‌ها ۲۵۶۸
۷۴۶. گزاره‌های کمکی دربارهٔ مشتق‌های تعمیم‌یافته ۲۵۶۸
۷۴۷. روش ریمانی جمع رشته‌های مثلثاتی ۲۵۷۲

۷۴۸. پیش‌قضیه‌ای دربارهٔ ضریب‌های رشتهٔ متقارب ۲۵۷۶
۷۴۹. منحصر به‌فردبودن بسط مثلثاتی ۲۵۷۸
۷۵۰. قضیه‌های نهائی دربارهٔ رشته‌های فوریه ۲۵۸۰
۷۵۱. تعمیم ۲۵۸۳

ضمیمه

دیدگاهی کلی به حد

۷۵۲. گونه‌های مختلف حد ۲۵۸۷
۷۵۳. مجموعه‌های مرتب (به‌معنای خاص خود) ۲۵۸۸
۷۵۴. مجموعه‌های مرتب (به معنای عام آن) ۲۵۸۹
۷۵۵. متغیر مرتب و حد آن ۲۵۹۳
۷۵۶. مثال‌ها ۲۵۹۴
۷۵۷. یادداشتی دربارهٔ حد تابع‌ها ۲۵۹۷
۷۵۸. گسترش نظریهٔ حد ۲۵۹۸
۷۵۹. متغیرهایی‌که به‌صورتی یکسان مرتب شده‌اند ۲۶۰۱
۷۶۰. مرتب‌کردن به‌کمك پارامتر عددی ۲۶۰۲
۷۶۱. تبدیل به واریانت ۲۶۰۴
۷۶۲. بزرگترین و کوچکترین حد برای متغیر مرتب ۲۶۰۶

MATH75.IR

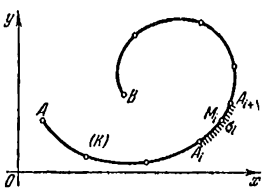
فصل پانزدهم

انتگرال‌های منحنی‌الخط. انتگرال‌های ستیلتیس

§۱. انتگرال‌های منحنی‌الخط نوع اول

۵۴۳. تعریف انتگرال منحنی‌الخط نوع اول. برای این‌که، به‌طور طبیعی، به این مفهوم تازه برسیم، مسأله‌ای از مکانیک را در نظر می‌گیریم که به این مفهوم منجر می‌شود.

منحنی اندازه‌پذیر (منحنی باطول‌متناهی) پیوسته و سادهٔ (K) را، در صفحه، در نظر می‌گیریم* (شکل ۱)؛ به نحوی‌که جرم‌ها درطول آن قرار گرفته باشند و، ضمناً چگالی خطی آن، $\rho(M)$، در هر نقطهٔ M از منحنی، معلوم باشد. می‌خواهیم جرم m تمامی منحنی (K) را پیدا کنیم.



شکل ۱

برای این منظور، بین دو انتهای A و B از منحنی، رشته نقطه‌های دلخواه A_1، A_2، . . . ، A_{n-1} را نشان می‌گذاریم. (A_0 و A_n، همان نقطه‌های A و B هستند) و فرض می‌کنیم که، این نقطه‌ها، درجهت از A به B [۲۴۶ را ببینید]، شماره‌گذاری شده باشند، هرچند که هیچ مانعی، برای شماره‌گذاری در جهت عکس، وجود ندارد.

نقطه M_i را روی کمان A_iA_{i+1} از منحنی اختیار و چگالی $\rho(M_i)$ در این نقطه را محاسبه می‌کنیم. اگر فرض را براین بگیریم که، به تقریب، چگالی، در همهٔ نقطه‌های این بخش، همین مقدار است، به شرطی که طول کمان A_iA_{i+1} را با σ_i نشان دهیم، برای جرم m_i این کمان، عبارت تقریبی

$$m_i \doteq \rho(M_i) \cdot \sigma_i$$

و برای تمامی جرم m مطلوب، عبارت

---

*) برای مشخص بودن وضع، به‌حالت منحنی باز (نابسته) اکتفا می‌کنیم.

$$m \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i) \cdot \sigma_i$$

به دست می‌آید.

خطای رابطهٔ اخیر ــ که ناشی‌از تقریبی بودن فرض بالاست ــ وقتی که طول σ_i همهٔ بخش‌ها به‌سمت صفر میل کند، به سمت صفر میل خواهد کرد. به‌این ترتیب، اگر بزرگترین طول σ_i را با λ نشان دهیم، برای به دست آوردن دستور دقیق، کافی است به سمت حد عبور کنیم:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i) \cdot \sigma_i$$

درحالت کلی، بدون توجه به مسألهٔ مذکور و یا مسأله‌های شبیه‌آن، مطالعهٔ این گونه حدها را آغاز می‌کنیم. «تابع نقطه‌ای»* دلخواه $f(M) = f(x, y)$ را در نظر می‌گیریم، به‌نحوی‌که در طول منحنی خود، (K)، اندازه‌پذیر، ساده و پیوسته باشد**، و بحث بالا را درمورد آن تکرار می‌کنیم: با تقسیم منحنی (K) به‌کمان‌های جزیی A_iA_{i+1} و با انتخاب نقطهٔ غیرمشخص $M_i(\xi_i, \eta_i)$ بر آن، مقدار $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$ را برای آن محاسبه می‌کنیم و مجموع زیررا تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \cdot \sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \sigma_i$$

این مجموع، ضمناً عبارت است از نوعی «مجموع انتگرالی».

درحالت منحنی بسته هم، می‌توان از روش مشابهی استفاده کرد: نقطهٔ دلخواهی از منحنی را، به‌عنوان $A_0 (A_n)$ انتخاب می‌کنیم و بقیهٔ نقطه‌های A_i را، دراین و یا آن جهت، روی منحنی قرار می‌دهیم [۲۴۶].

اگر، بامیل $\lambda = \max \sigma$ به سمت صفر، مجموع انتگرالی‌دارای حد معین ومتناهی I باشد و، ضمناً، این حد بستگی به روش تقسیم منحنی (K) و یا انتخاب نقطه‌های M_i در روی بخش‌های A_iA_{i+1} نداشته باشد، در آن صورت، آن را انتگرال منحنی‌الخط (نوع اول)*** از تابع $f(M) = f(x, y)$، برروی مسیر (K)، گویند و به این ترتیب

---

*) «تابع نقطه‌ای»، یعنی تابعی از نقطهٔ متغیر.

**) با این فرض‌که، یك دستگاه مختصات قائم را، مبنای‌کار خود قرار دهیم.

***) در تمایز با انتگرال‌های منحنی‌الخط نوع دوم، که کمی بعدتر [۵۴۶] توضیح داده خواهد شد.

نشان می‌دهند:

$$I=\int_{(K)} f(M)ds=\int_{(K)} f(x,y)ds \qquad (۱)$$

(که در آن، s عبارت است ازطول کمان منحنی و ds، طول جزئی σ_i را به‌یاد می‌آورد). تعیین خصلت دقیق این روند حدی را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

به این ترتیب، عبارت حاصل دربارهٔ جرم منحنی مادی را می‌توان چنین نوشت:

$$m=\int_{(K)} \rho(M)ds \qquad (۲)$$

به‌خصوص توجه‌کنیم‌که، دراین تعریف، جهتی‌که برای مسیر (K) انتخاب می‌شود، هیچ نقشی به‌عهده ندارد. اگر مثلا این منحنی باز باشد وجهت‌های مختلف منحنی را با (AB) و (BA) نشان دهیم، داریم:

$$\int_{(AB)} f(M)ds=\int_{(BA)} f(M)ds$$

به‌ترتیب مشابهی، می‌توان مفهوم انتگرال‌را، برای منحنی‌فضائی (K) هم تعمیم‌داد:

$$\int_{(K)} f(M)ds=\int_{(K)} f(x,y,z)ds^*$$

از آن جا که، در این جا، جنبه‌های اساسی تازه‌ای وجود ندارد، از ذکر جزئیات می‌گذریم.

۵۴۴. تبدیل به انتگرال معین عادی. فرض‌کنیم‌که جهت را برروی منحنی (K)، به‌اختیار معین‌کرده باشیم (یکی‌از دو امکان)، به طوری‌که بتوانیم جـای نقطهٔ M را بر منحنی، باطول‌کمان $s=\overset{\frown}{AM}$ ــ که از مبداء A در نظر گرفته شده است ــ معین‌کنیم‌ـ‌آن وقت، منحنی (K) را می‌توان، به‌صورت پارامتری، با این معادله‌ها، بیان‌کرد:

$$x=x(s),\quad y=y(s)\quad (0\leqslant s\leqslant S)$$

و تابع $f(x,y)$، که در نقطه‌های منحنی داده شده است، به تابع مرکب $f(x(s),y(s))$ از متغیر s، تبدیل می‌شود.

---

*) بر پایهٔ یك دستگاه مختصات قائم؛ تابع f، تنها در نقطه‌های منحنی (K) تعریف شده‌است.

اگر مقدار کمان‌های نظیر نقطه‌های تقسیم A_i بر منحنی را با s_i $(i=0,1,2,\dots,n)$ نشان دهیم، روشن است که داریم: $\sigma_i=s_{i+1}-s_i=\Delta s_i$، مقدار s را، که با نقطهٔ M_i معین می‌شود، با $\bar{s}_i$ نشان می‌دهیم (ضمناً، روشن است که $s_i\leqslant\bar{s}_i\leqslant s_{i+1}$)، می‌بینیم که مجموع انتگرالی برای انتگرال منحنی‌الخط

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\cdot\sigma_i=\sum_{i=0}^{n-1} f\Big(x(\bar{s}_i),\ y(\bar{s}_i)\Big)\Delta s_i$$

در عین حال، عبارت است از مجموع انتگرالی برای انتگرال معین عادی؛ به طوری که داریم:

$$\int_{(K)} f(M)ds=(R)\int_0^s f\Big(x(s),y(s)\Big)ds^* \qquad (۳)$$

درضمن، وجود یکی‌از انتگرال‌ها، به معنای وجود انتگرال دیگری است.

به‌نظر می‌رسد که، این تبدیل مستقیم انتگرال منحنی‌الخط نوع اول، به انتگرال معمولی، ارزش نظری آن را پایین می‌آورد، ولی در هرحال، ارزش آموزشی آن به‌جای خود باقی می‌ماند.

روشن است که انتگرال، مثلا درحالت پیوستگی تابع $f(M)$**ـ که ما آن راازقبل مفروض می‌گیریم ـ وجوددارد. اکنون فرض می‌کنیم، منحنی‌سادهٔ (K)، با معادله‌های غیر-مشخص زیر داده شده باشد:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T)$$

که در آن‌ها، φ و ψ، همراه با مشتق‌های اول خود، پیوسته‌اند. در چنین صورتی، منحنی اندازه پذیر است، و اگر ترقی کمان $s=\widehat{AM}=s(t)$، متناظر با ترقی پارامتر t باشد، آن وقت

---

*) علامت (R) به معنای آن‌است که انتگرال‌را، دراین‌جا، طبق‌تعریف معمولی‌ریمانی‌درنظر گرفته‌ایم.

**) منظور ما، پیوستگی در نقطه‌های منحنی (K)، در طول آن، می‌باشد. به زبان «$\varepsilon-\delta$» می‌توان گفت که، از روی $\varepsilon>0$، می‌توان $\delta>0$ را طوری پیدا کرد که، به ازای $\overline{MM'}<\delta$ (M و M'، نقطه‌هایی از منحنی‌اند)، داشته باشیم $|f(M')-f(M)|<\varepsilon$. با این فرض، تابع‌مرکب $f(x(s),y(s))$ هم، مادام‌که $x(s)$ و $y(s)$ پیوسته باشند، نسبت به s، تابعی است پیوسته.

$$s'_t=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

[۲۴۸، (۱۰)]. با تغییر متغیر در انتگرال سمت راست (۳)، بلافاصله به‌دست می‌آید:

$$\int_{(K)} f(M)ds=\int_{t_0}^{T} f\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt \qquad (۴)$$

به این ترتیب، برای محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط نوع اول، باید در تابع زیر انتگرال، متغیرهای x و y را با مقدارهای مختصات برحسب پارامتر، و ضریب ds را با دیفرانسیل کمان ــ به عنوان تابعی ازپارامتر ــ عوض کرد. تأکید می‌کنیم که، مرز پایینی انتگرال معین (۴)، بایدکمتر از مرز بالایی آن باشد.

درحالتی که منحنی، به‌وسیلهٔ معادله‌ای صریح داده شده باشد:

$$y=y(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

دستور (۴) به‌این صورت در می‌آید:

$$\int_{(K)} f(M)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx \qquad (۵)$$

این رابطه را می‌توان به صورت دیگری درآورد. اگر تابع $y(x)$ را، همراه با مشتق آن $y'(x)$ پیوسته فرض کنیم، آن وقت، منحنی (K)، در هر نقطهٔ خود، مماسی معین و غیرموازی با محور y خواهد داشت. اگرزاویه‌ای راکه مماس بامحور x می‌سازد، با α نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$tg\alpha=y'(x),\quad |cos\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}$$

بنابراین:

$$\int_{(K)} f(M)ds=\int_a^b \frac{f(x,y(x))}{|cos\alpha|}dx \qquad (۶)$$

و در حالت خاص، ازآن جاکه به روشنی داریم:

$$\int_{(K)} ds=S$$

که در آن، S عبارت است ازطول تمامی منحنی (AB)، بنابراین

$$S=\int_a^b \frac{dx}{|\cos\alpha|} \qquad (۷)$$

یادداشت. دستور (۷) را، از راه تبدیل صوری، به‌دست آوردیم. اگر طول کمان منحنی را، به‌عنوان حد خط شکستهٔ محاطی (و نه محیطی) تعریف می‌کردیم، آن وقت این تعریف، در حالت تابع صریح، مستقیماً منجر به دستور (۷) می‌شد. پیشنهاد می‌کنیم، خواننده خودش به‌این مطلب بپردازد.

۵۴۵. مثال‌ها. ۱) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $I=\int_{(K)} xy\,ds$، به شرطی که (K)، ربع بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ واقع در ربع اول باشد.

حل. (a). داریم:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ ,\quad y'=-\frac{dx}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}$$

به‌نحوی که، بنابر رابطهٔ (۵):

$$I=\int_0^a x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}\,dx=$$

$$=\frac{b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\cdot x\,dx$$

که با انجام انتگرال گیری، به دست می‌آید:

$$I=\frac{-b}{2a^2(a^2-b^2)}\cdot\frac{2}{3}\left[a^4-(a^2-b^2)x^2\right]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

باید توجه کرد که، این محاسبه‌ها، تا حدی مقید است، زیرا، به‌ازای $x=a$، ضریب زاویهٔ مماس، به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. راه حل زیر، این نارسائی را ندارد.

(b) اگر نمایش پارامتری بیضی‌را درنظر بگیریم:

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

خواهیم داشت:

$$x'_t=-a\sin t,\ y_t'=b\cos t,\ \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$$

و محاسبه را می‌توان، از روی رابطهٔ (۴)، انجام داد:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\cos t\cdot a\sin t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{a^2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt$$

اگر $\cos 2t=z$ بگیریم، خواهیم داشت: $\sin 2t\,dt=-\frac{1}{2}dz$ و

$$I=\frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z}\,dz=$$

$$=\frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

۲) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $I=\int_{(K)} y\,ds$، که در آن، (K) عبارت است از بخشی از سهمی $y^2=2px$ که در فاصلهٔ مبداء مختصات تا نقطهٔ (x_0, y_0) قرار دارد.

حل. از معادلهٔ منحنی به دست می‌آید: $yy'=p$، به نحوی که

$$y\,ds=y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{y^2+y^2y'^2}\,dx=\sqrt{p^2+2px}\,dx$$

و

$$I=\int_0^{x_0}\sqrt{p^2+2px}\,dx=\frac{1}{3p}\left[(p^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\right]$$

۳) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $I=\int_{(A)}(x^2+y^2)\,ds$، که در آن، (A) پاره‌خط راستی است که دو نقطهٔ (a, a) و (b, b) را به‌هم وصل می‌کند $(b>a)$.

راهنمائی. معادلهٔ خط راست چنین است: $y=x$. **پاسخ:** $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}(b^۳-a^۳)$.

۴) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $K=\int_{(C)} ye^{-x}ds$، که در آن، (C) عبارت از بخشی از منحنی

$$x=\ln(۱+t^۲)\ ,\ y=۲\operatorname{arctg}t-t+۳$$

که بین نقطه‌های $t=۰$ و $t=۱$ واقع باشد.

راهنمائی. $\sqrt{x'^۲_t+y'^۲_t}=۱$ و

$$K=\int_{۰}^{۱}\frac{۲\operatorname{arctg}t-t+۳}{۱+t^۲}dt=\frac{\pi^۲}{۱۶}-\frac{۱}{۲}\ln۲+\frac{۳\pi}{۴}$$

۵) برای اغلب منحنی‌هایی که دائماً با آن‌ها سروکار داریم (بیضی، هذلولی، سینوسوئید، لمینسکات و غیره)، نمی‌توان طول کمان را، به وسیلهٔ تابع‌های مقدماتی، بیان کرد، زیرا ds، به صورت متناهی، انتگرال‌پذیر نیست. باوجود این، برای این منحنی‌ها هم، اغلب می‌توان انتگرال $\int_{(K)} f(x,y)ds$ را، به‌صورت تابع‌های مقدماتی، محاسبه کرد (به‌عنوان مثال، تمرین ۱) را ببینید)، زیرا وجودضریب $f(x,y)$، ساختمان دیفرانسیلی زیر انتگرال را عوض می‌کند. از خواننده می‌خواهیم، خود انتگرال‌هایی به صورت $\int_{(K)} f(x,y)ds$ که بر سینوسوئید $y=\sin x$ یا هذلولی $xy=۱$ گسترش یافته‌اند، بسازد و برحسب تابع‌های مقدماتی بیان کند.

۶) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $I=\int_{(C)} xyds$، که در آن، (C) عبارت است از کمان منحنی

$$x=t,\ y=\frac{۱}{۳}\sqrt{۸t^۳},\ z=\frac{۱}{۲}t^۲$$

بین نقطه‌های $t=۰$ و $t=۱$.

حل. داریم:

$$ds=\sqrt{x'^{۲}_t+y'^{۲}_t+z'^{۲}_t}\,dt=(۱+t)dt،$$

$$I=\frac{\sqrt{۲}}{۳}\int_{۰}^{۱۹} t^{\frac{۳}{۲}}(۱+t)dt=\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۱۴۳}$$

۷) رابطه‌ای برای محاسبهٔ انتگرال $I=\int_{(K)} f(x، y)ds$ پیدا کنید، به شرطی که منحنی (K) با معادلهٔ $r=r(\theta)$ $(\theta_۱\leqslant\theta\leqslant\theta_۲)$ در مختصات قطبی، داده‌شده باشد.

پاسخ: $$I=\int_{\theta_۱}^{\theta_۲} f(r\cos\theta، r\sin\theta)\sqrt{r^۲+r'^{۲}}\,d\theta$$

۸) انتگرال $H=\int_{(K)} \frac{ds}{(x^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ را محاسبه کنید، به شرطی که (K)، بخشی از مارپیچ هذلولوی $r\theta=۱$، از $\theta=\sqrt{۳}$ تا $\theta=۲\sqrt{۲}$، باشد.

پاسخ: $\frac{۱۹}{۳}$.

۹) مطلوب است جرم بخشی‌ازمنحنی $y=\ln x$، بین‌نقطه‌های به‌طول‌های $x_۱$ و $x_۲$، به شرطی‌که چگالی (خطی) منحنی، در هرنقطه، برابر با مجذور طول نقطه باشد.

حل. با توجه به رابطه (۲)، ازآن‌جاکه دراین حالت $\rho=x^۲$، داریم:

$$m=\int_{x_۱}^{x_۲} x^۲ds،\ ds=\frac{\sqrt{۱+x^۲}}{x}dx$$

بنابراین:

$$m=\int_{x_۱}^{x_۲}\sqrt{۱+x^۲}\cdot x\,dx=\frac{۱}{۳}\left[(۱+x_۲^۲)^{\frac{۳}{۲}}-(۱+x_۱^۲)^{\frac{۳}{۲}}\right]$$

۱۰) مطلوب است جرم بخشی‌از منحنی‌زنجیری $y=a\cdot\operatorname{ch}x$، در فاصلهٔ نقطه‌های $x=۰$ و $x=a$، به شرطی کـه چگالی منحنی، در هر نقطهٔ آن، متناسب با عکس عرض آن باشد.

راهنمائی. $\rho=\frac{k}{y}$، $ds=\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx=\frac{y}{a}dx$، $m=k$.

سایر مسأله‌های مربوط به‌محاسبهٔ جرم درطول منحنی مادی هم، به‌شرطی‌که به‌طور پیوسته توزیع شده باشد، به‌طور طبیعی، به انتگرال‌های منحنی‌الخط مورد بحث، منجر می‌شوند.

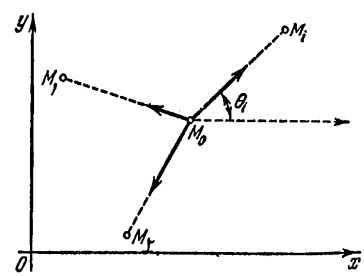
۱۱) در فصل دهم [۳۴۹]، گشتاور ایستائی (ممان استاتیك) یك منحنی مستوی را نسبت به محورهای مختصات و، همچنین، مختصات گرانیگاه (مرکز ثقل) آن را، با این فرض‌که چگالی آن $\rho = ۱$ باشد، محاسبه کرده‌ایم. خواننده، به‌سادگی می‌تواند، رابطه‌هایی راکه درآن جا به‌دست آوردیم، برای حالت کلی، موقعی‌که جرم به طور پیوسته توزیع شده باشد، تعمیم دهد. اگرمفهوم انتگرال منحنی‌الخط را مورد استفاده قراردهیم، درآن صورت، نتیجه‌ها، چنین نوشته می‌شوند:

$$M_y = \int_{(K)} \rho x ds, \quad M_x = \int_{(K)} \rho y ds$$

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_{(K)} \rho x\, ds}{\int_{(K)} \rho ds} \quad \text{و} \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_{(K)} \rho y\, ds}{\int_{(K)} \rho ds}$$

۱۲) به‌کاربرد دیگری ازانتگرال منحنی‌الخط نوع اول، یعنی‌مسألهٔ مربوط به‌جاذبهٔ نقطهٔ مادی از منحنی مادی، می‌پردازیم.

بنا برقانون نیوتون می‌دانیم‌که، نقطهٔ مادی M به‌جرم m، نقطهٔ مادی $M_۰$ به‌جرم $m_۰$ را، با نیروئی برابر با $k \cdot \frac{mm_۰}{r^۲}$ ودر جهت از $M_۰$ به M، جذب می‌کند، که در آن، r عبارت است از فاصلهٔ $M_۰M$ و k ضریبی است‌که به انتخاب واحدهای اصلی اندازه‌گیری بستگی دارد. معمولا، و برای‌سادگی‌کار، k را واحد به‌حساب می‌آورند.



شکل ۲

اگر نقطهٔ $M_۰$ به وسیلهٔ دستگاه نقطه‌های $M_۱$، $M_۲$،...، M_n به جرم‌های $m_۱$، $m_۲$،...، m_n جذب شود، درآن‌صورت، برآیند نیروها، باجمع هندسی نیروهای جاذبهٔ جداگانهٔ نقطه‌ها، به‌دست می‌آید. ضمناً، تصویر برآیند نیروها برمحورهای مختصات، برابر مجموع جبری تصویرهای نیروها، به‌طور جداگانه، است.

اگر تصویر نیروی برآیند را بر محور، X و Y و زاویهٔ بین بردار $\overrightarrow{r_i}=\overrightarrow{M_0M_i}$ بامحور x را θ_i بنامیم (شکل۲)، درآن صورت، روشن است که

$$X=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0m_i}{r_i^2}\cos\theta_i\ ,\ Y=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0m_i}{r_i^2}\sin\theta_i$$

که درآن، r_i، طبق معمول، به معنای طول بردار $\overrightarrow{r_i}$ می‌باشد.

اکنون فرض می‌کنیم کـه جرم، به‌صورتی پیوسته، روی منحنی (K) تـوزیع شده باشد. برای پیداکردن جاذبه، منحنی را به‌بخش‌هایی تقسیم می‌کنیم و جرم هر بخش را درنقطهٔ M_i دلخواه آن متمرکز می‌کنیم و، سپس، مقدار تقریبی تصویرهای برآیند را بر محورها، به‌دست می‌آوریم:

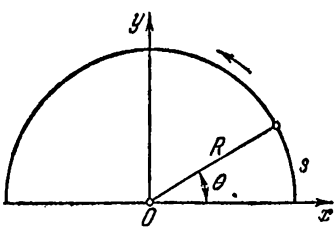
$$X\doteq\sum_i\frac{m_0\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2}\cos\theta_i\ ,\quad Y\doteq\sum_i\frac{m_0\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2}\sin\theta_i$$

زیرا، دراین‌حالت، جرم جداگانهٔ هربخش، تقریباً برابراست با $\rho(M_i)\sigma_i$. اگرهمهٔ σ_iها را به‌سمت صفر میل‌دهیم، آن‌وقت، درحد به برابری‌های دقیقی می‌رسیم و، ضمناً، به‌جای مجموع‌ها، انتگرال‌ها را خواهیم داشت:

$$X=m_0\int_{(K)}\frac{\rho(M)\cos\theta}{r^2}ds,\ Y=m_0\int_{(K)}\frac{\rho(M)\sin\theta}{r^2}ds \qquad (۸)$$

دراین‌جا، r طول‌بردار $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{M_0M}$، و θ زاویهٔ بین‌آن و محور x است.

۱۳) مطلوب است جاذبه‌ای‌که نیم‌دایره متجانس (به‌ازای $\rho=1$)، بر واحد جـرم واقع بر مرکز آن، اعمال می‌کند.



شکل۳

حل. مبداء مختصات را، منطبق بر مرکز نیم‌دایره می‌گیریم و محور طول را از دو انتهای نیم دایره می‌گذرانیم (شکل۳).

با توجه به تقارن داریم: $X=0$، بنابراین، تنها باید تصویر Y را پیداکرد. از روی رابطهٔ (۸):

$$Y=\int\frac{\sin\theta}{r^2}ds$$

ولی، دراین حالت، $r=R$ (شعاع نیم دایره) و $ds=Rd\theta$. درنتیجه

$$Y=\frac{1}{R}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta=\frac{2}{R}$$

۱۴) مطلوب است محاسبهٔ مقدار جاذبه‌ای که خط راست نامتناهی و متجانس ($\rho=1$)، برنقطهٔ به‌جرم واحد ($m_0=1$)، واقع درفاصله h از خط راست، واردمی‌کند.

حل. جاذبهٔ مطلوب را، به عنوان حد جاذبهٔ پاره خطی‌ازخط راست مفروض، که دو انتهای‌آن در دو جهت مختلف به‌سمت بی‌نهایت میل‌کنند، درنظر می‌گیریم. اگرهمین‌خط راست را محور x بگیریم و محور y را ازنقطهٔ مفروض بگذرانیم، آن وقت (با توجه به این‌که، دراین حالت، $ds=dx$)، به‌دست می‌آید:

$$Y=-h\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{h}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=-\frac{2}{h}$$

به همین ترتیب: $X=0$ (که البته، باتوجه به تقارن هم، روشن است).

۱۵) مطلوب است محاسبهٔ جاذبه‌ای کـه به وسیلهٔ کمان آستروئید $x=a\cos^3 t$، $y=a\sin^3 t$ واقع در ربع اول، برواحد جرم واقع در مبداء مختصات وارد می‌شود، به شرطی‌که چگالی منحنی، در هر نقطهٔ آن، برابر مکعب فاصلهٔ این نقطه از مبداء مختصات باشد.

پاسخ: $X=Y=\frac{3a^2}{5}$.

§۲. انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم

۵۴۶. تعریف انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم. مفهوم انتگرال منحنی‌الخط نـوع دوم، از نظر عملی، اهمیت بیشتری دارد، ولی در این‌جا مستقیماً از تعـریف آن آغاز و کاربردآن را به شماره‌های آینده (مثلاً، **۵۵۴** را ببینید) موکـول می‌کنیم. منحنی پیوستهٔ (AB) را در نظر می‌گیریم (و محض سادگـی، آن را نابسته ــ باز ــ فرض می‌کنیم)، و فرض می‌کنیم‌که در طول‌آن، دوباره، تابع $f(x,y)$ داده شده باشد. منحنی را، به وسیلهٔ نقطه‌های $A_i(x_i, y_i)$، به بخش‌هایی تقسیم و بر قطعه منحنی A_iA_{i+1}، نقطه $M_i(\xi_i, \eta_i)$ را به‌دلخواه انتخاب می‌کنیم و در آن، مثل قبل، مقـدار تابع $f(M_i)=f(\xi_i, \eta_i)$ را محاسبه می‌کنیم. ولی‌این‌بار، این‌مقدار را، نه درطول‌کمان A_iA_{i+1}، بلکه درمقدار تصویر

این کمان مثلا برمحـور x، یعنی در $x_{i+1}-x_i=\Delta x_i$، ضرب می‌کنیم؛ سپس، مجموع زیررا تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

اگـر با میل $\mu=\max\overline{A_iA_{i+1}}$ به‌سمت صفر، این مجموع، بدون ارتباط به نوع تقسیم منحنی و بدون توجه به نوع انتخاب نقطهٔ M_i، دارای حد متناهی I باشد، آن وقت، این حد را، انتگـرال منحنی‌الخط (نـوع دوم) از $f(M)dx$، نسبت به منحنی یا نسبت به مسیر (AB) می‌نامند و به‌این ترتیب نشان می‌دهند:

$$I=\int_{(AB)} f(M)dx=\int_{(AB)} f(x,y)dx \qquad (۱)$$

به همین ترتیب، اگر $f(M_i)$ را، به جای Δx_i، در Δy_i، یعنی در تصویر کمان A_iA_{i+1} برمحور y، ضرب کنیم و مجموع زیررا تشکیل دهیم:

$$\sigma^*=\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta y_i=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

آن وقت، انتگرال منحنی‌الخط (نوع دوم) از $f(M)dy$، به عنوان حد این مجموع، به دست می‌آید:

$$I^*=\int_{(AB)} f(M)dy=\int_{(AB)} f(x,y)dy \qquad (۲)$$

اگر دوتابع $P(M)=P(x,y)$ و $Q(M)=Q(x,y)$ در طول منحنی (AB) معین باشند و انتگرال‌های

$$\int_{(AB)} P(M)dx=\int_{(AB)} P(x,y)dx$$

و

$$\int_{(AB)} Q(M)dy=\int_{(AB)} Q(x,y)dy$$

وجود داشته باشند، در آن صورت، مجموع آن‌ها را هم، انتگـرال منحنی‌الخط («حالت

کلی») می‌نامند و فرض می‌کنند.

$$\int_{(AB)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy=\int_{(AB)} P(x, y)dx+\int_{(AB)} Q(x, y)dy$$

اکنون، تعریف انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم (۱) [یا (۲)] را، با تعریف انتگرال منحنی‌الخط نوع اول [۵۴۳، (۱) را ببینید]، مقایسه می‌کنیم. باوجودی که، این دو تعریف، شباهت‌های روشنی دارند، دارای تفاوتی جدی هستند: درحالت انتگرال نوع اول، ضمن تشکیل مجموع انتگرالی، مقدار تابع $f(M_i)$ در طول $\sigma_i=\Delta s_i$، بخش‌های $\widehat{A_iA_{i+1}}$ منحنی، ضرب می‌شود، درحالی که در حالت انتگرال نوع دوم، این مقدار $f(M_i)$، در تصویر Δx_i (یا Δy_i) بخش‌های نامبرده بروی محور x (یامحور y)، ضرب می‌شود.

دیدیم، جهت مسیر (AB)، که انتگرال‌گیری در طول آن انجام می‌گیرد، در حالت انتگرال نوع اول، نقشی ندارد، زیرا طول σ_i از کمان $\widehat{A_iA_{i+1}}$، بستگی به این جهت ندارد. ولی، در انتگرال نوع دوم، وضع فرق می‌کند: تصویر کمان نامبرده براین یا آن محور، بستگی به‌جهت کمان دارد و اگر جهت کمان عوض شود، علامت تصویر آن تغییرمی‌کند. به‌این ترتیب، برای انتگرال نوع دوم، داریم:

$$\int_{(BA)} f(x, y)dx=-\int_{(AB)} f(x, y)dx$$

و به‌همین ترتیب

$$\int_{(BA)} f(x, y)dy=-\int_{(AB)} f(x, y)dy$$

ضمناً، از وجود انتگرال سمت راست، وجود انتگرال سمت چپ نتیجه می‌شود و برعکس.

به ترتیب مشابهی، می‌توان مفهوم انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم در طول منحنی فضایی (AB) را هم، تعریف کرد. اگر تابع $f(M)=f(x, y, z)$، در نقطه‌های این منحنی، مفروض باشد، می‌توانیم، مثل قبل، مجموع

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i\eta_i\zeta_i)\Delta x_i$$

را بسازیم و حد آن را، به شرطی که $\mu=\max\overline{A_iA_{i+1}}$ به سمت صفر میل کند، مورد بررسی قرار دهیم. این حد، انتگرال منحنی‌الخط (نوع دوم) $f(M)dx$ نامیده می‌شود

و به این ترتیب، نوشته می‌شود:

$$\int_{(AB)} f(M)dx = \int_{(AB)} f(x, y, z)dx$$

انتگرال‌های به صورت زیرهم، به‌طرز مشابهی، تعریف می‌شود:

$$\int_{(AB)} f(M)dy = \int_{(AB)} f(x, y, z)dy$$

و

$$\int_{(AB)} f(M)dz = \int_{(AB)} f(x, y, z)dz$$

و بالاخره، انتگرال («به‌صورت کلی»)

$$\int_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz = \int_{(AB)} Pdx + \int_{(AB)} Qdy + \int_{(AB)} Rdz$$

دراین‌جا هم، با تغییر جهت انتگرال‌گیری، علامت انتگرال عوض می‌شود.

در پایان یادآوری می‌کنیم که ویژگی‌های سادهٔ انتگرال معین معمولی [۳۰۲، ۳۰۳]، درمورد انتگرال منحنی منحنی‌الخط نیز وجود دارند، ولی‌ما به‌آن نخواهیم پرداخت.

۵۴۷. وجود و محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم. فرض کنید منحنی $(AB)=(K)$، بامعادله‌های پارامتری، داده شده باشد:

$$x=\varphi(t) \ , \ y=\psi(t) \qquad (۳)$$

ضمناً تابع‌های φ و ψ را پیوسته می‌گیریم و فرض می‌کنیم، با تغییر پارامتر t از α تا β، منحنی ازجهت A به B را رسم کند؛ تابع $f(x, y)$ هم، درطول منحنی (AB)، پیوسته فرض می‌شود.

اگر بحث برسر انتگرال (۱) باشد، وجود و پیوستگی $\varphi'(t)$ راهم به شرط‌های بالا اضافه می‌کنیم.

بااین شرط‌ها، انتگرال منحنی‌الخط (۱) وجود دارد و برابری زیر برقرار است:

$$\int_{(AB)} f(x, y)dx = (R)\int_{\alpha}^{\beta} \Big(\varphi(t), \psi(t)\Big)\varphi'(t)dt \qquad (۴)$$

به‌این ترتیب، برای محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط (۱)، باید در تابع زیرانتگرال، به

جای متغیرهای x و y، مقدارهای (۳) آن‌ها را برحسب پارامتر، و به جای dx، دیفرانسیل متغیر x را به عنوان تابعی از پارامتر، قرارداد. ترتیب گذاشتن مقدارهای مرزی در انتگرال آخری، متناظر با انتخاب جهت پیمودن منحنی است.

به اثبات بپردازیم. نقطه‌های $A_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ را با مقدارهای t_i از پارامتر و نقطهٔ M را برکمان A_iA_{i+1} با مقدارهای τ_i (روشن است که واقع در بین t_i و t_{i+1}) انتخاب می‌کنیم. آن وقت، می‌توان مجموع انتگرالی

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$$

را، با در نظر گرفتن

$$\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)dt$$

به‌صورت زیر نوشت:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)dt$$

ازطرف دیگر، انتگرال سمت راست (۴) را هم*، می‌توان به‌صورت مجموع نوشت:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt$$

از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\sigma - I = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))]\varphi'(t)dt$$

با در نظر گرفتن $\varepsilon > 0$ دلخواه، فرض می‌کنیم همهٔ Δt_iها آن قدر کوچك باشند که نوسان‌های تابع پیوستهٔ $f(\varphi(t), \psi(t))$ در بازهٔ $[t_i, t_{i+1}]$ کوچکتر از ε باشند. از آن‌جا که تابع پیوستهٔ $\varphi'(t)$، کران‌دار است: $|\varphi'(t)| \leqslant L$، بنابراین خواهیم داشت:

$$|\sigma - I| < \varepsilon L|\beta - \alpha|$$

---

*) وجود انتگرال، با توجه به پیوستگی تابع زیر انتگرال، واضح است.

به‌این ترتیب، اگر مقدار $\lambda=\max|\Delta t_i|$ را به‌سمت صفر میل می‌دهیم*:

$$\sigma \to I$$

و در نتیجه، هم وجود انتگرال منحنی‌الخط وهم برابری مورد نظر، ثابت می‌شود.

به‌همین ترتیب، می‌توان وجود انتگرال (۲) و درستی دستور

$$\int_{(AB)} f(x, y)dy=(R)\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)dt \qquad (۵)$$

را، با شرط وجود مشتق پیوستهٔ $\psi'(t)$، ثابت کرد.

سرانجام، اگر بحث برسر انتگرال به‌صورت کلی باشد:

$$\int_{(AB)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy$$

که در آن، P و Q، تابعی‌هایی پیوسته‌اند، این شرط اضافی را هم، برای منحنی (AB) در نظر می‌گیریم که، هردوتابع (۳)، دارای مشتق‌های پیوسته باشند. بااین شرط،خواهیم داشت:

$$\int_{(AB)} Pdx+Qdy=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt \qquad (۶)$$

تعریف انتگرال منحنی‌الخط و روش تبدیل آن به انتگرال معین معمولی را،که در این‌جا آوردیم، می‌توان مستقیماً درحالتی ازمنحنی (۳)، که خودش را قطع می‌کند، نیز به‌کاربرد، به شرطی‌کـه جهت برآن را، مثل سابق، با تغییر یکنوای پارامتر t از α تا β، تعریف کرد.

درپایان، حالتی‌را نشان می‌دهیم‌که، در آن، محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط بی‌اندازه ساده می‌شود. انتگرال (۱) برمنحنی مفروض را، بامعادلهٔ صریح درنظر می‌گیریم:

$$y=y(x)$$

ضمناً انتقال نقطه‌ها از A تا B، به ازای تغییر x از a تا b پیش‌آید. آن وقت به هیچ-

---

*) درحالت منحنی‌باز، بایدگفت، بزرگترین وتررا به‌سمت صفر میل می‌دهیم [۲۴۵].

گونه فرض دربارهٔ منحنی، به‌جز پیوستگی آن، نیاز نداریم:

$$\int_{(AB)} f(x, y)dx = (R)\int_a^b f(x, y(x))dx \qquad (۷)$$

به‌همین ترتیب، اگر انتگرال (۲)، برمنحنی پیوستهٔ مفروض، با معادلهٔ صریح، ولی از نوع دیگری، داده شده باشد:

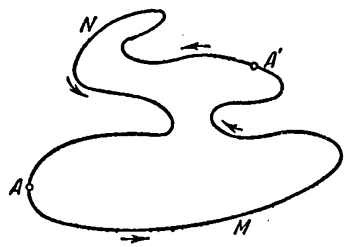
$$x = x(y)$$

که در آن، y از c تا d تغییر می‌کند، می‌توان نوشت:

$$\int_{(AB)} f(x, y)dy = (R)\int_c^d f(x(y), y)dy \qquad (۸)$$

بالاخره، اگر انتگرال (۱) را، بر پاره خط راست (AB) موازی محور y، به کار بریم، برابرصفر می‌شود (زیرا، دراین حالت، همهٔ Δx_iها و همراه با آن‌ها، همهٔ مجموع‌های σ، برابر صفرند). به همین ترتیب، انتگرال (۲) هم، اگر نسبت به پاره خط راست موازی محور x درنظر گرفته شود، برابر صفر است.

اگر ازروش انتگرال‌گیری (K)، برای تعداد متناهی منحنی‌های متصل به‌یکدیگر، استفاده شود و در طول هرکدام از آن‌ها، به‌طور جداگانه، انتگرال منحنی‌الخط وجود داشته باشد (از روی یکی‌از دستورهای فوق)، در آن صورت، به سادگی نشان داده می‌شود که، انتگرال، در طول تمامی منحنی (K) وجود دارد و برابر است با مجموع انتگرال‌های بخش‌های جداگانهٔ آن.



شکل ۴

۵۴۸. حالت دورهٔ بسته. جهت‌دارکردن صفحه. به بررسی دورهٔ بستهٔ (K)، یعنی وقتی که مبداء A وانتهای B ازمسیر انتگرال‌گیری برهم منطبق‌اند، می‌پردازیم. نقطهٔ C را، جدا از A، روی منحنی انتخاب می‌کنیم و جهتی را برای منحنی در نظر می‌گیریم (این جهت، روی شکل۴، با پیکان مشخص شده است). بنابه تعریف، فرض می‌کنند:

$$\int_{(K)} = \int_{(AMC)} + \int_{(CNA)}$$

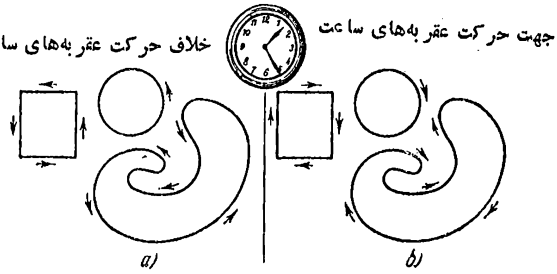
بااین فرض که: انتگرال‌های سمت راست، وجود داشته باشند.

به سادگی می‌توان ثابت کرد که، وجود و مقدار انتگرال، بستگی به انتخاب نقطه‌های A و C ندارد به‌جز آن، در مورد دورهٔ بستهٔ (K) هم، می‌توان از دستورهای (۴)، (۵) و (۶) شمارهٔ پیش، استفاده کرد.

یادداشت. در این‌جا هم، انتگرال منحنی‌الخط را، ضمن عبور حدی (مثل حالت منحنی‌باز) می‌توان به‌دست آورد؛ ولی با این شرط که عبور حدی را مقید کنیم و مثلا این شرط را وارد کنیم که دو نقطهٔ A و A' ـ که از قبل تثبیت شده‌اند ـ همیشه در ترکیب نقطه‌های تقسیم شرکت داشته باشند. اگر هیچ قیدی برای گذر حدی، به ازای $\max \overline{A_i A_{i+1}} \to 0$ نداشته باشیم، به‌هدف نمی‌رسیم [با ۳۳۰ مقایسه کنید].

ویژگی حالت مورد بررسی در آن است که، در این‌جا، جهت روی منحنی (K)، به‌وسیلهٔ نقطهٔ اولی و نقطهٔ آخری (که منطبق بر اولی است)، تعیین نمی‌شود؛ در هر حالت جداگانه، می‌توان جهت موردنظر را انتخاب کرد. در حالتی هم که با منحنی فضایی سروکار داریم، باید به‌همین صورت عمل کرد. ولی در مورد منحنی بستهٔ مستوی (K)، معمولا، به طریق دیگری عمل می‌کنند.

از دو جهت دوران، که برای صفحه ممکن است ـ «درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت» و «درجهت حرکت عقربه‌های ساعت» ـ یکی را به‌عنوان جهت مثبت درنظر می‌گیرند: به‌این ترتیب، صفحه جهت‌دار می‌شود (دراین حالت، می‌گویند که: بایک صفحهٔ توجیه شده سروکار داریم). اگر دوران مخالف جهت حرکت عقربه‌های ساعت را، مثبت

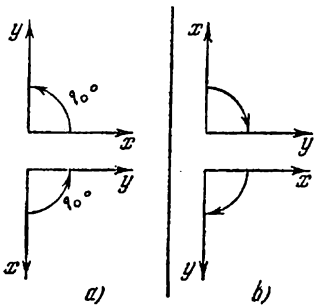


شکل ۵

بگیریم، صفحهٔ توجیه شده را راست، و در غیراین صورت، چپ می‌نامند.

درحالتی که صفحهٔ توجیه شده، راست باشد، دوران خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت را، مبنای تعریف جهت مثبت روی دورهٔ بستهٔ ساده می‌گیریم (شکل ۵ ـ a). این تعریف، برای دوره‌هایی که به محیط دایره نزدیک‌اند، خصلت کاملا روشنی دارد. به‌همین مناسبت، آن را به صورتی دقیق‌تر درمی‌آوریم: جهت حرکت مثبت روی دورهٔ بستهٔ ساده،

به‌جهتی گفته می‌شود که، به ازای آن، سنجشی از حوزه که محدود به‌دوره و نزدیک‌تر به‌ناظر است، در سمت چپ ناظر قرار گیرد (شکل ۵–a). درحالتی که صفحهٔ توجیه شده، چپ باشد، حرکت روی دوره، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت‌است، به‌نحوی که حوزه، درسمت راست ناظرواقع می‌شود (شکل ۵–b).



شکل ۶

یادآوری می‌کنیم که، وضع محورهای مختصات درصفحه، همیشه با جهت‌دار بودن صفحه بستگی دارد: محور y را می‌توان بادوران‌محور x به‌اندازهٔ ۹۰درجه، درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت (وقتی که صفحهٔ توجیه شده، راست است) و درجهت حرکت عقربه‌های ساعت (وقتی که صفحهٔ توجیه‌شده، چپ است)، به‌دست‌آورد (شکل ۶–a و b را ببینید). درحالت اول، دستگاه محورهای مختصات را راست، و در حالت دوم، چپ می‌نامند.

بعد از این توضیح‌ها، یکبار برای همیشه، این توافق را می‌پذیریم که: اگر مسیر انتگرال‌گیری (K)، منحنی بستهٔ ساده باشد، نماد

$$\int_{(K)} P\,dx+Q\,dy$$

اگر اشاره‌ای به جهت دور زدن در روی دورهٔ آن نشده باشد، منظور محاسبهٔ انتگرال در جهت مثبت است. مسلم است که، این توافق، مانع آن نیست که، درصورت لزوم، محاسبهٔ انتگرال را در جهت منفی در نظربگیریم، ولی در این صورت، آن را به این شکل نشان می‌دهیم:

$$-\int_{(K)} P\,dx+Q\,dy$$

۵۴۹. مثال‌ها. ۱) انتگرال $I=\int_{(K)}(x^2-y^2)\,dx$ را پیدا کنید، به شرطی که (K)، قطعه‌ای از سهمی $y=x^2$، ازنقطهٔ به‌طول $x=0$ تا نقطهٔ به‌طول $x=2$، باشد.

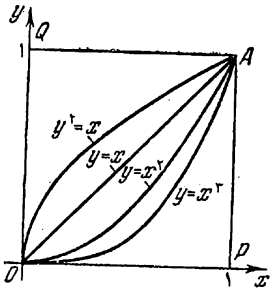
حل. از آن‌جاکه، منحنی انتگرال‌گیری، به‌صورت صریح داده شده‌است، ازدستور (۷) استفاده می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$I=\int_{0}^{2}(x^2-x^4)dx=-\frac{56}{15}$$

۲) انتگرال $I=\int_{(K)}(x^2-y^2)dy$ را پیدا کنید، به‌شرطی که (K)، همان منحنی مسأله ۱) باشد.

حل. در این‌جا باید از دستور (۸) استفاده کرد. با توجه به معادلهٔ منحنی $y=x^2$ و این‌که y از ۰ تا ۴ تغییر می‌کند، داریم:

$$I=\int_{0}^{4}(y-y^2)dy=-\frac{40}{3}$$



شکل ۷

۳) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط

$$H=\int_{(L)}2xydx+x^2dy$$

درمسیر (L)، که دو نقطهٔ $O(0,0)$ و $A(1,1)$ را به‌هم وصل می‌کند، به شرطی که مسیر (L) عبارت باشد از: a) خط راست $y=x$؛ b) سهمی $y=x^2$؛ c) سهمی $x=y^2$؛ d) سهمی درجه سوم $y=x^3$ (شکل ۷).

حل. a) چون $dy=dx$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{(L)}2xydx+x^2dy=\int_{0}^{1}3x^2dx=1$$

b) پس، $dy=2xdx$ $\qquad H=\int_{0}^{1}4x^3dx=1$

c) پس، $dx=2ydy$ $\qquad H=\int_{0}^{1}5y^4dy=1$

d) پس، $dy=3x^2dx$ $\qquad H=\int_{0}^{1}5x^4dx=1$

۴) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط

$$G=\int_{(L)} xydx+(y-x)dy$$

به‌ازای همان مسیرهای انتگرال‌گیری تمرین قبل.

پاسخ: a) $\frac{۱}{۳}$؛ b) $\frac{۱}{۱۲}$؛ c) $\frac{۱۷}{۳۰}$؛ d) $-\frac{۱}{۲۰}$.

۵) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط

$$I=\int_{(OA)} (x-y^۲)dx+۲xydy$$

به شرطی که مسیر انتگرال‌گیری، یکی از منحنی‌های زیر در فاصلهٔ نقطه‌های $O(۰,۰)$ و $A(۱,۱)$ باشد (شکل ۷ را ببینید): a) پاره خط راست $OA(y=x)$، b) خط شکستهٔ OPA، شامل پاره‌خط OP ازمحور x $(y=۰)$ و پاره خط $PA(x=۱)$؛ c) خط‌شکستهٔ OQA، شامل پاره خط OQ از محور $y(x=۰)$ و پاره خط QA ازخط $y=۱$).

حل. a) چون $y=x$ و $dy=dx$، پس

$$I=\int_{۰}^{۱}(x+x^۲)dx=\frac{۵}{۶}$$

b) دراین حالت طبیعی است که مسیر انتگرال‌گیری را به دو بخش (دوپاره خط) تقسیم کنیم:

$$I=\int_{(OPA)}=\int_{(OP)}+\int_{(PA)}=I_۱+I_۲$$

درطول OP داریم: $y=۰$ و $dy=۰$، به‌نحوی که

$$I_۱=\int_{۰}^{۱} xdx=\frac{۱}{۲}$$

درطول PA داریم: $x=۱$ و $dx=۰$ و درنتیجه

$$I_۲=\int_{۰}^{۱}۲ydy=۱$$

و بنابراین: $I=I_۱+I_۲=\frac{۳}{۲}$.

c) شبیه حالت قبل عمل می‌کنیم (انتگرال درطول پاره خط OQ، برابرصفراست):

$$I=\int_{(OA)}=\int_{0}^{1}(x-1)dx=-\frac{1}{2}$$

۶) همان حالت‌های تمرین قبل را، در مورد انتگرال زیر، درنظر بگیرید:

$$J=\int_{(OA)}(y^2+2xy)dx-(2xy+x^2)dy$$

پاسخ: درهمهٔ حالت‌ها: $J=2$.

یادداشت. خواننده، به‌احتمال زیاد، به اختلاف بین تمرین‌های ۳) و ۶) از یك طرف و ۴) و ۵) از طرف دیگر، توجه‌کرده است. مقدار انتگرال‌های ۳) و۶)، به‌مسیری که‌نقطهٔ‌آغازرا به‌نقطهٔ پایان وصل می‌کند، بستگی ندارد؛ درحالی‌که در مثال‌های ۴) و۵) با انتگرال‌هایی سروکار داریم‌که، به این مسیر بستگی دارند. کمی بعد [در §۳]، دراین باره بحث، واهمیت‌آن را روشن خواهیم‌کرد.

۷) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$I=\int_{(C)}(x^2+2xy)dy$$

که درآن، (C) عبارت است ازنیمهٔ بالایی بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت.

حل. از نمایش پارامتری بیضی: $x=a\cos t$ ، $y=b\sin t$ استفاده می‌کنیم (در این‌جا، t، از ۰ تا π تغییر می‌کند). اگر به‌جای x و y، مقدارآن‌ها را برحسب t و به جای dy، مقدارآن $b\cos t dt$ قرار دهیم، به‌دست می‌آید [از روی دستور (۵)]:

$$I=\int_{0}^{\pi}(a^2\cos^2 t+2ab\cos t\sin t)b\cos t dt=$$

$$=a^2b\int_{0}^{\pi}\cos^3 t dt+2ab^2\int_{0}^{\pi}\cos^2 t\sin t dt=\frac{4}{3}ab^2$$

۸) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$K=\int_{(L)} y^{۲}dx-x^{۲}dy$$

که در آن، (L) عبارت است از دایرهٔ به شعاع واحد ومرکزواقع در a) مبداء مختصات؛ b) نقطهٔ $(۱, ۱)$.

حل. a) با شروع از معادله‌های پارامتری $x=cost$، $y=sint$، که در آن، t از ۰ تا ۲π تغییر می‌کند، از روی دستور (۵) خواهیم داشت:

$$K=\int_{۰}^{۲\pi}(sin^{۳}t+cos^{۳}t)dt=۰$$

به‌همین ترتیب، به‌کمك نمایش پارامتری $x-۱=cost$، $y-۱=sint$ به‌دست می‌آید:

$$K=-\int_{۰}^{۲\pi}(۲+sint+cost+sin^{۳}t+cos^{۳}t)dt=-۴\pi$$

۹) مطلوب است مقدار انتگرال

$$J=\int_{(K)}\frac{xdy-ydx}{Ax^{۲}+۲Bxy+Cy^{۲}}\quad (A, C, AC-B^{۲}>۰)$$

که در آن، (L) عبارت است از دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}$.

راهنمائی. با **۳۳۹**، ۱۴) مقایسه کنید. پاسخ. $\frac{۲\pi}{\sqrt{AC-B^{۲}}}$

۱۰) مطلوب است محاسبهٔ مقدار انتگرال

$$L=\int_{(A)}\frac{xdx}{y}-\frac{dy}{y-x}$$

به شرطی که (A)، بخشی از سیکلوئید

$$x=a(t-sint),\ y=a(۱-cost)$$

از نقطهٔ $t=\frac{\pi}{۶}$ تا نقطهٔ $t=\frac{\pi}{۳}$ باشد.

حل. داریم:

$$L=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[a\left(t-\sin t-\frac{\sin t}{\cos t}\right]dt=a\left(\frac{\pi^2}{24}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln 3\right.$$

۱۱) مطلوب است محاسبهٔ مقدار انتگرال

$$I=\int_{(K)}\frac{x^2dy-y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}$$

که در آن، (K) عبارت است ازبخشی از آستروئید

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t$$

ازنقطهٔ $A(a,0)$ تا نقطهٔ $B(0,a)$.

حل. داریم:

$$I=3a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3}{16}\pi a^{\frac{4}{3}}$$

۵۵۰. تقریب به کمک انتگرال روی خط شکسته. در اغلب مـوردها، می‌تـوان انتگرال‌های منحنی‌الخط را، به صورت تقریبی به‌کمک انتگرال‌های روی خط شکسته‌ای که به‌آن‌ها نزدیک می‌شود، ساده‌تر محاسبه‌کرد. این تقـریب، براساس فرض زیر گذاشته شده است‌که، بارها، ازآن استفاده خواهیم‌کرد.

منحنی (L)، که انتگرال روی آن انجام می‌گیرد، ساده و باز فرض می‌شود. این منحنی، با معادله‌های (۳) داده می‌شود،که درآن، تابع‌های φ و ψ، همراه بامشتق‌هایشان، پیوسته‌اند؛ با این فرض‌ها، هم وجود انتگرال منحنی‌الخطی‌که در زیر شرح خواهیم داد [۵۴۷] وهم راستاپذیری خود منحنی (L) [۲۴۸] تأمین می‌شود.

پیش‌قضیه. $P(x,y)$ و$Q(x,y)$ را، درحوزهٔ باز(E)، پیوسته و(L) را منحنی مفروضی می‌گیریم که انتگرال در طـول آن انجام می‌گیرد. اگـر خط شکستهٔ Δ را در (L) محاط کنیم، آن وقت، وقتی‌که بزرگترین ضلع خط‌شکسته به سمت صفر میل‌کند، خواهیم داشت:

$$\int_{(\Delta)}Pdx+Qdy=\int_{(L)}Qdx+Qdy$$

کافی است تنها به انتگرال‌های $\int_{(\Delta)} Pdx$ و $\int_{(L)} Pdx$ بپردازیم، زیرا بحث مربوط به انتگرال‌های $\int_{(\Delta)} Qdy$ و $\int_{(L)} Qdy$ کاملاشبیه آن خواهد بود. رأس‌های خط‌شکستهٔ (Δ) را، که در (L) محاط کرده‌ایم، نقطه‌های

$$A=A_0, A_1, \cdots, A_i, A_{i+1}, \cdots, A_n=B$$

می‌گیریم و مقدارهای x و P را، در نقطهٔ A_i، با x_i و P_i نشان می‌دهیم. بادرنظرگرفتن عدد دلخواه $\varepsilon>0$، می‌توان جزء $\overline{A_iA_{i+1}}$ را آن قدرکوچك تصور کرد که: ۱) نوسان تابع پیوستهٔ P در طول جزء $\overline{A_iA_{i+1}}$ کوچکتر از ε باشد و ۲) مجموع انتگرالی $\sum_i P_i\Delta x_i$ با حد خودش $\int_{(L)} Pdx$ کمتر از ε اختلاف داشته باشد.

روشن است که داریم:

$$\int_{(\Delta)} Pdx=\sum_i \int_{(A_i,A_{i+1})} Pdx$$

ازطرف دیگر

$$\sum_i P_i\Delta x_i=\sum_i \int_{(A_i,A_{i+1})} P_i dx$$

به نحوی که

$$\int_{\Delta} Pdx=\sum_i P_i\Delta x_i+\sum_i \int_{(A_i,A_{i+1})} [P-P_i]dx$$

ولی تفاوت جملهٔ اول سمت راست، باانتگرال $\int_{(L)} Pdx$ از ε کمتر است [۲) را ببینید] وجملهٔ دوم، ازلحاظ قدر مطلق، از ε $\sum_i \overline{A_iA_{i+1}}$ تجاوز نمی‌کند [۱) را ببینید] و به‌طور مسلم از $L\cdot\varepsilon$ کوچکتر است که در آن، L عبارت است ازطول منحنی (L).

به‌این ترتیب، سرانجام به‌دست می‌آید:

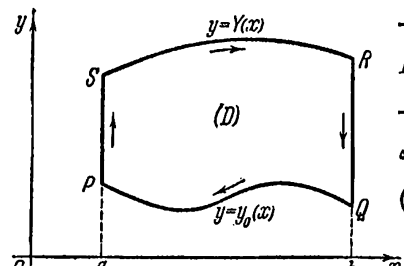
$$\left|\int_{(\Delta)} P\,dx - \int_{(L)} P\,dx\right| < \varepsilon(1+L)$$

که حکم ما را ثابت می‌کند.

یادداشت. همین حکم را، به معنایی، می‌توان در مورد منحنی بستهٔ سادهٔ (L) هم به کار برد، اگر منحنی بسته را، به دو منحنی باز تجزیه و، سپس، از پیش قضیه در مورد هرکدام از آن‌ها، استفاده کنیم. دراین‌جا، عبور به‌سمت حد، مقید به‌این شرط است که، در بین نقطه‌های تقسیم، دو نقطهٔ از پیش تثبیت شده، وجود داشته باشد [با یادداشت شمارهٔ ۵۴۸ مقایسه کنید].

۵۵۱. محاسبهٔ مساحت به‌کمک انتگرال منحنی‌الخط. اکنون ببینیم، به کمک انتگرال‌های منحنی‌الخط (نوع دوم)، چگونه می‌توان مساحت شکل‌های مستوی را به دست آورد.

ابتدا، شکل $(D) = PQRS$ را در نظر می‌گیریم (شکل ۸)، که به پاره خط‌های PS و QR موازی محور y (که در حالت خاص، می‌توانند به نقطه هم تبدیل شوند) و دو منحنی PQ و SR (که هر خط موازی محور y هرکدام از آن‌ها را، تنها در یک نقطه قطع می‌کند)، محدود شده است. معادله‌های صریح منحنی‌های (PQ) و (SR) را این‌طور می‌گیریم:



شکل ۸

$$(PQ):\quad y = y_0(x)$$

$$(SR):\quad y = Y(x)$$

ضمناً، x در بازهٔ $[a, b]$ تغییر می‌کند.

با در نظر گرفتن مساحت D «ذوزنقهٔ منحنی‌الخط» $PQRS$، به عنوان تفاضل مساحت‌های دو «ذوزنقهٔ منحنی‌الخط» $abRS$ و $abPQ$، می‌توان نوشت:

$$D = \int_a^b Y(x)\,dx - \int_a^b y_0(x)\,dx$$

ازطرف دیگر، با توجه به‌دستور (۷)، داریم:

$$\int_{(PQ)} y\,dx = \int_a^b y_0(x)\,dx;\quad \int_{(SR)} y\,dx = \int_a^b Y(x)\,dx$$

به این ترتیب

$$D=\int_{(SR)} ydx+\int_{(QP)} ydx$$

علامت جلو انتگرال دوم را تغییر دادیم، ولی درعوض، جهت انتگرال‌گیری راهم عوض کردیم. اگر به سمت راست برابری، انتگرال‌های

$$\int_{(PS)} ydx \quad و \quad \int_{(RQ)} ydx$$

را ــ که برابر صفرند ــ اضافه‌کنیم (صفر بودن این انتگرال‌هــا، به این مناسبت است که، نسبت به پاره خطهای موازی محور y، گرفته شده‌اند)، بدون این‌که، درستی برابری به هم بخورد، به دست می‌آید:

$$D=\int_{(PSRQP)} ydx$$

ضمناً، دوره را باید به‌همان ردیف حرف‌ها ــ در زیرنماد انتگرال ــ پیمود.

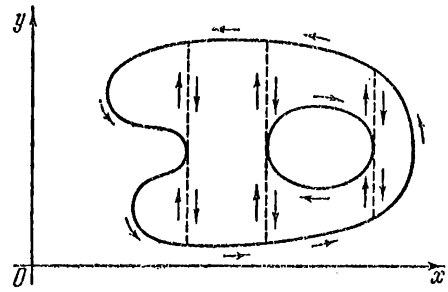
اگردورهٔ حوزهٔ (D) را (L) بنامیم، درآن صورت، نماد $\int_{(L)} ydx$، با توجــه به شرطی‌که در شمارهٔ ۵۴۸ نتیجه گرفتیم، به معنای آن است‌که، انتگرال، در جهت مثبت گرفته شده است. اگر محورها را، در جهت راست توجیه کنیم ــ آن طور که در شکل ۸ دیده‌می‌شود ــ باید حوزهٔ‌باقی‌مانده را درسمت‌چپ ببینیم، درحالی‌که جهت$PSRQP$، این حوزه را به‌طرف راست می‌برد. بنابراین

$$\int_{(PSRQP)} ydx=-\int_{(L)} ydx$$

وازآن‌جا

$$D=-\int_{(L)} ydx \qquad (۹)$$

اکنون فرض می‌کنیم که شکل (D)، محــدود به دوره‌ای با شکل بغــرنج‌تر باشد (که ضمناً، ممکن است از چند منحنی جداگانه هم، تشکیل شده باشد)، ولی به هــر حال



شکل ۹

می‌توان، با رسم خط‌های راستی موازی محور y، آن را به تعداد محدودی بخش، از نوعی که قبلا بررسی کرده‌ایم، تقسیم کرد (شکل ۹). مساحت هر کدام از این بخش‌ها را می‌توان، از روی دستور (۹)، به دست آورد. با جمع کردن همهٔ این برابری‌ها، در سمت چپ مساحت تمامی شکل (D)، و در سمت راست مجموع انتگرال‌های مربوط به همهٔ دوره‌های جزئی را به دست خواهیم آورد. ولی این انتگرال‌ها، منجر به یک انتگرال می‌شوند که نسبت به دورهٔ کلی (L) گرفته شده است، زیرا انتگرال نسبت به هر کدام از پاره خط‌های کمکی، برابر صفر است. به این ترتیب، در این حالت هم، می‌توان مساحت D را، از روی دستور (۹)، به دست آورد.

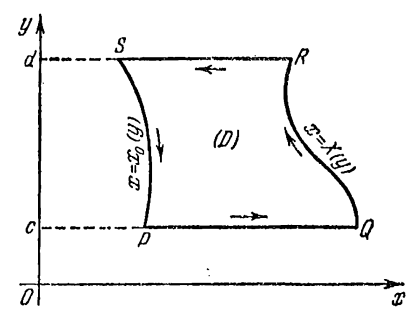
برای شکل $PQRS$ (شکل ۱۰) هم، که به پاره خط‌های PQ و RS موازی محور x و دو منحنی

$$(PS):\quad x=x_0(y)$$
$$(QR):\quad x=X(y)$$
$$(c\leqslant y\leqslant d)$$

محدود شده است، می‌توان با بحث مشابهی، به دستور زیر رسید:

$$D=\int_{(L)} x\,dy \qquad (۱۰)$$

ضمناً، این دستور را، از دستور (۹) هم می‌توان مستقیماً به‌دست آورد، به این ترتیب که، در آن، نقش محورهای x و y را با هم عوض کنیم. در ضمن باید علامت را هم عوض کرد، زیرا با وجود تغییر نقش محورهای مختصات، جهت مثبت دوران، به همان وضع قبلی باقی می‌ماند.



شکل ۱۰

به‌سادگی می‌توان فهمید که از دستور (۱۰)، برای شکل‌های پیچیده‌تر هم، که با خط‌های راست موازی محور x به تعداد متناهی «ذوزنقه‌های منحنی‌الخط» نوع دوم تقسیم می‌شود، می‌

توان استفاده کرد.

این نتیجه، درعمل، به اندازهٔ کافی کلی است، ولی آزمایش امکان تقسیم شکل مفروض به بخش‌هایی ازاین یا آن نوع، در بعضی موردها، دشواری‌هایی پیش می‌آورد. به همین مناسبت، شرط‌هایی کاملا کلی، ولی به سادگی تحقق‌پذیر، رانشان می‌دهیم که، به‌ازای آن‌ها، بتوان از هر دو دستور (۹) و (۱۰)، استفاده کرد.

مثلا، فرض می‌کنیم که، حوزهٔ (D)، به‌وسیلهٔ منحنی قطعه به‌قطعه هموار (L)* محصور شده باشد. ازآن‌جا که، این حوزه، تربیع‌پذیر است [۳۳۷]، بنابراین، می‌توان حوزه‌های چندضلعی درونی و بیرونی (A) و (B) را طوری ساخت که داشته باشیم:

$$B-A<\varepsilon, \quad A<D<B$$

که در آن، ε، عدد مثبت مفروضی است [۳۳۵]. همچنین می‌توان فرض کرد که، دوره‌های این حوزه‌ها، هیچ‌کدام دو به دو، دارای نقطهٔ مشترکی نباشند. کوچکترین فاصلهٔ بین‌نقطه‌های دوره‌های مختلف را، با δ نشان می‌دهیم [پاورقی پایان ۳۳۶ در جلد دوم‌را ببینید]. اگر خط شکستهٔ (Δ) را در (L) چنان محاط کنیم که همهٔ حلقه‌های آن، کوچکتر از δ باشند، آن وقت، خط شکسته هم نقطهٔ مشترکی با دوره‌های چندضلعی‌های (A) و (B) نخواهد داشت، به‌نحوی که چندضلعی (Δ_1) محصورکنندهٔ آن، (A) را شامل خواهد شد و خود در درون (B) خواهد بود. ازاین‌جا

$$|\Delta_1-D|<\varepsilon$$

به‌طوری که، اگر بزرگترین حلقهٔ خط شکسته به‌سمت صفر میل کند، داریم: $\Delta_1\to D$.

اکنون، بی‌هیچ دشواری، معلوم می‌شود که می‌توان مساحت Δ_1 چندضلعی را، هم با استفاده از دستور (۹) و هم بااستفاده از دستور (۱۰)، به‌دست آورد، یعنی

$$\Delta_1=-\int_{(\Delta)} y\,dx=\int_{(\Delta)} x\,dy$$

(زیرا، به‌کمك خط‌های راست‌موازی محور y یا محور x، می‌توان این چندضلعی‌را به‌سادگی، به ذوزنقه‌هایی از این یا آن نوع، تقسیم کرد). اگر با اتکای به پیش قضیهٔ شمارهٔ قبل (یادداشت را ببینید)، در این‌جا هم به سمت حد عبور کنیم، سرانجام به دست می‌آید:

---

*) یادآور می‌شویم که منحنی قطعه به قطعه هموار، عبارت است از یك منحنی که از چند کمان هموار تشکیل شده باشد.

مساحت شکل (D) را، که به منحنی قطعه به قطعه هموار محدود است، می‌توان باهریك از دستورهای نامبرده (به دلخواه)، به دست آورد.

باوجود این، برای محاسبهٔ مساحت‌ها، اغلب از دستور دیگری استفاده می‌کنند که متقارن‌تر است.

$$D=\frac{1}{2}\int_{(L)} x\,dy-y\,dx \qquad (11)$$

که به سادگی، ازدستورهای (۹) و (۱۰) به‌دست می‌آید [با **۳۳۹**]، (۱۶) مقایسه کنید].

یادداشت. به سادگی متقاعد می‌شویم که، وجود تعدادی متناهی نقطه‌های ویژه بر منحنی، هیچ مانعی در راه درستی دستورهای حاصل، ایجاد نمی‌کند. اگر این نقطه‌ها را به‌کمك همسایگی‌های آن‌ها مشخص کنیم، آن وقت می‌توان دستورها را، به طور صوری، برای بقیهٔ بخش‌های شکل به‌کار برد، سپس، بافرض این‌که، قطرهای همسایگی‌های نامبرده به سمت صفر میل کنند، باید به‌سمت حد عبور کرد.

۵۵۲. مثال‌ها. ۱) مطلوب است محاسبهٔ مساحت بیضی با نیم‌محورهای a و b.

حل. از معادله‌های پارامتری بیضی $x=a\cos t$، $y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ استفاده می‌کنیم. با توجه به‌دستور (۱۱) داریم:

$$D=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t\cdot b\cos t\,dt-b\sin t\cdot(-a\sin t)\,dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt=\pi ab$$

برای محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط، از دستور (۶) استفاده کردیم؛ برای گذاشتن مرزهای انتگرال‌گیری، باید دقت کرد که دورزدن مثبت روی دوره، متناظر با صعودی‌بودن پارامتر است.

۲) مطلوب است محاسبهٔ مساحت آستروئید

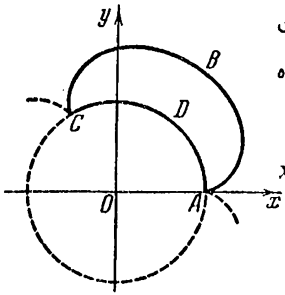
$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

پاسخ.
$$D=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3\pi a^2}{8}$$

۳ـ مطلوب است محاسبهٔ مساحت شکل محدود به‌یك کمان اپی‌سیکلوئید

$$x=a[(1+m)\cos mt-m\cos(1+m)t]$$
$$y=a[(1+m)\sin mt-m\sin(1+m)t]$$

وکمان دایرهٔ متناظر آن (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

حل. باید انتگرال (۱۱) را، ابتدا نسبت به منحنی (ABC) و سپس، نسبت به منحنی (CDA) گرفت. در حالت اول، می‌توانیم ازمعادله‌های بالا، با تغییر t از ۰ تا 2π، استفاده کنیم. دراین صورت

$$x\,dy - y\,dx = a^2 m(1+m)(1+2m)(1-\cos t)\,dt$$

به نحوی که

$$\frac{1}{2}\int_{(ABC)} = \pi a^2 m(1+m)(1+2m)$$

آن چه‌که به منحنی (CDA) مربوط می‌شود، می‌توان باحفظ همان پارامتر، آن را با معادله‌های

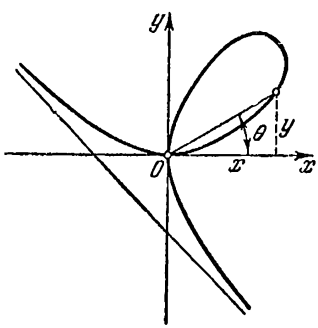
$$x = a\cos mt,\quad y = a\sin mt$$

و تغییر t از ۰ تا 2π، بیان کرد. انتگرال نظیر، چنین می‌شود:

$$\frac{1}{2}\int_{(CDA)} = \frac{1}{2}a^2 m\int_{2\pi}^{0} dt = -\pi a^2 m$$

بنابراین، مساحت مطلوب، برابر است با:

$$D = \pi a^2 m^2(2m+3)$$



شکل ۱۲

۴) مساحت حلقهٔ برگ دکارت را پیدا کنید (شکل ۱۲):

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

حل. برای به‌دست آوردن معادله‌های پارامتری دوره، فرض می‌کنیم: $y = tx$* آن وقت [با پایان شمارهٔ ۲۲۴ ـ جلد اول ـ مقایسه کنید] داریم:

$$x = \frac{3at}{1+t^3},\quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

---

*) از این تبدیل، معمولا می‌توان، به عنوان قاعده، در حالت‌هایی استفاده کرد که، در معادلهٔ جبری منحنی، دوگروه جمله‌های متجانس (همگن) وجود داشته باشد، ضمناً، درجه‌های این دوگروه، یك واحد باهم فرق داشته باشند.

ازملاحظه‌های هندسی روشن‌است که، حلقه، به‌ازای تغییرپارامتر از ۰ تا∞پیموده می‌شود (زیرا $t=\frac{y}{x}=tg\theta$، که در آن، θ از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند). داریم:

$$dx=۳a\frac{۱-۲t^۳}{(۱+t^۳)^۲}dt,\ dy=۳a\frac{۲t-t^۴}{(۱+t^۳)^۲}dt$$

و

$$D=\frac{۹a^۲}{۲}\int_۰^\infty\frac{t^۲dt}{(۱+t^۳)^۲}=\frac{۳}{۲}a^۲$$

توجه‌کنیم که، دراین‌جا، ازانتگرال ناویژه با حد نامتناهی استفاده کردیم، درعین‌حال، برای دستور (۶) مبنا را براین گرفتیم که بازهٔ تغییر پارامتر، متناهی است. برای‌این منظور، باید قبلا پارامتر دیگری را، با بازهٔ تغییر متناهی، درنظرگرفت (مثلا زاویهٔ θ) و، سپس، به پارامتر $t=\frac{y}{x}$ عبور کرد.

۵) همان مسأله را برای منحنی‌های زیرحل‌کنید:

a) $(x+y)^۴=ax^۲y$; b) $(x+y)^{۲n+۱}=ax^ny^n$ (n، عددی طبیعی)

راهنمائی. $t=\frac{y}{x}$ را وارد می‌کنیم: t از ۰ تا ∞ تغییر می‌کند. در حالت b)

$$xdy-ydx=a^۲\frac{t^{۲n}}{(۱+t)^{۴n+۲}}dt$$

برای انتگرال‌گیری، تجزیهٔ به‌کسرهای ساده را می‌توان باشروع از این اتحاد به دست آورد:

$$t^{۲n}=[(۱+t)-۱]^{۲n}=\sum_{k=۰}^{۲n}C_{۲n}^k(-۱)^k(۱+t)^k$$

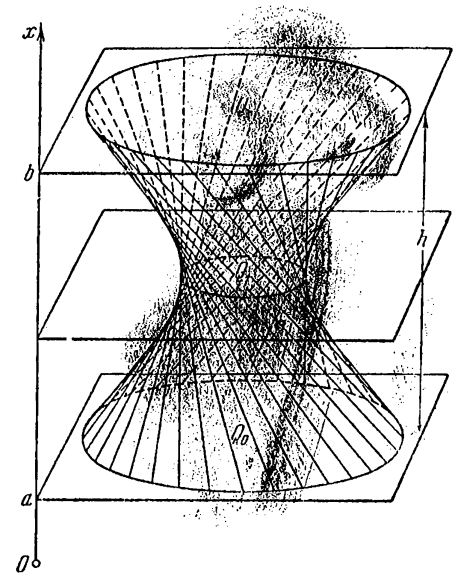
پاسخ. a) $D=\frac{a^۲}{۲۱۰}$؛ b) $D=\frac{۱}{۲}\sum_{k=۰}^{۲n}(-۱)^k\frac{C_{۲n}^k}{۴n-k+۱}$.

۶) مطلوب است مساحت شکل محدود به‌محورهای مختصات ومنحنی

$$x^۳+y^۳=x^۲+y^۲$$

پاسخ. $D=\frac{۱}{۳}+\frac{۴\pi}{۹\sqrt{۳}}$.

۷) در پایان، به‌عنوان مثال کاربرد دستور کلی (۱۰)، برای محاسبهٔ مساحت شکل‌های مستوی دلخواه*، به‌این مسأله می‌پردازیم.



شکل ۱۳

فرض کنید، قاعده‌های یك جسم، عبارت باشند از دو شکل به صورت‌های دلخواه واقع بر دو صفحهٔ موازی؛ و سطح جانبی آن از خط‌های راستی تشکیل شده باشد که، طبق قاعده‌ای، دوره‌های شکل‌های نامبرده را به‌هم وصل کنند (شکل ۱۳). در این صورت ثابت کنید که حجم V این جسم، با دستور

$$V=\frac{h}{۶}(Q_۰+۴Q_۱+Q_۲) \qquad (۱۲)$$

بیان می‌شود، که در آن، h ارتفاع جسم و $Q_۰$، $Q_۱$ و $Q_۲$ معرف مساحت قاعده‌ها و مقطع میانگین آن است.

می‌دانیم که حجم جسم، V، برحسب مساحت $Q=Q(x)$ مقطع عرضی، با دستور

$$V=\int_a^b Q(x)dx$$

بیان می‌شود [۳۴۲ را ببینید]. از طرف دیگر، رابطهٔ سیمپسون

$$\int_a^b Q(x)dx=\frac{h}{۶}(Q_۰+۴Q_۱+Q_۲)$$

به شرطی درست است که $Q(x)$ یك چند جمله‌ای باشد که درجهٔ آن از سه تجاوز نکند [پاورقی انتهای شمارهٔ ۳۴۲ ــ جلد دوم ــ را ببینید]. و به طوری که خواهیم دید، $Q(x)$

* البته، با رعایت شرط‌های لازم، که برای سهولت کار، در این‌جا، به ذکر آن‌ها نمی‌پردازیم.

عملاً یك چند جمله‌ای درجه دوم است. فرض می‌کنیم:

$$y=\alpha x+\beta,\quad z=\gamma x+\delta \qquad (۱۳)$$

معادلهٔ مولدهای سطح جانبی باشندکه این جسم را محدود می‌کنند ضمناً، می‌توان ضریب‌های α، β، γ و δ را، تابع‌هایی ازیك پارامتر t گرفت‌که، با تغییر آن (مثلا از t_0 تا T)، مولد هم، سطح را بپیماید. اکنون اگر سطح را باصفحه‌ای موازی صفحهٔ xy، و به‌فاصلهٔ x ازآن، قطع کنیم، در مقطع یك منحنی به دست می‌آیدکه تصویر آن برصفحهٔ yz، همان معادله‌های (۱۳) را به عنوان معادله‌های پارامتری خود، خواهد داشت. فرض‌کنیم، با تغییر t از t_0 تا T، تمامی دورهٔ مقطع (به‌وسیلهٔ نقطه‌های متناظر مولدها) درجهت مثبت پیموده شود. آن وقت، مساحت مقطع، مثلا از روی دستور (۱۰)، این‌طور بیان می‌شود:

$$Q(x)=\int_{(K_x)} ydz=\int_{t_0}^{T}(\alpha x+\beta)d(\gamma x+\delta)=$$

$$=x^2\cdot\int_{t_0}^{T}\alpha d\gamma+x\cdot\int_{t_0}^{T}(\alpha d\delta+\beta d\gamma)+\int_{t_0}^{T}\beta d\delta$$

یعنی سه‌جمله‌ای درجه دومی از x.

به سادگی می‌توان روشن کردکه از دستورمشابه دستور (۱۲)، می‌توان برای‌محاسبهٔ گشت‌آور استاتیك جسم، نسبت به صفحهٔ yz، استفاده‌کرد. این گشت‌آور، با دستور

$$M_{yz}=\int_a^b xQ(x)dx$$

بیان می‌شود [۱،۳۵۶)]. دراین‌جا هم، تابع زیر انتگرال، یك چند جمله‌ای درجهٔ سوم می‌شود.

۵۵۳. بستگی بین دونوع انتگرال منحنی‌الخط. منحنی هموار $(K)=(AB)$ را در نظر می‌گیریم و، باانتخاب کمان $s=\overset{\frown}{AM}$ به‌عنوان پارامتر، آن را بامعادله‌های

$$x=x(s),\quad y=y(s)\quad (0\leqslant s\leqslant S)$$

نمایش می‌دهیم. تابع‌های $x(s)$ و $y(s)$ دارای مشتق‌های پیوستهٔ $x'(s)$ و $y'(s)$هستند. اگر زاویهٔ بین محور x و مماس درجهت‌کمان‌های صعودی را α بنامیم، در آن صورت داریم [۲۴۹، (۱۵)]:

$$\cos\alpha=x'(s),\quad \sin\alpha=y'(s)$$

اگر در طول منحنی (K)، تابع پیوستهٔ $f(M)=f(x,y)$ داده شده باشد، به ترتیب داریم:

$$\int_{(K)} f(M)dx=\int_{0}^{S} f(x(s),y(s))x'(s)ds=$$

$$=\int_{0}^{S} f(x(s),y(s))\cos\alpha ds=\int_{(K)} f(M)\cos\alpha ds$$

و انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم، به انتگرال منحنی‌الخط نوع اول، منجر می‌شود.

به همین ترتیب می‌توان به دست آورد:

$$\int_{(K)} f(M)dy=\int_{(K)} f(M)\sin\alpha ds$$

واگر، درطول منحنی (K)، دوتا تابع پیوستهٔ $P(M)=P(x,y)$ و $Q(M)=Q(x,y)$ داده شود، درآن صورت

$$\int_{(K)} Pdx+Qdy=\int_{(K)} (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)ds \qquad (۱۴)$$

تأکید می‌کنیم که، درهمهٔ این دستورها، زاویهٔ α به جهتی ازمماس بستگی داردکه متناظر باجهت خود منحنی (K) است. اگر جهت منحنی را تغییر دهیم، آن‌گاه، نه‌تنها انتگرال سمت چپ تغییر علامت می‌دهد، بلکه با توجه به تغییر جهت مماس، زاویهٔ α به اندازهٔ $\pm\pi$ تغییر می‌کند و، در نتیجه، انتگرال سمت راست هم تغییرعلامت می‌دهد.

روشن‌است که این‌دستورها، برای منحنی‌قطعه به‌قطعه هموارهم ــ به‌شرطی که‌نقطه‌های تکراری یا خاص نداشته باشد ــ درست است؛ این حکم را به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که، ابتدا، آن را برای هرکدام ازقطعه‌های هموار بنویسیم و، سپس، جمله به‌جمله باهم جمع کنیم.

به عنوان نمونه تبدیل دستور (۱۱) برای مساحت‌ها را، به انتگرال منحنی‌الخط نوع اول، مطرح می‌کنیم:

$$D=\frac{۱}{۲}\int_{(K)} xdy-ydx=\frac{۱}{۲}\int_{(K)} (x\sin\alpha-y\cos\alpha)ds$$

واگر به مختصات قطبی r و θ برویم، به‌دست می‌آید:

$$D=\frac{1}{2}\int_{(K)} r(\sin\alpha\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta)ds=\frac{1}{2}\int_{(K)} r\sin(\alpha-\theta)ds$$

وبا توجه به‌این‌که، $\alpha-\theta$ عبارت است از زاویهٔ $(t$ و $r)$ بین شعاع حامل نقطه و مماس در آن، می‌توان صورت نهایی دستور را چنین نوشت:

$$D=\frac{1}{2}\int_{(K)} r\sin(r,t)ds$$

درمورد تبدیل انتگرال‌های منحنی‌الخط مربوط به منحنی‌های فضایی‌هم، به همین ترتیب، می‌توان عمل کرد. در نتیجه، دستور

$$\int_{(K)} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{(K)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

حاصل می‌شود، که در آن، $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ عبارتند از کسینوس‌های هادی مماس، به شرطی که جهت مماس را متناظر باجهت مسیر انتگرال‌گیری فرض کنیم.

درحالت منحنی‌های مستوی، گاهی بهتر است، برای دستوری که دونوع انتگرال منحنی‌الخط را به‌هم مربوط می‌کند، از زاویهٔ بین محور x و قائم برمنحنی (که انتگرال بر آن گسترده است) استفاده کنیم. اگر قائم را درچنان جهتی رسم کنیم که زاویهٔ $(n$ و $t)$ بین مماس وقائم برابر $+\frac{\pi}{2}$* باشد، به نحوی که

$$(x,n)=(x,t)+(t,n)=\alpha+\frac{\pi}{2}$$

آن وقت

$$\cos\alpha=\sin(x,n),\quad \sin\alpha=-\cos(x,n)$$

آن وقت، مثلا، دستور (۱۴) را می‌توان به این صورت نوشت:

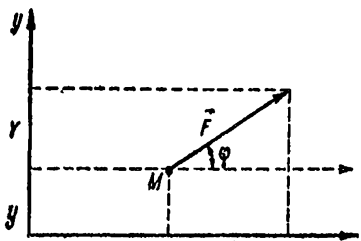
$$\int_{(K)} Pdx+Qdy=\int_{(K)}[P\sin(x,n)-Q\cos(x.n]ds \qquad (۱۵)$$

۵۵۴. مسأله‌هایی از فیزیک. درپایان به چند مسأله از فیزیک می‌پردازیم که، ضمن

*) جهت محاسبهٔ زاویه‌ها، باید موافق با جهت روی صفحه باشد.

حل آن‌ها، به انتگرال‌های منحنی‌الخط نیاز پیدا می‌کنیم.

۱) کار میدان نیرو. فرض می‌کنیم، در هر نقطهٔ M از صفحهٔ xy (یا بخش معینی ازصفحه)، که واحد جرم در آن قرار دارد، نیروی معین $\vec{F}$ عمل کند؛ مقدار و جهت این نیرو، تنها به موضع نقطهٔ M بستگی دارد. اگر مقدار m، جرم نقطهٔ مادی واقع در M، مخالف واحد باشد، نیروی مؤثر بر آن برابر $m\vec{F}$ خواهد بود. با این شرط‌ها، صفحه را (یا بخش مورد نظر آن را)، میدان (مسطح) نیرو و نیروی $\vec{F}$ مؤثر بر واحد جرم را، شدت میدان می‌نامند.



شکل ۱۴

مفروض بودن نیروی $\vec{F}$، چه از نظر مقدار و چه از نظر جهت ــ هم‌ارز مفروض بودن تصویرهای X و Y آن برمحورهاست که تابع‌هایی از مختصات x و y نقطهٔ M هستند:

$$X=X(x,y),\quad Y=Y(x,y)$$

اگر زاویهٔ بین بردار $\vec{F}$ و محور x را با φ نشان دهیم، در آن صورت (شکل ۱۴):

$$X=F\cos\varphi,\quad Y=F\sin\varphi \qquad (۱۶)$$

اکنون فرض می‌کنیم، نقطهٔ مادی M باجرم واحد، واقع در میدان، حرکت کند و منحنی پیوستهٔ (K) را درجهت معینی بپیماید. مسأله عبارت است ازمحاسبهٔ کار $\mathbf{A}$ که نیروهای میدان، ضمن این حرکت، انجام می‌دهند.

اگر نیروی مؤثر برنقطه، مقدار ثابت F وجهت ثابت را حفظ می‌کرد و تغییرمکان نقطه، روی یك خط راست بود، درآن صورت، کار $\mathbf{A}$، با حاصل ضرب تغییرمکان l در تصویر نیرو برجهت تغییرمکان، بیان می‌شد:

$$\mathbf{A}=Fl\cos\theta$$

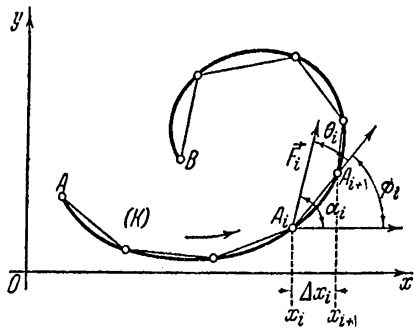
که در آن، θ عبارت است از زاویهٔ بین نیروی F وجهت تغییرمکان.

درحالتی که حرکت به خط مستقیم و نیرو ثابت نباشد، کار به‌کمك یك روند حدی به‌دست می‌آید. درضمن، برای سادگی کار، می‌توان به طورعادی، از «روش جمع بی‌نهایت کوچك‌ها» صحبت کرد [با ۳۴۸ مقایسه کنید]. به تعیین موضع نقطهٔ M برمنحنی (K) (شکل ۱۵) یا درازای s از کمان $\overset{\frown}{AM}$ می‌پردازیم. عنصر بی‌نهایت کوچك $MN=ds$

را درنظر می‌گیریم و، به‌تقریب، فرض می‌کنیم که نیروی $\overrightarrow{F}$ وزاویهٔ θ، در تغییرمکان ds، مقدار خود را حفظ کنند. آن وقت، عنصر نظیرکار، چنین خواهد بود:

$$dA = F\cos\theta\, ds$$

برای به دست آوردن تمامی‌کار A، باید همهٔ این عنصرها را در طول تمامی منحنی (K) «جمع کنیم» که، در نتیجه، به انتگرال منحنی‌الخط نوع اول می‌رسیم:



شکل ۱۵

$$A = \int_{(K)} F\cos\theta\, ds \qquad (۱۷)$$

زاویهٔ α را، بین جهت عنصر ds (یعنی جهت مماس برمنحنی درنقطهٔ M) و محور x، در نظر می‌گیریم. روشن است که $\theta = \varphi - \alpha$، به نحوی که

$$\cos\theta = \cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha$$

وعنصر انتگرال به صورت $(F\cos\varphi\cos\alpha + F\sin\varphi\sin\alpha)ds$ در می‌آید و یا، باتوجه به (۱۶):

$$(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)ds$$

خود عبارت (۱۷)، برای‌کار، چنین می‌شود:

$$A = \int_{(K)} (X\cos\alpha + Y\sin\alpha)ds$$

اکنون، اگردستور (۱۴) را ـ که مربوط به رابطهٔ بین دونوع انتگرال منحنی‌الخط بود ـ به حساب آوریم، سرانجام، کار میدان نیرو، با انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم، بیان می‌شود:

$$A = \int_{(K)} X\,dx + Y\,dy \qquad (۱۸)$$

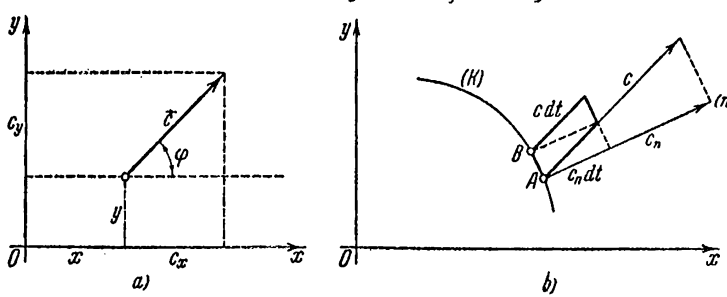
و این، متداول‌ترین عبارت برای کار است که، به کمک آن، می‌توان به یك رشته

پرسش‌های مهم مربوط به‌کار، پاسخ داد: آیا کار انجام یافته، به شکل مسیری که دونقطه را به‌هم پیوند می‌دهد، بستگی دارد؛ آیا مقدار کار، در مسیر بسته، همیشه برابر صفر است؟ (دراین باره، کمی پایین‌تر، شماره‌های ۵۵۵ - ۵۶۲ را ببینید.)

۲) جریان مسطح مایع تراکم ناپذیر. این حرکت، به این ترتیب مشخص می‌شود که: اولا، همهٔ ذره‌های واقع برقائمی از یك صفحه، سرعت‌هایی برابر، موازی این صفحه دارند، به‌نحوی که، برای مشخص کردن تمامی حرکت، کافی است که حرکت را تنها در یك صفحه مورد مطالعهٔ قرار دهیم*؛ ثانیاً، سرعت $\vec{c}$ ذرهٔ مایع، تنها به موضع ذره، ونه‌به زمان، بستگی دارد. به‌این ترتیب، به‌هرنقطهٔ هندسی ازصفحهٔ مورد نظر (یا بخشی از آن)، سرعتی که ازلحاظ مقدار و جهت معین است، مربوط می‌شود، به زبان دیگر، بایك «میدان سرعت» سروکار داریم.

اگر زاویهٔ بین‌بردار $\vec{c}$ و محور x را با φ، و تصویرهای این بردار را برمحورهای مختصات (مؤلفه‌های سرعت برروی محورها) با u و v نشان دهیم، درآن صورت (شکل ۱۶–a) داریم:

$$u = c_x = c\cos\varphi, \quad v = c_y = c\sin\varphi$$



شکل ۱۶

اکنون، یك منحنی (K) بر صفحهٔ xy انتخاب و مقدار Q، مایع جاری از آن را درسمت معینی ازآن در واحد زمان، معین کنیم. اگر مایع را تراکم ناپذیر بگیریم، می‌توان مقدار آن را به‌کمك مساحت شکلی که آن را پوشانده است، اندازه گرفت. وقتی که، درعمل، جریان مایع درجهت مخالف‌جهت، انتخاب شده باشد، مقدارمایع جاری را، منفی به حساب می‌آوریم.

عنصر $ds = AB$ از منحنی (K) را در نظر می‌گیریم. مقدار مایعی که ازاین‌عنصر، در زمان dt، جریان می‌یابد، برابراست با:

*) وما آن را به عنوان صفحه xy انتخاب می‌کنیم.

$$c_n ds dt \qquad (۱۹)$$

که در آن، c_n عبارت است از تصویر سرعت $\vec{c}$ بر قائم $\vec{n}$ (قائم برعنصر ds) که جهت آن به سمت انتخاب شدهٔ منحنی است. در واقع، این مقدار، برابراست با مساحت متوازی‌الاضلاع به ضلع‌های ds و $c\cdot dt$، که ارتفاع آن هم، برابر حاصل‌ضرب $c_n\cdot dt$ می‌شود (شکل ۱۶–b). برای محاسبهٔ مقدار مایعی که از عنصر ds، در واحد زمان، جریان یافته است، عبارت‌های (۱۹) را، نسبت به عنصر dt، جمع می‌کنیم که منجر به $c_n ds$ می‌شود. اگر عبارت‌هایی راکه به دست می‌آید، نسبت به همهٔ عنصرهای منحنی (K)، جمع کنیم، مقدار موردنظر مایع Q، به‌صورت انتگرال منحنی‌الخط نوع اول، درمی‌آید:

$$Q=\int_{(K)} c_n ds \qquad (۲۰)$$

اگر زاویهٔ بین‌محور x وقائم برمنحنی (x,n) باشد، آن وقت، زاویهٔ بین قائم و سرعت $\vec{c}$، چنین می‌شود:

$$(n,c)=(x,c)-(x,n)=\varphi-(x,n)$$

بنابراین

$$c_n=c\cos(n,c)=c[\cos\varphi\cos(x,n)+\sin\varphi\sin(x,n)]=u\cos(x,n)+v\sin(x,n)$$

و عبارت (۲۰)، به‌این صورت در می‌آید:

$$Q=\int_{(K)}[u\cos(x,n)+v\sin(x,n)]ds \qquad (۲۱)$$

اکنون، بنابر دستور (۱۵) در شمارهٔ **۵۵۳**، می‌توان این انتگرال را به صورت انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم ارائه داد:

$$Q=\int_{(K)} v dx-u dy \qquad (۲۲)$$

بازهم تأکید می‌کنیم که، جهت برروی منحنی، بایدطوری انتخاب شودکه زاویهٔ بین‌جهت نظیر مماس و جهت قائم (که قبلا انتخاب شده است)، برابر $+\frac{\pi}{۲}$ باشد (زیرا دستور (۱۵) را، باتوجه به همین فرض، بدست آورده بودیم).

اگر (K)، یك دورهٔ بسته باشد، و انتگرال‌گیری (۲۲) را (همان طور که معمول است؛ ۵۴۸) درجهت مثبت به‌حساب آوریم، درآن صورت، قائم مربوط به دستور(۲۲)، باید درجهت درونی حوزهٔ محدود به دورهٔ (K) باشد (تا شرط‌های مورد نظر، رعایت شده باشد). در نتیجه، دراین حالت، دستور (۲۲)، مقدار مایع جاری از دورهٔ (K) را، در واحد زمان، دردرون حوزه به‌دست می‌دهد. اگر بخواهیم، مقدار مایع جاری به‌بیرون حوزه را ــ که به‌وسیلهٔ دورهٔ (K) محصور شده است ــ پیدا کنیم، کافی‌است در دستور (۲۲)، تنها علامت را عوض کنیم.

سپس، اگر میدان دارای «سرچشمه» و «زیرآب» نباشد، درآن صورت، در هر حوزهٔ محدود دلخواه، مقدارمایع ثابت می‌ماند. بنابراین، منحنی به هرگونه‌ای‌که انتخاب شده باشد، انتگرال (۲۲) متناظر باآن، باید برابر صفر شود.

به‌این‌ترتیب، اگر u و v، مؤلفه‌های سرعت درصفحه‌ای باشدکه مایع تراکم‌ناپذیر در آن جریان دارد، درصورت فقدان «سرچشمه» و «زیرآب»، برای هر منحنی بستهٔ دلخواه (K)، داریم:

$$\int_{(K)} v\,dx - u\,dy = 0$$

بعداً [در ۲،۵۶۶)] خواهیم دیدکه، به‌کمك این‌نتیجه و برخی ملاحظه‌های‌فیزیکی، می‌توان مشخصه‌ای تحلیلی از تابع‌های u و v را به‌دست‌آورد.

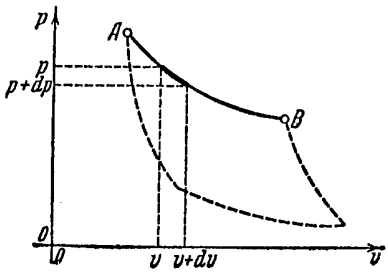
۳) گرمایی‌که گاز جذب می‌کند. جرمی، و مثلا یك مول (مولکول‌گرم) گاز را، در نظر می‌گیریم. موقعیت‌گاز با سه‌مقدار مشخص می‌شود: حجم V، فشار p ودمای مطلق T آن. اگرگاز را ایده‌آل فرض کنیم، آن وقت، این سه مقدار، با معادلهٔ کلاپیرون، به هم مربوط می‌شوند:

$$pV = RT$$

که درآن، R، مقدار ثابتی است. به‌این ترتیب، هرکدام از مقدارهای p، V و T را می‌توان برحسب دوتای دیگر بیان‌کرد. به‌همین مناسبت، برای تعیین وضع‌گاز، کافی است به دومقدار ازاین سه مقدار دسترسی داشته باشیم. فرض‌کنیم، این دو مقدار مفروض، V و p باشد، آن وقت، نقطهٔ به‌طول V وعرض p، معرف وضع‌گاز است. اگر موقعیت‌گاز، از وضع اولیهٔ نظیر نقطهٔ A تا وضع نهائی نظیر نقطهٔ B، تغییرکند، آن وقت، کل فرایند تغییر، به وسیلهٔ منحنی $(K)\equiv(AB)$ معین می‌شود، که ازموقعیت‌های متوالی متغیر به‌دست

آمده است*.

اکنون این مسأله را مطرح می‌کنیم که: جرم گاز مفروض، درمدت تمامی‌این فرایند، که به وسیلهٔ منحنی (K) مشخص‌می‌شود، چه مقدار گرمای U (کالری) جذب می‌کند؟ برای این‌منظور، طبق‌معمول، عنصر «بی‌نهایت‌کوچك» ازاین‌فرایند را درنظر می‌گیریم که گاز را از وضع (V, p, T) به وضع بی‌نهایت نزدیك به آن $(V+dV, p+dp, T+dT)$ در می‌آورد. این عنصر با عنصر منحنی (K) متناظر است (شکل ۱۷). قبلا هم دربارهٔ عنصر گرمای dU اشاره‌ای داشته‌ایم [ضمن نتیجه‌گیری دستور پواسون، ۳۶۱، ۳)]. از همان دستوری که درآن‌جا پیدا کردیم، استفاده می‌کنیم:



شکل ۱۷

$$dU=\frac{c_v}{R}V\,dp+\frac{c_p}{R}p\,dV$$

برای پیدا کردن مقدار کلی گرمای U، که در تمامی‌جریان فرایند به گاز داده می‌شود (و به وسیلهٔ منحنی (K) مشخص شده است)، باید عنصرهای dU را، درطول این منحنی، باهم جمع کنیم:

$$U=\int_{(K)}\frac{c_v}{R}V\,dp+\frac{c_p}{R}p\,dV \qquad (۲۳)$$

بنابراین، مقدار گرمای U، مستقیماً، با انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم بیان می‌شود.

اگرنمو dU ازگرما را، به جای dV و dp، برحسب dV و dT ویا برحسب dp و dT بیان می‌کردیم، کار بازهم منجر به انتگرال منحنی‌الخط می‌شد، منتهی لازم بود انتگرال را، به ترتیب، برروی منحنی واقع درصفحهٔ VT یا pT بگیریم.

۴) تأثیر جریان برق بر مغناطیس. قانون بیو و ساوار، اثر برق برمغناطیس را به شکل «دیفرانسیلی» بیان می‌کند. طبق این‌قانون، عنصر ds هادی ــ که برق باشدت‌جریان I ازآن می‌گذرد ــ بر «جرم‌مغناطیسی» m، که به فاصلهٔ r ازآن قراردارد، با نیرویی‌اثر می‌کند که، مقدار آن، برابر است با:

---

*) چه دراین‌جا وچه بعد از این، به روندهای به اصطلاح شبه ایستی توجه داریم، یعنی فرض می‌کنیم که، تغییر موقعیت گاز، چنان آرام باشد و تغییر مکان‌آن چنان خوب انجام گیرد که، تمامی جرم‌گاز، به‌طور هم زمان، ازتمامی موقعیت‌های بینابینی، عبورکند.

$$\frac{Im\sin\varphi ds}{r^2} \qquad (۲۴)$$

که در آن، $\varphi(0<\varphi<\pi)$ عبارت است از زاویهٔ بین بردار $\vec{r}$. که قطب مغناطیسی‌را به عنصر جریان برق وصل می‌کند و در جهت جریان برق قرار دارد ـ با عنصر $\vec{ds}$ هادی ـ امتداد این نیروی جزئی برصفحه‌ای عمود است که با بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{ds}$ مشخص می‌شود ودر جهتی‌قرار داردکه، درآن، بتوان از $\vec{r}$ به $\vec{ds}$ بادوران به اندازهٔ φ و درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت رسید [با ۳۵۶، ۸) مقایسه کنید].

می‌خواهیم میدان مغناطیسی جریان برق را،که از هادی محدود وبستهٔ (K) می‌گذرد، برای شکلی دلخواه‌هادی و وضع دلخواه آن درفضا، مشخص‌کنیم. به زبان دیگر، می‌خواهیم نیروئی را تعیین‌کنیم‌که، باآن، تمامی این هادی، بر «جرم مغناطیسی» m،که در نقطهٔ دلخواه M ازفضا قرار دارد، اثر می‌کند. به دست‌آوردن قانون بیو و ساوار به صورت «انتگرالی» دشوار است، زیرا نیروهای جزئی جداگانه، که دربارهٔ‌آن‌ها صحبت کردیم، در جهت‌های مختلف قراردارند و بایدآن‌ها را، به‌طریق هندسی، باهم‌جمع‌کرد.

درچنین موردهایی، معمولا، ازتصویرهای بردارها بر محورهای یك‌دستگاه‌مختصات قائم فضایی استفاده می‌کنند، زیرا تصویرهای نیروهای جزئی‌را، می‌توان به‌صورت جبری باهم جمع‌کرد.

برای سهولت کار درامر جمع کردن، از روش‌های جبر برداری استفاده می‌کنیم.

اگر عبارت (۲۴) را، برای مقدار نیروی جزئی $\vec{dF}$، به صورت

$$\frac{mI}{r^3}\cdot r ds\sin\varphi$$

بنویسیم، درآن صورت، به سادگی دیده می‌شودکه، تنها در ضریب $\frac{mI}{r^3}$ با مقدار حاصل ازضرب برداری $\vec{r}\times\vec{ds}$ فرق دارد، زیرا جهت $\vec{dF}$ هم،که با قانون بیو و ساوار معین می‌شود، باجهت این حاصل‌ضرب یکی است. در نتیجه، می‌توان نوشت:

$$\vec{dF}=\frac{mI}{r^3}(\vec{r}\times\vec{ds})$$

اکنون، دستگاه مختصات قائم $Oxyz$ را در نظر می‌گیریم. اگر مختصات (نقطهٔ ابتدای) عنصر ds را x، y، z و مختصات نقطهٔ فضایی مورد نظر M را ξ، η، ζ بنامیم،

تصویرهای بردار $\overrightarrow{r}$، برمحورها، چنین می‌شود:

$$x-\xi,\ y-\eta,\ z-\zeta$$

و تصویرهای بردار $\overrightarrow{ds}$

$$dx,\ dy,\ dz$$

دراین صورت، تصویرهای $\overrightarrow{dF}$ عبارتند از حاصل‌ضرب $\frac{mI}{r^3}$، به ترتیب، در

$$(y-\eta)dz-(z-\zeta)dy,\ (z-\zeta)dx-(x-\xi)dz,$$
$$(x-\xi)dy-(y-\eta)dx$$

به این ترتیب، باجمع همهٔ جزءهای منحنی (K)، عبارت‌های مربوط به تصویرهای $\overrightarrow{F}$ مورد نظر، با محورها، به صورت انتگرال‌های منحنی‌الخط، برروی منحنی فضایی (K)، به دست می‌آیند:

$$F_x=mI\int_{(K)}\frac{(y-\eta)dz-(z-\zeta)dy}{r^3},$$

$$F_y=mI\int_{(K)}\frac{(z-\zeta)dx-(x-\xi)dz}{r^3}$$

$$F_z=mI\int_{(K)}\frac{(x-\xi)dy-(y-\eta)dx}{r^3}$$

ضمناً جهت روی منحنی، باجهت جریان برق تعیین می‌شود؛ وهمین، حل مسأله را به‌دست می‌دهد.

§۳. شرط‌های استقلال انتگرال منحنی‌الخط نسبت به مسیر

۵۵۵. طرح مسأله؛ ارتباط با مسألهٔ مربوط به دیفرانسیل کامل. دو تابع پیوستهٔ زیر، دریك حوزهٔ همبند (D) داده شده است:

$$P=P(x,y),\quad Q=Q(x,y)$$

انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم

$$\int_{(AB)} P\,dx+Q\,dy \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن، A و B، دو نقطه از حوزهٔ (D) و (AB) یك منحنی (AB) قطعه به‌قطعه هموار* دلخواه است که دو نقطهٔ A و B را به‌هم وصل می‌کند و به تمامی در این حوزه واقع است.

مسألهٔ اصلی این بند، عبارت است از پیدا کردن شرط‌هایی که، به ازای آن‌ها، این انتگرال، بستگی به شکل مسیر (AB) نداشته باشد: یعنی مقدار این انتگرال، به صورت یك ارزشی، با در دست داشتن نقطه‌های A و B، معین شود.

رفتار انتگرال (۱) را، می‌توان با ویژگی‌های عبارت دیفرانسیلی

$$P\,dx+Q\,dy \qquad (۲)$$

واقع در زیر علامت انتگرال، مشخص کرد. یادآوری می‌کنیم که، قبلا هم، با عبارتی از این گونه سروکار داشته‌ایم: وقتی که دربارهٔ مشتق‌پذیری تابع $F(x,y)$ نسبت به دو متغیر، و دیفرانسیل کامل آن [۱۷۹]

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy \qquad (۳)$$

صحبت می‌کردیم. اگر در عبارت (۳) فرض کنیم:

$$P=\frac{\partial F}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial F}{\partial y}$$

آن وقت، با عبارت (۲) متحد می‌شود.

ولی، هر عبارت به صورت (۲)، دیفرانسیل کامل نیست، یعنی برای هر عبارتی به این صورت، «تابع اولیهٔ» $F(x,y)$ وجود ندارد که دیفرانسیل کامل آن به صورت (۲) درآید. از همین‌جا معلوم می‌شود که انتگرال (۱)، درست در حالت‌هایی به مسیر انتگرال‌گیری بستگی ندارد که، عبارت زیر انتگرال، دیفرانسیل کامل باشد. این حکم اساسی و مهم را، به‌صورت قضیه‌ای بیان می‌کنیم که، اثبات آن، در دو شمارهٔ نزدیك، روشن خواهد شد.

---

*) در این بند، به این گونه مسیرهای انتگرال‌گیری اکتفا می‌کنیم؛ به این ترتیب، وجود انتگرال (۱)، خود به خود، تأمین است.

قضیهٔ ۱. برای آن‌که انتگرال منحنی‌الخط (۱)، بستگی به‌شکل مسیر انتگرال‌گیری نداشته باشد، لازم و کافی است که عبارت دیفرانسیلی (۲)، در حوزهٔ مورد بررسی، برابر با دیفرانسیل یك تابع (یك ارزشی*) با دو متغیر باشد.

۵۵۶. مشتق‌گیری انتگرالی که به مسیر خود بستگی ندارد. ابتدا فرض می‌کنیم، انتگرال (۱)، بستگی به مسیر نداشته باشد. دراین‌حالت، انتگرال، به‌طور یك ارزشی، با مفروض بودن نقطه‌های $A(x_0, y_0)$ و $B(x_1, y_1)$ معین می‌شود؛ که در ارتباط با آن، انتگرال را به‌صورت

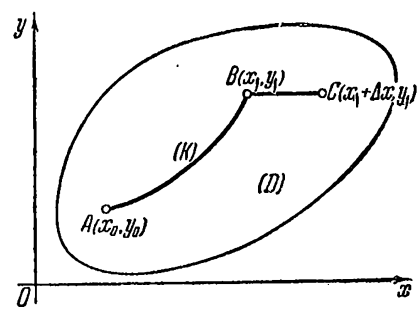
$$\int_A^B P dx + Q dy \quad \text{یا} \quad \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P dx + Q dy$$

نشان می‌دهند. دراین‌جا، تنها ابتدا و انتهای مسیر انتگرال‌گیری مشخص شده است و از خود مسیر، اطلاعی در دست نداریم؛ ولی این مسیر برای ما بی‌تفاوت است و می‌توانیم آن را، نسبت به هرمسیر دلخواهی، درنظر بگیریم. البته، بدون فرض مستقل‌بودن انتگرال از مسیر انتگرال‌گیری، این‌نوع نام‌گذاری بی‌معنا می‌شود.

اگر نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ را ثابت و، به‌جای نقطهٔ B، نقطهٔ دلخواه $M(x, y)$ از حوزهٔ (D) را درنظر بگیریم، آن وقت، انتگرال حاصل، تابعی از نقطهٔ M، یعنی تابعی از مختصات x و y آن، در حوزهٔ (D) خواهد شد:

$$F(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P dx + Q dy \qquad (۴)$$

اکنون، به مسألهٔ مربوط به مشتق‌های نسبی آن، چه نسبت به x و چه نسبت به y، می‌پردازیم.



شکل ۱۸

نقطهٔ غیرمشخص $B(x_1, y_1)$ را در حوزهٔ (D) انتخاب می‌کنیم. به x_1 نمو Δx را می‌دهیم، به‌نقطهٔ $C(x_1+\Delta x, y_1)$ می‌رسیم که، به ازای Δx به قدر کافی کوچك، همراه با تمامی پاره خط BC، متعلق به (D) است (شکل ۱۸). مقدارهای نظیر تابع، چنین‌اند:

*) بعداً [۵۶۲]، لزوم یك ارزشی‌بودن تابع اولیه، برای خواننده روشن می‌شود.

$$F(x_1, y_1)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\,dx+Q\,dy$$

$$F(x_1+\Delta x, y_1)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} P\,dx+Q\,dy$$

انتگرال اول را برروی منحنی دلخواه (K) ـ که نقطه‌های A و B را به‌هم می‌پیوندد ـ در نظر می‌گیریم و، برای انتگرال دوم، مسیر انتگرال‌گیری را شامل همین منحنی (K) وپاره خط BC می‌گیریم. به‌این ترتیب، نمو تابع F، چنین می‌شود:

$$F(x_1+\Delta x, y_1)-F(x, y)=\int_{(BC)} P\,dx+Q\,dy=\int_{(BC)} P(x, y)\,dx$$

انتگرال شامل $Q\,dy$ صفر می‌شود، زیرا پاره خط BC، عمود برمحور y است.

انتگرال باقی‌مانده، مستقیماً، منجر به انتگرال معین‌معمولی می‌شود: برای‌این‌منظور، باید درتابع زیر انتگرال، y را به y_1 تبدیل کرد (از معادلهٔ $y=y_1$ خط راست BC) و، برای مرزهای انتگرال‌گیری، طول‌های نقطه‌های B و C را اختیارکرد. سرانجام به دست می‌آید:

$$F(x_1+\Delta x, y_1)-F(x_1, y_1)=(R)\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} P(x, y_1)\,dx$$

اگر از قضیهٔ میانگین دربارهٔ انتگرال عادی حاصل استفاده‌کنیم و دوطرف برابری را بر Δx تقسیم‌کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{F(x_1+\Delta x, y_1)-F(x_1, y_1)}{\Delta x}=P(x_1+\theta\Delta x, y_1) \qquad (0<\theta<1)$$

اکنون Δx را به سمت صفر میل می‌دهیم. باتوجه به‌پیوستگی تابع $P(x, y)$، سمت‌راست برابری و، همراه باآن، سمت چپ، به سمت $P(x, y)$ میل می‌کند. در نتیجه، در نقطهٔ (x_1, y_1)، مشتق نسبی تابع F نسبت به x وجود دارد و با برابری زیرنشان داده می‌شود:

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x}=P(x_1, y_1)$$

با همین روش، می‌توان دستور زیررا هم به‌دست‌آورد:

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y} = Q(x_1, y_1)$$

از آن‌جا که نقطهٔ (x_1, y_1)، به‌اختیار، از حوزهٔ (D) انتخاب شده است، بنابراین، برای همهٔ نقطه‌های این حوزه، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

چون، این مشتق‌های نسبی، پیوسته‌اند، تابع $F(x, y)$ دارای دیفرانسیل

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$$

خواهد بود که برعبارت زیر انتگرال، برای انتگرال (۱)، منطبق است [۱۷۹]*.

به این ترتیب، برای انتگرال منحنی‌الخطی که بستگی به مسیر ندارد، توانستیم نتیجه‌ای کاملا مشابه قضیهٔ مربوط به مشتق‌گیری از انتگرال معین‌عادی، نسبت به‌مرز بالایی متغیر، به‌دست آوریم [۳۰۵، ۱۲°].

درضمن، شرط لازم قضیه‌ای که در شمارهٔ پیش‌آوردیم، ثابت شد. اگر انتگرال (۱)، بستگی به مسیر نداشته باشد، درآن صورت، عبارت (۲)، به واقع، یك دیفرانسیل کامل خواهد بود: خود انتگرال (۴) هم، باتوجه به شرط‌های مفروض، به‌طور یك ارزشی، تابع اولیه‌ای برای عبارت زیر انتگرال به‌دست می‌دهد.

۵۵۷. محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط برحسب تابع اولیه. اکنون به‌حالت عکس می‌پردازیم وفرض می‌کنیم، عبارت (۲)، دیفرانسیل کامل ازیك تابع یك ارزشی $\Phi(x, y)$ باشد، به نحوی که

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad (۵)$$

یك منحنی قطعه به قطعه هموار (K) را در نظر می‌گیریم که دو نقطهٔ مفروض‌را به‌هم وصل می‌کند: A به مختصات x_A، y_A و B به مختصات x_B، y_B. نمایش پارامتری این منحنی را، این‌طور می‌گیریم:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

وفرض می‌کنیم که، با تغییر پارامتر از α تا β، منحنی درجهت از A به B پیموده شود. به

---

*) از همین‌جا، پیوستگی خود تابع $F(x, y)$، نسبت به هردو متغیر هم، نتیجه می‌شود.

این ترتیب

$$\varphi(\alpha)=x_A,\ \psi(\alpha)=y_A;\ \varphi(\beta)=x_B,\ \psi(\beta)=y_B$$

با محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط در طول منحنی (K)، از راه تبدیل آن به انتگرال عادی [از روی دستور (۶) شمارهٔ ۵۴۷]، به‌دست می‌آید:

$$I=\int_{(K)} P\,dx+Q\,dy=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\,dt$$

ویا، با توجه به (۵) و از روی قاعده مشتق‌گیری تابع مرکب

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\varphi'(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\psi'(t)\right]dt=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d}{dt}\Phi(\varphi(t),\psi(t))\,dt$$

و سرانجام

$$I=\Phi(\varphi(t),\psi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta}=\Phi(\varphi(\beta),\psi(\beta))-\Phi(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))=$$

$$=\Phi(x_B,y_B)-\Phi(x_A,y_A)$$

به این ترتیب، به شرط وجود تابع اولیهٔ

$$\Phi(M)=\Phi(x,y)$$

می‌توان انتگرال منحنی‌الخط را از روی دستور سادهٔ زیرمحاسبه‌کرد:

$$\int_{(AB)} P\,dx+Q\,dy=\Phi(x_B,y_B)-\Phi(x_A,y_A)=$$

$$=\Phi(x,y)\Big|_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} \qquad (۶)$$

ویا کوتاه‌تر

$$\int_{(AB)} P\,dx+Q\,dy=\Phi(B)-\Phi(A)=\Phi(M)\Big|_{\alpha}^{\beta} \qquad (۶^*)$$

این‌دستور، کاملا شبیه دستور بنیادی حساب انتگرال است [۳۰۸]، که انتگرال معین‌عادی را برحسب تابع اولیه بیان می‌کرد. ولی دوباره تأکید کنیم که از این دستور، تنها وقتی می‌توان استفاده کرد که، عبارت زیر انتگرال، دیفرانسیل کامل باشد.

این دستور، ضمناً، نشان می‌دهد که: انتگرال (۱)، بستگی به انتخاب منحنی AB ندارد* که، به‌این ترتیب، کافی بودن شرط قضیهٔ شمارهٔ **۵۵۵** هم ثابت می‌شود؛ یعنی، قضیه مذکور، به‌طور کامل ثابت شد.

۵۵۸. معیار دیفرانسیل کامل و پیدا کردن تابع اولیه در حالت حوزهٔ راست‌گوشه. اکنون، به‌طور طبیعی، این پرسش پیش می‌آید که: از روی چه نشانه‌ای می‌توان روشن کرد که عبارت دیفرانسیلی (۲)، دیفرانسیل کامل هست یا نه؟ پاسخ به‌این پرسش، ضمناً، شرط بستگی نداشتن انتگرال منحنی‌الخط به مسیر را هم، روشن خواهد کرد.

برای این‌که بتوانیم به‌شکل ساده و راحتی‌ازمعیار، برای تحقیق برسیم، ازاین به‌بعد فرض خواهیم کرد که، هر دو مشتق نسبی $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ هم، در حوزهٔ (D)، وجود داشته و پیوسته باشند.

بااین فرض، معیار مورد نظر، بلافاصله به‌دست می‌آید. اگرعبارت (۲)، دیفرانسیل تابعی مثل $\Phi(x, y)$ باشد، به‌نحوی که برابری‌های (۵) برقرار باشند.

$$P=\frac{\partial \Phi}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

فرض پیوستگی مشتق‌های نسبی $\frac{\partial P}{\partial x}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$، برابر بودن این دو مشتق مختلط را تضمین می‌کند [**۱۹۰**]، بنابراین

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (A)$$

این رابطه، که به خاطر سادگی خود اهمیت دارد، شرط لازم را، برای آن که عبارت

---

*) زیرا، با توجه به یک ارزشی بودن تابع Φ، مقدارهای $\Phi(A)$ و $\Phi(B)$، با مفروض بودن نقطه‌های A و B، کاملا معین می‌شوند.

(۲) دیفرانسیل کامل باشد، تأمین می‌کند.

برای این‌که کافی بودن شرط (A) را بررسی کنیم، ابتدا به حالتی می‌پردازیم که حوزهٔ (D)، یك مستطیل باشد؛ و برای مشخص بودن وضع، آن را، مستطیل متناهی و بستهٔ $[a, b; c, d]$ درنظر می‌گیریم. فرض را براین می‌گیریم که شرط (A) برقرار است و مستقیماً برای این حالت، ساختمان تابع اولیه را به دست می‌آوریم.

مسأله عبارت ازاین است که، تابع $\Phi(x, y)$ را در مستطیل $[a, b; c, d]$ طوری تشکیل دهیم که در دو معادلهٔ زیر صدق کند:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y) \qquad (5^*)$$

درواقع، با توجه به پیوستگی تابع‌های P و Q، می‌توان ازاین‌جا نتیجه گرفت که، عبارت (۲)، برای تابع‌های مذکور، دیفرانسیل کامل است [۱۷۹].

مقدارهای دلخواه x_0 و x را از $[a, b]$ انتخاب می‌کنیم و از معادلهٔ اول (5^*)، نسبت به x، از x_0 تا x و به ازای مقدار ثابت دلخواه y از $[c, d]$؛ به‌دست می‌آید:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \Phi(x_0, y)$$

اکنون اگر درمعادلهٔ دوم (5^*)، $x = x_0$ بگیریم و از آن، نسبت به y، بین مقدارهای y_0 و y از $[c, d]$، انتگرال بگیریم، به دست می‌آید:

$$\Phi(x_0, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + \Phi(x_0, y_0)$$

به‌این ترتیب، تابع مطلوب $\Phi(x, y)$، به‌این صورت در می‌آید:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C \qquad (7)$$

که در آن: $C = \Phi(x_0, y_0) = \text{const}$.

حالا باید تحقیق کرد که: آیا تابعی که با دستور (۷) معین‌شده است (به‌ازای ثابت دلخواه C)، واقعاً در هر دو معادلهٔ (5^*) صدق می‌کند یا نه؟ مطلب در مورد معادلهٔ اول روشن است، زیرا مشتق جملهٔ اول سمت راست (۷)، نسبت به x، برابر است با $P(x, y)$ [۳۰۵] و دو جملهٔ بعدی هم بستگی به x ندارند. اکنون، از برابری (۷)، نسبت به y مشتق می‌گیریم، ضمناً، در مورد انتگرال اول سمت راست، ازقاعدهٔ لایب نیتس [۵۰۷]

استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}dx+Q(x_0, y)$$

که می‌توان، با توجه به (A)، به‌جای $\frac{\partial P}{\partial y}$، قرار داد $\frac{\partial Q}{\partial x}$؛ آن وقت، انتگرال منجر به تفاضل $Q(x, y)-Q(x_0, y)$ می‌شود و مشتق $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$، به‌طور ساده، برابر می‌شود با $Q(x, y)$.

یادآوری می‌کنیم که، اگر انتگرال‌گیری را نسبت به y آغاز می‌کردیم، برای تابع اولیه به چنین عبارتی می‌رسیدیم:

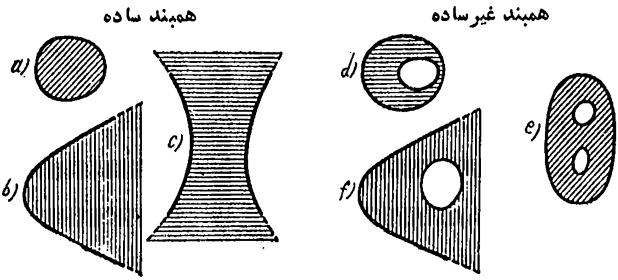
$$Q(x, y)=\int_{x_0}^{x}P(x, y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x, y)dy+C \qquad (۸)$$

که تنها از نظر شکل، با رابطهٔ قبلی اختلاف دارد.

توجه به‌این نکته سودمند است که، اگر مقدار تابع اولیه را در نقطه‌ای از حوزه تثبیت کنیم، می‌توانیم خود مقدار ثابت را، درعبارت کلی تابع اولیه، به‌دست آوریم و، در نتیجه، به‌تابع اولیه‌ای کاملا معین و یك ارزشی برسیم.

۵۵۹. تعمیم مطلب برای حالت حوزهٔ غیرمشخص. اکنون به‌حوزهٔ غیرمشخص (D) (و البته، همبند) می‌پردازیم که محدود به‌یك یا چند منحنی هموار، ضمناً متناهی یا گسترده تا بی‌نهایت، باشد. این حوزه را، ازاین به بعد، بازفرض می‌کنیم. درچنین‌حالتی، هرنقطهٔ متعلق به حوزه، درونی است [۱۶۳] و دارای یك همسایگی مستطیلی می‌باشد. از آن جاکه برای هرهمسایگی مستطیلی، می‌توان ازبحث شمارهٔ پیش استفاده کرد، بنابراین، با برقراربودن شرط (A)، در همسایگی هرنقطهٔ حوزهٔ (D)، تابع اولیه وحتی مجموعه‌ای نامتناهی ازتابع‌های اولیه، برای عبارت (۲)، وجود خواهد داشت، که تفاوت هرکدام‌با دیگری، در یك مقدار ثابت است. ولی به نظر می‌رسدکه سازگاری همهٔ این تابع‌های اولیه، به نحوی‌که برای تمامی حوزهٔ (D)، یك تابع اولیهٔ یك ارزشی به‌دست‌آید،همیشه ممکن نیست. مسأله، به خصلت خود حوزه مربوط می‌شود.

برای تأمین وجود چنین تابع اولیهٔ یك ارزشی درحالت کلی، باید دربارهٔ حوزهٔ (D) محدودیت خاصی‌قایل شد. این‌محدودیت را می‌توان، این‌طور بیان‌کرد: دورهٔ بستهٔ سادهٔ واقع در حوزهٔ (D) هرطورکه انتخاب شده باشد، باید چنان باشد که، اگر حوزه‌ای را در نظر بگیریم‌که از بیرون به این دوره محدود شود، تمامی آن به‌حوزهٔ (D) تعلق داشته باشد. به زبان دیگر، حوزه نباید دارای «حفره»، حتی به‌صورت نقطه‌ای، باشد. حوزهٔ همبندی راکه دارای این ویژگی باشد، همبند ساده گویند.



شکل ۱۹

درحالتی که صحبت بر سر یك حوزهٔ متناهی باشد (یعنی تا بی‌نهایت ادامه نداشته باشد)، می‌توان مفهوم همبندی ساده را، به‌صورتی بهتر تنظیم کرد: حوزه باید محدود به‌یك دورهٔ بسته منحصر به فرد باشد. در شکل ۱۹، نمونه‌هایی از حوزه‌های همبند ساده و همبند غیرساده داده‌شده است که، ازمیان آن‌ها، a)، d) و e) متناهی و b)، c) و f) نامتناهی‌اند.

حوزهٔ مورد نظر (D) را همبند ساده می‌گیریم؛ ابتدا آن را متناهی فرض می‌کنیم، به نحوی که به‌طور ساده، به وسیلهٔ یك منحنی هموار منحصر به فرد (K) محصور شده باشد. با آغاز از حوزه‌های واقع در (D)، که به وسیلهٔ مستطیل‌هایی از هم جدا شده‌اند، به تدریج، تابع اولیه را برای حوزهٔ (D) می‌سازیم.

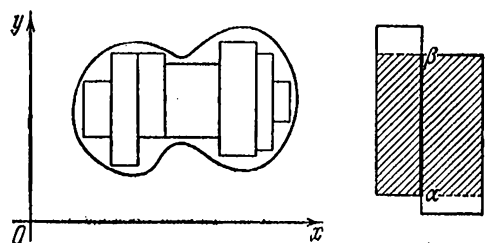
با انتخاب عدد به‌قدر دلخواه کوچك ε، می‌توانیم هر نقطهٔ M از دورهٔ (K) را با مربعی به‌ضلع کوچکتر از ε محصور کنیم، به نحوی که، در محدودهٔ آن، بتوان دوره را بایکی از دونوع معادلهٔ صریح بیان کرد [با **۲۲۳** مقایسه کنید]. تنها درنقطهٔ زاویه‌ای، محل برخورد دوتا ازاین گونه منحنی‌ها را خواهیم داشت.

بنا برپیش‌قضیهٔ بورل [**۱۷۵**]، می‌توان باحفظ تعدادی متناهی‌ازاین مربع‌ها، تمامی دورهٔ (K) را با آن‌ها پوشاند. به وسیلهٔ این زنجیرهٔ محدود مربع‌ها، حوزهٔ بسته‌ای مثل $(\widetilde{D})$ ازبیرون محدود می‌شود، به‌نحوی که تمامی $(\widetilde{D})$ در (D) واقع است و به صورت روشنی، به مستطیل‌ها تجزیه شده است. این حوزه همبند است* و، در این صورت، همراه با (D)، همبند ساده می‌شود؛ ضمناً، همهٔ نقطه‌هایی از حوزهٔ (D)، که به فاصله‌ای بزرگتر یا مساوی ε از دوره قرار دارند، متعلق به‌آن خواهند بود.

---

*) اگر دو نقطهٔ M_0 و M_1 به $(\widetilde{D})$ تعلق داشته باشند، می‌توان آن‌ها را با خط شکستهٔ (L)، که به طورکامل در (D) قراردارد، به‌هم وصل کرد [**۱۶۳**]. این‌خط شکسته، درحالت کلی، می‌تواند با قرارگرفتن دردرون مربع‌های نامبرده، ازمحدودهٔ $(\widetilde{D})$ خارج شود. ولی‌همیشه می‌توان، بخشی‌ازاین خط‌شکسته را، که در درون مربع‌ها واقع‌است، با بخش نظیرحاشیه‌ای آن‌ها عوض کرد. با این‌روش، خط شکستهٔ (L) که دو نقطهٔ M_0 و M_1 را به هم می‌پیوندد، به‌طورکامل، در (D) واقع می‌شود.

ببینیم که، تابع اولیه برای حوزهٔ (D)، چگونه ساخته خواهد شد. برای آن‌که با تابعی معین سروکار داشته باشیم، مقدار آن را در نقطهٔ M_0 متعلق بـه (D) تثبیت می‌کنیم. توجه کنیم که: اگر دو تابع اولیه، برای دو حـوزهٔ واقع بر روی هم، تعیین شده باشند، در بخش مشترک این دو حوزه، تنها در مقدار ثابتی می‌توانند با هم فرق داشته باشند (زیرا مشتق نسبی تفاضل آن‌ها، برابر صفراست؛ ۱۸۳). در نتیجه، اگراین تابع‌های اولیه، حتی دریك نقطه منطبق باشند، در آن صورت، در تمامی بخش مشترك، متحـد خواهند بود. از همین‌جا روشن می‌شودکه، اگرع را به سمت صفرمیل دهیم، درواقع می‌توانیم، تابع اولیهٔ را به تدریج برهمهٔ حوزهٔ (D)، با حفظ یك‌ارزشی‌بودن آن، گسترش دهیم.



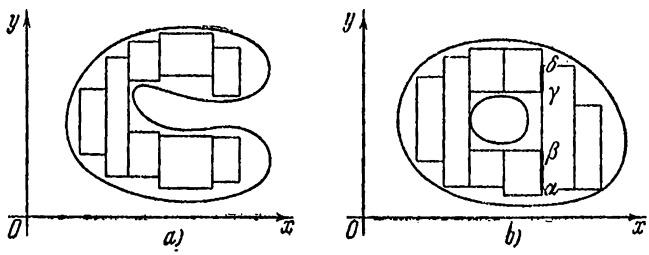
شکل ۲۰

برای آن‌که تابع اولیه را، برای‌حوزهٔ $(\widetilde{D})$ بسازیم، حوزه‌را تجزیه شده به‌مستطیل‌هایی درنظر می‌گیریم که در قطعه‌های قائم، یکی پهلوی دیگری، واقع شده باشند (شکل ۲۰–a). دو مستطیل هم جوار d_1 و d_2، از این گـونه، در شکل ۲۰–b نشان داده شده است. درهرکدام ازآن‌ها، می‌توانیم تابع اولیه‌ها را بسازیم‌که آن‌ها را، Φ_1 و Φ_2 می‌گیریم. این دوتابع اولیه، در طول پاره خط $\alpha\beta$، که برای مستطیل‌های d_1 و d_2 مشترك است، تنها می‌توانند، در مقدار ثابتی با هم اختلاف داشته باشند. این مطلب وقتی روشن می‌شودکه توجه کنیم، هریك ازآن‌ها، درطول $\alpha\beta$، تنها به‌وسیلهٔ جملهٔ ثابتی باتابع‌اولیه‌ای که‌برای مستطیل هاشورخورده ساخته شده است (وبنا برشمارهٔ پیش، وجوددارد) اختلاف پیدا می‌کند. بنابراین، با تغییر یکی از تابع‌های اولیهٔ Φ_1 یا Φ_2 به انـدازهٔ مقدار ثابت مناسبی، می‌توان به انطباق آن‌ها، در طول $\alpha\beta$، توفیق یافت.

ساختن تابع اولیه را از مستطیلی آغاز می‌کنیم‌که، نقطهٔ M_0، درآن‌جا قرار داشته باشد. بعد، تابع اولیه برای مستطیل مجاور آن را، چنان می‌سازیم کـه، با عبور از مرز مشترك آن‌ها، پیوستگی ازبین نرود و غیره.

اکنون ببینم‌که شرط همبندی سادهٔ حوزهٔ (D)، و همراه باآن $(\widetilde{D})$، از چه چیزی

صحبت می‌کند. رشته مستطیل‌های شکل ۲۰–a، در حالت پیچیده‌تر بودن دورهٔ (K)، می‌تواند به‌صورت شکل ۲۱–a درآید: این وضع، نمی‌تواند برای گسترش پیوستهٔ تابع اولیه، درطول شاخه‌های جدا ازهم، مانعی ایجاد کند. ولی اگر حوزه، دارای «حفره» باشد (شکل ۲۱–b را ببینید) و دوشاخه دوباره به‌هم وصل شوند، آن وقت، برای مستطیل اول، ممکن است انتخاب تابع اولیه، با حفظ پیوستگی عبور به هر دو محل اتصال $\alpha\beta$ و $\gamma\delta$، ناممکن شود.



شکل ۲۱

برای حالتی که حوزهٔ (D) نامتناهی باشد، می‌توان به طریق مشابهی، با آغاز از زیرحوزه‌های متناهی و با گسترش تدریجی تابع اولیه، بر تمامی حوزهٔ (D)، عمل کرد.

۵۶۰. نتیجه‌های نهائی. همهٔ آن چه را که در دوشمارهٔ پیش گفته‌ایم، می‌توان به صورت گزارهٔ زیر، جمع‌بندی کرد:

قضیهٔ ۲. برای آن که، عبارت (۲)، بتواند در تمامی حوزهٔ (D)، دیفرانسیل تابعی یك ارزشی بادو متغیر باشد، لازم و، باشرط همبندی سادهٔ حوزهٔ (D)، کافی است که شرط (A) برقرار باشد.

به‌همین مناسبت، شرط (A) را، اغلب، «شرط انتگرال‌پذیری» عبارت (۲) می‌نامند.

اگر قضیهٔ ۱ را به‌یاد بیاوریم، نتیجهٔ زیرهم، مستقیماً، به دست می‌آید:

قضیهٔ ۳. برای آن که انتگرال منحنی‌الخط (۱)، که در جایی از حوزهٔ (D)، در مسیری با دو انتهای A و B گرفته می‌شود، به شکل این‌مسیر بستگی نداشته باشد، لازم و، باشرط همبندی سادهٔ حوزهٔ (D)، کافی است که شرط (A) برقرار باشد.

به‌این ترتیب، شرط (A)، همان‌معیاری است که، به‌کمك آن، می‌توان بستگی نداشتن انتگرال منحنی‌الخط را به مسیر خود، مورد تحقیق قرار داد. به‌یاری این‌معیار، مثلا می‌توان به‌سادگی انتگرال‌هایی را که درمسأله‌های ۳)، ۴)، ۵) و ۶) ازشمارهٔ **۵۴۹** داشتیم، طبقه‌بندی کرد و ویژگی‌های آن‌ها را، که در یادداشت‌ها آوردیم، پیش‌بینی نمود.

درزیر، ازکاربردهای مهم نتیجه‌های حاصل، صحبت خواهیم کرد. دربارهٔ حالتی که با حوزه‌های همبند غیرساده سروکار داشته باشیم، در شمارهٔ **۵۶۲** بحث خواهیم کرد.

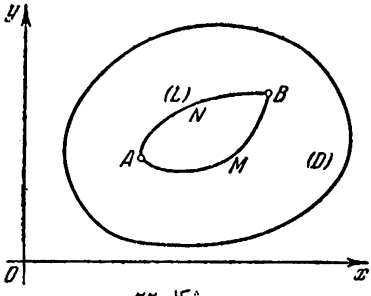
۵۶۱. انتگرال نسبت به دورهٔ بسته. تا این‌جا، دربارهٔ انتگرال منحنی‌الخط (۱)

$$\int_{(AB)} Pdx+Qdy$$

بحث کردیم و با طبقهٔ مهمی از آن آشنا شدیم که مستقل از مسیر انتگرال‌گیری بود. اکنون به بررسی انتگرال

$$\int_{(L)} Pdx+Qdy \qquad (۹)$$

می‌پردازیم که در دورهٔ بستهٔ سادهٔ (L) ــ در محدودهٔ حوزهٔ (D) ــ گرفته می‌شود و این پرسش را مطرح می‌کنیم که: با چه شرطهایی، این انتگرال، همیشه برابر صفر می‌شود؟ معلوم است که، این مسأله، کاملا هم‌ارز مسألهٔ قبلی است: اگر، برای عبارت دیفرانسیلی مفروض(۲)، انتگرال (۱) بستگی به‌مسیر انتگرال‌گیری نداشته باشد، آن وقت، انتگرال (۹)، همیشه برابر صفر خواهد بود و برعکس.



شکل ۲۲

ابتدا فرض می‌کنیم که انتگرال(۱)، مستقل ازمسیر انتگرال‌گیری باشد: اگر (L)، دورهٔ بستهٔ سادهٔ دلخواه از حوزهٔ (D) باشد (شکل۲۲)، در آن صورت با انتخاب دونقطهٔ A و B، واقع برآن، به‌بخش‌های (AMB) و (ANB) تقسیم می‌شود. چون انتگرال‌های درمسیر این منحنی‌ها، باهم برابرند:

$$\int_{(AMB)} = \int_{(ANB)} \qquad (۱۰)$$

بنابراین، به دست می‌آید:

$$\int_{(L)} = \int_{(AMB)} + \int_{(BNA)} = \int_{(AMB)} - \int_{(ANB)} = 0 \qquad (۱۱)$$

اکنون قضیهٔ عکس‌را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، انتگرال (۹)، روی دورهٔ

بستهٔ ساده، همیشه برابرصفر باشد. دونقطهٔ A و B روی این مسیربسته انتخاب وآن رابه مسیرهای (AMB) و (ANB) تقسیم می‌کنیم؛ در نتیجه، دورهٔ بسته زیر تشکیل می‌شود:

$$(L)=(AMBNA)$$

حالت ساده، وقتی خواهد بودکه منحنی‌های (AMB) و (ANB)، به‌جز دو نقطهٔ A و B، نقطهٔ مشترك دیگری نداشته باشندکه، دراین صورت، دورهٔ (L) خودش را قطع نمی‌کند وساده می‌شود. درحالتی‌که منحنی‌های (AMB) و (ANB) یکدیگر را قطع کنند، آن وقت،-منحنی بستهٔ (L)، ساده نخواهد بود.

باوجود این، به کمك پیش قضیهٔ زیر، می‌توان قانع شد که، کافی است بررسی خود را تنها در مورد دوره‌های بستهٔ ساده (دوره‌هایی که با خودشان برخورد ندارند)، انجام دهیم.

پیش‌قضیه. اگر انتگرال (۹)، روی یك دورهٔ بستهٔ ساده (یعنی؛ غیر متقاطع با خود) برابر صفر باشد، در آن صورت، روی هر دورهٔ بسته‌ای ــ هرچند که باخودش هم برخورد داشته باشد ــ برابر صفر می‌شود.

بنابرپیش‌قضیهٔ شمارهٔ ۵۵۰، کافی است این حکم را، برای خط شکستهٔ دلخواهی‌ــ ولو این‌که باخودش برخورد داشته باشد ــ ثابت کنیم. (L)را این خط شکسته می‌گیریم که، به ترتیب معینی، جهت‌دار شده باشد. ازیك نقطهٔ‌آن، M_0، آغازمی‌کنیم و، بادنبال‌کردن جهت خط شکسته، بخشی از آن را، تا نخستین نقطهٔ برخورد باخود، M_1، می‌پیماییم. خط‌شکستهٔ بستهٔ حاصل(L_1) را حذف می‌کنیم، ومسیر M_0M_1 را تانقطهٔ‌برخورد تازه ادامه می‌دهیم (باید مسیری را انتخاب‌کنیم‌که، بازهم، منجر به‌حذف یك‌خط شکستهٔ بستهٔ (L_2) بشود) و غیره. بعد از برداشتن چندگام، به تعداد متناهی، خط شکستهٔ (L)، به تعداد محدودی خط‌های شکستهٔ غیرمتقاطع باخود، تجزیه می‌شود:

$$(L_1), (L_2), \dots$$

که درطول‌آن‌ها، به روشنی، انتگرال برابر صفر می‌شود. یعنی، مقدار انتگرال، در طول خط شکستهٔ (L) هم، برابرصفراست. واین، همان چیزی است‌که می‌خواستیم ثابت‌کنیم.

به‌این ترتیب، قضیه‌ای ثابت شدکه برای ما مفید است:

قضیهٔ۴. برای‌آن‌که انتگرال منحنی‌الخط (۱)، مستقل از مسیر خود باشد، لازم و کافی است‌که انتگرال (۹)، روی دورهٔ بستهٔ دلخواه، برابر صفر شود. ضمناً، اگر تنها به دورهٔ بستهٔ ساده (غیر متقاطع با خود) اکتفا شود، بازهم این شرط کافی خواهد بود.

اکنون روشن است‌که، برای داوری دربارهٔ صفرشدن انتگرال (۹) روی مسیر

بسته، می‌توان به همان معیاری متوسل شد که، در قضیهٔ (۳)، برای استقلال انتگرال (۱) نسبت به مسیر خود، داشتیم.

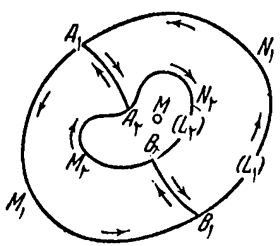
قضیهٔ ۵. برای آن‌که انتگرال (۹)، روی یک دورهٔ بسته درمحدودهٔ حوزهٔ (D)، برابر صفر شود، لازم و، باشرط همبندی سادهٔ حوزهٔ (D)، کافی است که شرط (A) برقرار باشد.

این شرط، برای حالتی‌هم که تنها به دورهٔ بستهٔ ساده (غیر متقاطع باخود) اکتفا شود، لازم است.

بعداً [در ۶۰۱]، با به‌دست‌آوردن امکان‌های کامل‌تری (انتگرال‌های دوگانه، دستور گرین)، دوباره به همین بحث برخواهیم گشت و برخی از نتیجه‌ها را، به‌صورت ساده‌تری ارائه خواهیم داد.

۵۶۲. حالت حوزهٔ همبند غیرساده، یا وجود نقطه‌های خاص. تمامی نظریه‌ای که دراین پاراگراف آوردیم و به‌کاربرد شرط انتگرال‌پذیری (A) مربوط می‌شد، برپایهٔ این فرض‌هاست که: ۱) حوزهٔ موردنظر (D)، همبند ساده است، یعنی «حفره‌ای» ندارد؛ ۲) تابع‌های P و Q، همراه با مشتق‌های خود $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$، در حوزهٔ (D) پیوسته‌اند.

طبیعی است که، اگر این شرط‌ها وجود نداشته باشند، حکم‌هایی که در بالا آوردیم، در حالت کلی، اعتبار خودرا ازدست می‌دهند. دراین‌شماره، می‌خواهیم، دربارهٔ نقش این ویژگی‌ها، بادقت بیشتری بحث کنیم.



شکل ۲۳

ابتدا فرض می‌کنیم، حوزهٔ (D)، دارای یک نقطهٔ خاص M باشد (ولی «حفره‌ای» نداشته باشد). دورهٔ بستهٔ سادهٔ (L) را انتخاب می‌کنیم و انتگرال (۹) را درنظر می‌گیریم:

$$\int_{(L)} P\,dx+Q\,dy$$

اگر این دوره، نقطهٔ خاص‌را دربر نگیرد، همچون سابق، برابر صفراست. ولی، اگرنقطهٔ M در درون دورهٔ (L) قرار گیرد، ممکن است انتگرال (۹) مخالف صفر بشود.

باوجود این، قابل توجه است که، اگر انتگرال‌ها را در جهت مثبت، [۵۴۸]، در روی انواع دوره‌هایی از این گونه، که نقطهٔ M را محصور می‌کنند، بگیریم، همهٔ آن‌ها

باهم برابر درمی‌آیند.

دو دورهٔ هموار (L_1) و (L_2) را در نظر می‌گیریم که نقطهٔ M را محصور کرده باشند. می‌توان فرض کرد که، این دو دوره، یکدیگر را قطع نمی‌کنند، زیرا در غیر این صورت، می‌توان دورهٔ سوم (L_3) را در نظر گرفت که هردو دورهٔ (L_1) و (L_2) را فراگیرد و آن‌ها را قطع نکند و، سپس، دربارهٔ زوج دوره‌های (L_1)، (L_3) و (L_2)، (L_3)، به‌طور جداگانه، بحث کرد.

منحنی‌های (L_1) و (L_2)، باهم، دورهٔ حلقه‌ای شکل حوزهٔ (Δ) را، که بین آن‌ها محصور است، تشکیل می‌دهند (شکل ۲۳). به کمك دو برش (A_1A_2) و (B_1B_2)، این حوزه را به دو بخش همبند سادهٔ (Δ') و (Δ'') تقسیم می‌کنیم. آن‌وقت، می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_{(A_1M_1B_1)} + \int_{(B_1B_2)} + \int_{(B_2M_2A_2)} + \int_{(A_2A_1)} = 0$$

و

$$\int_{(B_1N_1A_1)} + \int_{(A_1A_2)} + \int_{(A_2N_2B_2)} + \int_{(B_2B_1)} = 0$$

اگر این انتگرال‌ها را باهم جمع کنیم، آن‌ها که درجهت مخالف یکدیگرند، باهم حذف می‌شوند و، درنتیجه، به‌دست می‌آید:

$$\int_{(A_1M_1B_1N_1A_1)} + \int_{(A_2N_2B_2M_2A_2)} = 0$$

واز آن‌جا

$$\int_{(A_1M_1B_1N_1A_1)} = \int_{(A_2M_2B_2N_2A_2)}$$

و یا

$$\int_{(L_1)} = \int_{(L_2)}$$

ضمناً، انتگرال‌های اخیر، هردو، درجهت مثبت گرفته شده‌اند. حکم ثابت شد.

مقدارمشترك همهٔ این گونه انتگرال‌ها را، σ می‌نامیم و آن را، ثابت سیکلیك متناظر نقطهٔ خاص M می‌خوانیم*.

اکنون ثابت می‌کنیم که، اگر (L) دورهٔ بستهٔ دلخواهی درحوزهٔ (D)، ولومتقاطع باخود، باشد، ولی ازنقطهٔ خاص M نگذرد، داریم:

$$\int_{(L)} P\,dx+Q\,dy=n\sigma \qquad (۱۲)$$

که درآن، n عبارت است ازعددی درست (مثبت، منفی یاصفر). اگر دوره، یك‌چندضلعی باشد، این حکم واضح است، زیرا دراین حالت می‌توان‌آن را به تعداد محدودی چند-ضلعی غیرمتقاطع باخود تجزیه‌کردکه، درطول هرکدام ازآن‌ها، مقدار انتگرال، برابر صفریا $\pm\sigma$ می‌شود. درحالت‌کلی، دوباره، ازپیش قضیهٔ شمارهٔ ۵۵۰ (و یادداشت آن) استفاده می‌کنیم و، باآغاز از خط شکستهٔ محاط در منحنی، به سمت حد عبور می‌کنیم. چون، عبارت $n\sigma$ (به‌ازای $\sigma\neq 0$ و n صحیح) تنها می‌تواند، درحد، به صورتی شبیه خودش تبدیل‌شود (چراکه عدد n، سرآخر، از تغییرباز می‌ماند)، بنابراین، دستور(۱۲)، برای هردورهٔ دلخواه (L) درست است.

اکنون، انتگرال‌را برروی منحنی‌درنظرمی گیریم که دونقطهٔ $A(x_0,y_0)$ و $B(x_1,y_1)$ از حوزهٔ (D) را به هم وصل می‌کند و، ضمناً، از نقطهٔ خاص نمی‌گذرد. اگر $(AB)_0$ یکی‌ازاین منحنی‌ها، و (AB) منحنی دلخواه دیگری باشد، درآن صورت، (AB) و $(AB)_0$ روی هم، منحنی بسته‌ای را تشکیل می‌دهند، به‌نحوی که بنابر(۱۲):

$$\int_{(AB)} P\,dx+Q\,dy+\int_{(BA)_0} P\,dx+Q\,dy=n\sigma$$

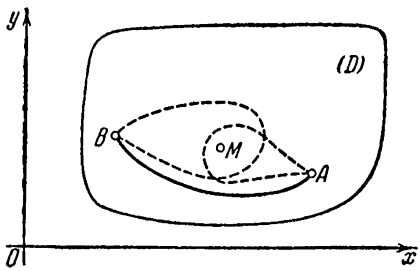
ازآن‌جا

$$\int_{(AB)} P\,dx+Q\,dy=\int_{(AB)_0} P\,dx+Q\,dy+n\sigma$$

دراین‌جا، بدواقع، انتگرال به مسیر انتگرال‌گیری بستگی دارد، ولی‌تنها به‌معنای اضافه‌کردن مضرب درستی از ثابت سیکلیك σ. بااضافه‌کردن حلقه‌هایی به‌منحنی $(AB)_0$،

---

*) وقتی‌هم‌که بایك «حفره» سروکار داشته باشیم (وقتی‌که «حفره»، چیزی بیش از یك نقطه است). بازهم ثابت سیکلیك متناظر باآن را. به‌همین ترتیب، تعریف می‌کنند.



شکل ۲۴

به‌نحوی که نقطهٔ M را احاطه کرده باشند، می‌توان ضریب n را، همان عدد درستی گرفت که از پیش انتخاب کرده‌ایم (شکل ۲۴).

به زبان دیگر، در این حالت، نماد

$$\int_{(AB)} P\,dx+Q\,dy=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx+Q\,dy$$

برای A و B مفروض (به شرط $\sigma\neq 0$)، نمادی یك ارزشی نیست؛ و با تقریب جملهٔ به صورت $n\sigma$ تعیین می‌شود، که در آن، $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$.

اگر به‌جای نقطهٔ B، نقطهٔ متغیر $M(x,y)$ را درنظر بگیریم، آن وقت انتگرال

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx+Q\,dy$$

مثل سابق، تابع اولیهٔ پیوسته‌ای (به استثنای نقطهٔ M) برای عبارت $P\,dx+Q\,dy$ می‌شود که، البته، چندارزشی است.

این مطلب مهم است که تفاوت حالتی را که در این‌جا بررسی کردیم، با حالت قبلی [۵۵۶، ۵۵۸، ۵۵۹] درك کنیم. در آن‌جا، به‌این دلیل از «چند ارزشی» بودن تابع اولیه صحبت می‌کردیم که، تابع اولیه، شامل ثابت غیرمشخصی بود؛ ولی با تثبیت این مقدار ثابت، می‌توانستیم به تابعی یك ارزشی، در همهٔ حوزهٔ مورد نظر، برسیم؛ در آن‌جا، هیچ رابطهٔ اجباری، بین «شاخه‌های» جداگانهٔ تابع اولیهٔ چند ارزشی وجود نداشت. ولی در این‌جا دیگر نمی‌توان «شاخه‌هایی» را، که بوسیلهٔ مضربی از ثابت سیکلیك باهم اختلاف دارند، جدا ازهم بررسی کرد؛ زیرا بادوران دور نقطهٔ خاص، می‌توان هرکدام از آن‌ها را، به‌صورتی پیوسته، منجر به دیگری کرد*.

برای این‌که همهٔ این موضوع‌ها را روشن کنیم، به‌عنوان مثال فرض می‌کنیم:

$$P=\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2}$$

---

*) درحالت تابع چند ارزشی با متغیرهای مختلط هم، با کیفیت مشابهی سروکار داشتیم [مثلاً، با ۴۵۸ مقایسه شود]؛ به‌سادگی می‌توان متوجه شد که، همهٔ این‌ها، به ویژگی‌های صفحه بستگی دارند.

این تابع‌ها، همراه با مشتق‌های خود، در تمامی صفحه ــ باستثنای مبداء مختصات $O(0,0)$ ــ پیوسته‌اند؛ به‌این ترتیب، نقطهٔ O، تنها نقطهٔ خاص است. می‌توان مستقیماً تحقیق کرد که شرط انتگرال‌پذیری، در همه‌جا (البته، بجز مبداء مختصات) برقرار است:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

به‌سادگی می‌توان محاسبه کرد که انتگرال

$$\int_{(L)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

در جهت مثبت، روی هر دایرهٔ دلخواه به مرکز مبداء مختصات، برابر است با 2π. و این، همان ثابت سیکلیك نظیر مبداء مختصات است.

تابع اولیه را، برای عبارت دیفرانسیلی

$$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

می‌توان به سادگی پیدا کرد: باید زاویهٔ قطبی θ را درنظر گرفت و قرار داد: $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$. به سادگی دیده می‌شود که، درنتیجه، صورت کلی تابع اولیه $\theta+C$ خواهد شد ($C=\text{const.}$) ولی باهرمقدار زاویهٔ قطبی θ که در نقطهٔ مفروضی از صفحه، متمایز با مبداء، آغاز کنیم، وقتی که نقطه را n بار دور مبداء، دراین یا آن جهت، دوران دهیم، زاویهٔ θ به‌طور پیوسته تغییر می‌کند و، ضمن بازگشت به موضع اولیهٔ خود، نمو $\pm 2n\pi$ (مضربی از ثابت سیکلیك) را پیدا می‌کند. به‌این ترتیب، اگر تابع اولیه را در تمامی صفحه، یا بخشی از صفحه که شامل مبداء مختصات است (و البته، بجز خود مبداء) در نظر بگیریم، باید به چند ارزشی‌بودن آن، همچون یك خاصیت جدائی ناپذیر آن توجه کرد: شاخه‌های آن که، به اندازهٔ مضرب درستی از 2π، باهم اختلاف دارند. به معنای معمول خود، قابل جداشدن ازهم نیستند.

خواننده خود می‌تواند، این بررسی را، بدون هیچ دشواری، برای حالتی هم که باچند نقطهٔ خاص یا «حفره» سروکار داریم، انجام دهد، مثلا فرض کنیم، k نقطهٔ خاص

$$M_1, M_2, \dots, M_k$$

وجود داشته باشد. اگر A و B را دو نقطهٔ (متمایز از نقطه‌های خاص) حوزه بگیریم و منحنی معینی را که این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کند (و از نقطه‌های خاص نمی‌گذرد)،

$(AB)_0$ بنامیم، آن وقت، صورت کلی انتگرال، روی منحنی مشابه ودلخواه (AB)، چنین خواهد بود:

$$\int_{(AB)} P\,dx+Q\,dy=\int_{(AB)_0} P\,dx+Q\,dy+n_1\sigma_1+n_2\sigma_2+\cdots+n_k\sigma_k$$

دراین‌جا، $\sigma_i\ (i=1,2,\ldots,k)$ عبارت است از ثابت سیکلیك متناظر نقطهٔ خاص M_i، یعنی مقدار انتگرال

$$\int_{(L_i)} P\,dx+Q\,dy$$

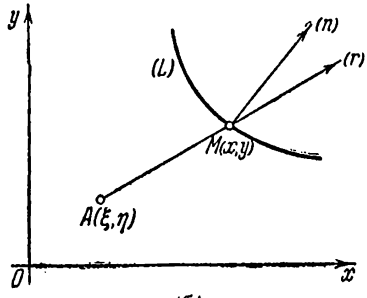
که درجهت مثبت، روی‌دورهٔ بستهٔ سادهٔ (L_i) گرفته شده باشد، به شرطی‌که نقطهٔ M_i در درون (L_i) واقع باشد و هیچ نقطهٔ خاص دیگری در درون (L_i) نباشد. ضریب‌های $n_1, n_2, \ldots, n_k$، می‌توانند مستقل از یکدیگر، عددهای درست دلخواهی باشند.

۵۶۳. انتگرال گوس. در برخی مسالهای فیزیك ریاضی، به انتگرال منحنی‌الخط

$$g=\int_{(L)} \frac{\cos(r,n)}{r}\,ds$$

برخورد می‌کنیم، که بانام گوس همراه است. دراین‌جا

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$



شکل ۲۵

عبارت از طول برداری‌که نقطهٔ بیرونی $A(\xi,\eta)$ را به نقطهٔ متغیر $M(x,y)$ از منحنی (L) وصل می‌کند (شکل ۲۵)، و (r,n) عبارت از زاویهٔ بین این بردار وقائم برمنحنی در نقطهٔ M است.

چون نقطهٔ A تغییر نمی‌کند، عبارت زیر انتگرال، یعنی $\frac{\cos(r,n)}{r}$، تابعی است از مختصات x و y نقطهٔ M. انتگرال گوس را، به شکل انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم درمی‌آوریم. اگر (x,n) و (x,r)، به‌ترتیب، زاویه‌های بین جهت مثبت محور x و جهت‌های قائم و شعاع حامل باشند، روشن است که

$$(r, n) = (x, n) - (x, r)$$

به نحوی که

$$\cos(r, n) = \cos(x, n)\cos(x, r) + \sin(x, n)\sin(x, r) =$$

$$= \frac{x-\xi}{r}\cos(x, n) + \frac{y-\eta}{r}\sin(x, n)$$

اگر این مقدار را، در انتگرال گوس قرار دهیم، به‌این صورت در می‌آید:

$$g = \int_{(L)} \left[\frac{y-\eta}{r^2}\sin(x, n) + \frac{x-\xi}{r^2}\cos(x, n)\right] ds$$

که اگر از دستور (۱۵) شمارهٔ **۳۵۳** استفاده کنیم، آن وقت، انتگرال g، به‌صورت انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم در می‌آید:

$$g = \pm \int_{(L)} \frac{y-\eta}{r^2} dx - \frac{x-\xi}{r^2} dy$$

که در آن، علامت جلو انتگرال، بستگی به‌انتخاب جهت در روی قائم دارد.

تابع‌های $P = \frac{y-\eta}{r^2}$ و $Q = \frac{x-\xi}{r^2}$، همراه با مشتق‌های خود، در تمامی صفحهٔ xy، به استثنای نقطهٔ A که در آن‌جا $r = 0$، پیوسته‌اند. در همهٔ نقطه‌ها، به جز نقطهٔ A، شرط انتگرال‌پذیری صدق می‌کند. درواقع:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-\eta}{r^2}\right) = \frac{r^2 - 2(y-\eta)^2}{r^4} = \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x-\xi}{r^2}\right) = -\frac{r^2 - 2(x-\xi)^2}{r^4} = \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{r^4}$$

به نحوی که، این مشتق‌ها، برابرند.

اگر منحنی (L) بسته باشد، ولی نقطهٔ A را دور نزند (و از آن عبور نکند)، آن وقت، الزاماً داریم: $g = 0$. درحالتی که منحنی بستهٔ (L) نقطهٔ A را دور بزند، انتگرال گوس می‌تواند مخالف صفر باشد، ولی همان‌طور که در شمارهٔ قبل دیدیم، مقدار آن برای همهٔ این گونه منحنی‌ها یکی است. برای روشن کردن این‌مقدار، دایرهٔ به شعاع R ومرکز A را، به‌عنوان منحنی (L) انتخاب می‌کنیم. آن وقت

$$r = R, \quad \cos(r, n) = 1$$

(اگر درنظر بگیریم که قائم وشعاع حامل، دارای یك جهت‌اند)، به‌طوری که

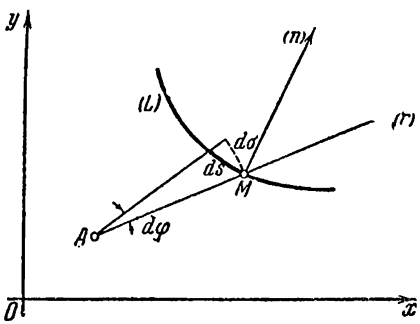
$$g=\frac{1}{R}\int_{(L)} ds=\frac{1}{R}\cdot 2\pi R=2\pi$$

بنابراین، برای هرمنحنی بستهٔ (L)، که نقطهٔ A در درون آن واقع است، داریم:

$$g=\int_{(L)}\frac{\cos(n,r)}{r}ds=2\pi$$

به شرطی که قائم، متوجه به بیرون باشد، همان طور که در مورد دایره عمل کردیم.

اگر به معنای هندسی انتگرال گوس توجه می‌کردیم، می‌توانستیم این نتیجه را پیش‌بینی کنیم: g اندازهٔ زاویه‌ای است که، منحنی (L)، از نقطه A، باآن دیده می‌شود (به شرطی که زاویه‌ای را که شعاع حامل نقطهٔ A، برای دور زدن منحنی می‌پیماید، با علامت در نظر بگیریم).



شکل ۲۶

برای درك این کیفیت، ابتدا فرض می‌کنیم که منحنی (L)، با هرنیم خطی که از نقطهٔ A می‌گذرد، در بیشتر از یك نقطه، برخورد نداشته باشد (شکل ۲۶). سپس فرض می‌کنیم که جهت قائم n در سمت مخالف نقطهٔ A باشد، به نحوی که

$$0<(r,n)<\frac{\pi}{2}$$

جزء ds را برمنحنی (L) انتخاب و زاویه‌ای را معین می‌کنیم که این جزء، تحت آن، از نقطهٔ A دیده می‌شود. اگر M نقطه‌ای ازاین جزء (ومثلا نقطهٔ آغازین آن) باشد، آن وقت، دور A دایره‌ای به شعاع AM رسم می‌کنیم و جزء ds را براین دایره تصویر می‌کنیم. جزئی از دایره را، که تصویر جزء ds است، $d\sigma$ می‌نامیم. چون زاویهٔ بین آن‌ها (هر دو جزء را، به تقریب، مستقیم‌الخط می‌گیریم)، برابر است با زاویهٔ (r,n)، بنابراین

$$d\sigma=\cos(n,r)ds$$

از طرف دیگر روشن است که

$$d\sigma = r\,d\varphi$$

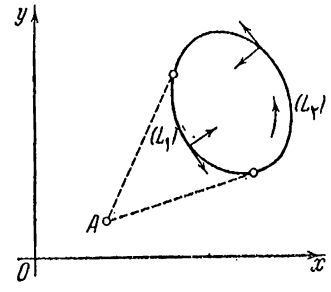
که در آن، $d\varphi$ عبارت است از زاویهٔ متناظر کمان $d\sigma$، یعنی زاویه‌ای که، تحت آن، جزء ds از نقطهٔ A دیده می‌شود. از این‌جا، برای زاویهٔ جزئی، به عبارت زیر می‌رسیم:

$$d\varphi = \frac{\cos(n, r)}{r}\,ds$$

با جمع کردن همهٔ زاویه‌های جزئی، معلوم می‌شود که زاویهٔ رؤیت برای تمامی منحنی (L)، عبارت است از همان انتگرال g.

اگر نیم خطهایی که از A آغاز می‌شوند، منحنی‌را در بیشتر از یک نقطه قطع کنند، ولی بتوان منحنی را به بخش‌هایی تقسیم کرد که، در هر کدام از آن‌ها، با هر یک از این نیم خطها تنها در یک نقطه برخورد داشته باشد، آن وقت، باید انتگرال‌های گوس مربوط به این بخش‌ها را، باهم جمع کرد.

روی منحنی (L) جهت معینی‌را انتخاب می‌کنیم و جهت‌قائم را، مثلا، طوری در نظر می‌گیریم که زاویهٔ بین جهت مثبت مماس و جهت مثبت قائم، برابر $+\frac{\pi}{2}$ باشد. در این صورت، در بعضی از بخش‌های منحنی، قائم درجهت مخالف موضع A واقع می‌شود و انتگرال گوس، زاویهٔ رؤیت را باعلامت مثبت به دست می‌دهد؛ در بخش‌های دیگر، جهت قائم درهمان سمت موضع A قرار می‌گیرد و زاویهٔ رؤیت باعلامت منفی به‌دست می‌آید. در این حالت، کل انتگرال گوس، مجموع جبری زاویه‌های رویت را به دست می‌دهد. ضمناً، همین مجموع را، زاویهٔ رؤیت برای تمامی منحنی (L) می‌نامند. به این ترتیب، زاویهٔ رویت، عبارت است از اندازهٔ کامل دوران شعاع دید، از ابتدا تا انتهای منحنی.



شکل ۲۷

اگر منحنی بسته باشد و نقطهٔ A را احاطه کند، روشن است که، زاویهٔ رؤیت، برابر 2π می‌شود. درحالتی که، منحنی بسته، نقطهٔ A را دورنزند، زاویه‌های رویت، به دلیل اختلاف علامت‌ها، متقابلاً حذف می‌شوند و، در مجموع، به مقدار صفر می‌رسد. برای حالت ساده‌ای که در شکل ۲۷ نشان داده شده است، منحنی (L) به دو بخش (L_1) و (L_2) تقسیم می‌شود که، هر دو بخش، از نقطه A با یک زاویه دیده می‌شوند. ولی این زاویه، برای (L_1) با علامت مثبت و برای (L_2) با علامت منفی به دست

می‌آید.

همهٔ این‌ها، با آن چه قبلا گفته‌ایم، توافق دارند.

یادداشت. تعبیر هندسی انتگرال گوس، این امکان را به وجود می‌آورد که متوجه شویم، درحالتی که منحنی (L) ازنقطهٔ A می‌گذرد و دراین‌نقطه دارای مماس است، مقدار انتگرال برابر π می‌شود. اگر نقطهٔ A، زاویه‌ای و زاویهٔ بین مماس‌های هم جهت در آن برابر α باشد، انتگرال گوس هم، همان مقدار را به‌دست می‌دهد. برای استدلال تحلیلی این نتیجه باید ابتدا، یك همسایگی‌نقطهٔ A را از (L) جداکنیم و، سپس، باکوچك‌کردن این همسایگی، به سمت حد عبور کنیم.

۵۶۴. حالت سه‌بعدی. تمامی بحثی‌راکه تا این جا داشتیم، می‌توان برای حالت سه بعدی هم تکرار کرد.

تابع‌های $P(x, y, z)$، $Q(x, y, z)$ و $R(x, y, z)$ را دریك‌حوزهٔ سه بعدی(V)، معین و پیوسته می‌گیریم. انتگرال منحنی‌الخط

$$\int_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz \qquad (۱۳)$$

روی منحنی غیرمشخص (AB)، واقع دراین حوزه، را بررسی‌می‌کنیم. بحث‌های شماره‌های **۵۵۶** و **۵۵۷** را می‌توان، مستقیماً و بدون هیچ تغییری، به این‌جا هم انتقال داد. به این ترتیب، دراین‌جا هم، قضیه‌ای شبیه قضیهٔ شماره **۵۵۵** خواهیم داشت: مسالهٔ مربوط به استقلال انتگرال (۱۳) نسبت به مسیر انتگرال‌گیری، به این جا منجر می‌شود که، آیا عبارت دیفرانسیلی

$$Pdx+Qdy+Rdz \qquad (۱۴)$$

دیفرانسیل کامل هست یانه، یعنی آیا چنان تابع (اولیهٔ) $\Phi(x, y, z)$ وجود دارد که دیفرانسیل کامل آن

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz$$

برعبارت (۱۴) انطباق حاصل کند یانه؟

ضمناً توجه‌کنیم که، اگرچنین تابعی وجود داشته باشد، آن وقت، انتگرال (۱۳) با تفاضل دو مقدار انتهائی آن بیان می‌شود:

$$\int_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz=\Phi(B)-\Phi(A)=\Phi(M)\Big|_A^B \qquad (۱۵)$$

[با ۵۵۷، (*۶) مقایسه کنید].

سپس، مثل قبل، مسألهٔ مربوط به معیارهـای شناخت دیفرانسیل کامل پیش می‌آید. وجود مشتق‌های پیوسته را درحوزهٔ (V) می‌پذیریم:

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}; \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}; \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$$

آن وقت، اگرعبارت (۱۴) دیفرانسیل یك تابع $\Phi(x, y, z)$ باشد، به طوری که داشته باشیم:

$$P=\frac{\partial \Phi}{\partial x}, Q=\frac{\partial \Phi}{\partial y}, R=\frac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad (۱۶)$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}; \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x};$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y}$$

همهٔ این مشتق‌ها بنا به فرض پیوسته‌اند و، بنابراین [۱۹۱]، برابری‌های زیر برقرارند:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z} \qquad (B)$$

به‌این ترتیب، در حـوزهٔ دلخواه (V)، برای آن که عبارت (۱۴) دیفرانسیل کامل و، درنتیجه، انتگرال (۱۳) مستقل ازمسیر انتگرال‌گیری باشد، وجودشرط‌های (B) لازم‌اند.

برای اثبات کافی بودن این شرط‌ها، دراین‌جا تنها به‌حالتی می‌پردازیم که حوزهٔ (V) مکعب مستطیل باشد:

$$(V)=[a, b; c, d; e, f]$$

دراین‌جا، باید همان بحث شمارهٔ ۵۵۸ را تکرارکرد.

برای تعیین تابع $\Phi(x, y, z)$ از شرط‌های (۱۶)، در اولین شرط، y و z را، به دلخواه در بازه‌های نظیر خـود، ثابت فـرض می‌کنیم و از آن نسبت به x بین x_0 و x $(a \leqslant x_0, x \leqslant b)$ انتگرال می‌گیریم، به‌دست می‌آید:

$$\Phi(x, y, z)=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)dx+\Phi(x_0, y, z)$$

در معادلهٔ دوم از معادله‌های (۱۶)، با فرض $x=x_0$ و انتگرال‌گیری نسبت به y از y_0 تا y ($c\leqslant y_0\leqslant d$، $y\leqslant d$)، حاصل می‌شود:

$$\Phi(x_0, y, z)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)dy+\Phi(x_0, y_0, z)$$

بالاخره، از معادلهٔ سوم (۱۶)، با فرض $x=x_0$ و $y=y_0$، نسبت به z از z_0 تا z ($e\leqslant z_0\leqslant f$) انتگرال می‌گیریم:

$$\Phi(x, y, z)=\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)dz+\Phi(x_0, y_0, z_0)$$

اگر مقدار ثابت $\Phi(x_0, y_0, z_0)$ را C بنامیم، سرانجام به عبارت زیر، برای انتگرال مورد نظر می‌رسیم:

$$\Phi(x, y, z)=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)dy+$$

$$+\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)dz+C \qquad (۱۷)$$

که درصورت لزوم، می‌توان مثلا با استفاده از قاعدهٔ لایب‌نیتس، به سادگی تحقیق کرد که این تابع، به واقع، در همهٔ معادله‌های (۱۶) صدق می‌کند.

این‌که توانستیم مستقیماً تابع اولیه را بسازیم، متقاعد می‌شویم که، شرطهای (B)، دست‌کم برای حوزهٔ مکعب مستطیلی (V)، کافی هستند تا عبارت (۱۴) دیفرانسیل کامل و هم، در نتیجه، انتگرال (۱۳) مستقل از مسیر انتگرال‌گیری باشد.

تعمیم به‌حالت کلی، دراین‌جا هم، با برخی شرطها برای حوزهٔ (V) (شبیه همبندی سادهٔ حوزهٔ مستوی) میسراست. ولی چون وارد شدن به‌تمامی بحث، با دشواری‌هایی همراه است، ازآن می‌گذریم. درشمارهٔ ۶۴۱، وقتی‌که با انتگرال روی سطح و دستور ستوکس آشنا شدیم، دوباره به‌این بحث برمی‌گردیم.

۵۶۵. مثال‌ها. ۱) آیا انتگرال منحنی‌الخط

$$\int_{(l)} (x^2+y^2)(xdx+ydy)$$

روی دورهٔ بستهٔ دلخواه، برابر صفراست؟

پاسخ مثبت است، زیرا عبارت زیر انتگرال، آشکارا، دیفرانسیل کامل می‌شود [از تابع $\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$].

۲) با استفاده ازشرط (A)، روشن کنیدکه آیا انتگرال

$$\int_{(AB)} x\,dy - y\,dx$$

به مسیر انتگرال‌گیری بستگی دارد؟

پاسخ. درحالت کلی، این انتگرال، بستگی به مسیر انتگرال‌گیری دارد، زیرا اگر انتگرال را روی دورهٔ بستهٔ متقاطع باخود محاسبه‌کنیم، دوبرابر مساحت حوزهٔ محدودبه این دوره به دست می‌آید [۵۵۱] و، درنتیجه مخالف صفراست.

۳) برای عبارت‌های دیفرانسیلی زیر، وجود تابع اولیه را، ثابت یا ردکنید:

a) $(4x^3y^3-3y^2+5)dx+(3x^4y^2-6xy-4)dy$,

b) $(10xy-8y)dx+(5x^2-8x+3)dy$,

c) $(4x^3y^3-2y^2)dx+(3x^4y^2-2xy)dy$,

d) $[(x+y+1)e^x-e^y]dx+[e^x-(x+y+1)e^y]dy$

حل. به‌کمك شرط انتگرال پذیری روشن می‌شودکه درحالت‌های a)، b) و d) با دیفرانسیل‌کامل سروکار داریم و در حالت c) نه.

a) از روی دستور (۸)، بافرض $x_0=y_0=0$، داریم:

$$\Phi(x, y)=\int_0^x 5\,dx+\int_0^y (3x^4y^2-6xy-4)dy+C=$$

$$=5x+x^4y^3-3xy^2-4y+C$$

از روی دستور (۷) هم، همین مقدار به‌دست می‌آید:

$$\Phi(x, y)=\int_0^x (4x^3y^3-3y^2+5)dx+\int_0^y (-4)dy+C=$$

$$=x^4y^3-3xy^2+5x-4y+C$$

b) بهتر است با فرض $x_0=y_0=0$، از روی دستور (۸) محاسبه شود، زیرا در این صورت، انتگرال اول برابر صفر می‌شود:

$$\Phi(x, y)=\int_{0}^{y}(5x^2-8x+3)dy+C=(5x^2-8x+3)y+C$$

d) از روی هرکدام از دستورهای (۷) یا (۸)، به‌دست می‌آید:

$$\Phi(x, y)=(x+y)(e^x-e^y)+C$$

۴) ثابت کنید شرط $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$، با اتحاد زیر هم‌ارز است:

$$\int_{x_0}^{x}P(x, y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0, y)dy=\int_{x_0}^{x}P(x, y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x, y)dy$$

(بافرض پیوسته بودن تابع‌های P، Q، $\frac{\partial P}{\partial y}$، $\frac{\partial Q}{\partial x}$).

۵) گاهی تعیین تابع اولیه را (اگرشرط انتگرال پذیری برقرار باشد)، به‌صورت دیگری، غیر از آن چه در **۵۵۸** گفته‌ایم، تنظیم می‌کنند. این روش را روی مثال ۳)ـ a) روشن می‌کنیم.

از شرط

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=4x^3y^3-3y^2+5$$

با انتگرال‌گیری نسبت بـه x، برای Φ عبارت $x^4y^3-3xy^2+5x$، با تقریب «ثابت انتگرال‌گیری»، به دست می‌آید. این «مقدار ثابت» به x بستگی ندارد (زیرا، نسبت به آن، انتگرال گرفته‌ایم)، ولی ممکن است به «پارامتر» y بستگی‌داشته باشد. به‌این‌جهت، آن را با $\varphi(y)$ نشان می‌دهیم. در نتیجه

$$\Phi=x^4y^3-3xy^2+5x+\varphi$$

اگر در شرط

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=3x^4y^2-6xy-4$$

به جای Φ، مقدارش را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$\frac{d\varphi}{dy}=-4$$

و از آن‌جا $\varphi = -۴y + C$. بالاخره

$$\Phi = x^۴y^۳ - ۳xy^۲ + ۵x - ۴y + C$$

۶) اگر ازهمان روش، برای مثال ۳)-c)، بدون توجه به‌ازبین‌رفتن شرط انتگرال‌پذیری، استفاده کنیم، در آن صورت، برای تعیین φ، شرط زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{d\varphi}{dy} = ۲xy$$

و این، آشکارا، شرط φ را نقض می‌کند، زیرا عبارت φ باید به x بستگی نداشته باشد، درحالی‌که دراین‌جا، عبارت سمت راست، شامل x است.

۷) بهتراست روشن کنیم که، درحالت کلی، شرط انتگرال‌پذیری، چه نقشی درمورد این روش دارد.

اگر از برابری زیر، نسبت به x، انتگرال بگیریم:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y)$$

به دست می‌آید:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_۰}^{x} P(x, y)dx + \varphi(y)$$

وبرابری دوم

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y)$$

برای تعیین $\varphi(y)$، مارا به‌این شرط می‌رساند:

$$\frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_۰}^{x} P(x, y)dx = Q(x, y) - \int_{x_۰}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}dx \qquad (۱۸)$$

اگرعبارت اخیر، واقعاً مستقل از x باشد (یعنی، به‌ازای $y = \text{const}$، با تغییر x، تغییر نکند)، درآن صورت به سادگی مقدار φ به‌دست می‌آید. ولی اگرعبارت (۱۸) شامل x باشد، شرط حاصل برای φ، متناقض می‌شود؛ زیرا φ نباید بـه x بستگی داشته باشد. به این‌ترتیب، توفیق‌درکار، منحصراً بسته به‌آن است که عبارت (۱۸) مستقل‌از x باشد. ولی، این شرط، ساده‌تر ازهمه ازآن‌جا تعیین می‌شود که ببینیم: آیا مشتق نسبی عبارت (۱۸)،

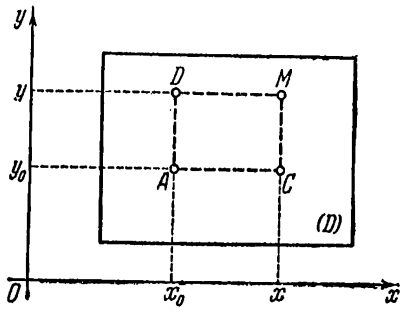
نسبت به x، برابر صفرمی‌شود یا نه! ولی این‌مشتق برابر است با $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$؛ بـه این ترتیب، تنها برقراری شرط (A) است که موفقیت را تضمین می‌کند.

۸) تابع $F(x, y)$ چه شرطی باید داشته باشد تا عبارت

$$F(x, y)(xdx+ydy)$$

دیفرانسیل کامل باشد؟

پاسخ: $x\frac{\partial F}{\partial y}=y\frac{\partial F}{\partial x}$.



شکل ۲۸

۹) دستورهـای (۷) و (۸) شمارهٔ ۵۵۸ برای تابع‌اولیه را، بااستفاده ازبیان تابع اولیه برحسب انتگرال منحنی‌الخط [۵۵۶، (۴)] و انتخاب خطهـای شکستهٔ ACM و ADM، برای مسیرهای انتگرال‌گیری، به‌دست آورید (شکل۲۸).

۱۰) برای این‌که مثال دیگری ازکاربرد دستورکلی (۴) شمارهٔ ۵۵۶، برای تعیین تابع اولیه داشته باشیم، دوباره، مسألهٔ ۳)ـ a) رااز روی این‌دستور حل می‌کنیم: مسیر انتگرال‌گیری را پاره خطی می‌گیریم که مبداء مختصات را، به نقطهٔ دلخواه (x', y') از صفحه وصل می‌کند (بـه‌این دلیل، مختصات نقطهٔ اخیر را به این ترتیب نامیده‌ایم تا با مختصات x و y، نقطهٔ متغیر مسیر انتگرال‌گیری، اشتباه نشود).

در انتگرال

$$F(x', y')=\int_{(0,0)}^{(x', y')}(4x^3y^3-3y^2+5)dx+(3x^4y^2-6xy-4)dy$$

باید به‌جای y قرار داد: $\frac{y'x}{x'}$ (زیرا $y=\frac{y'x}{x'}$، معادلهٔ مسیر انتگرال‌گیری است) تا کار، منجر به محاسبهٔ انتگرال معین معمولی، نسبت به x (از ۰ تا x') شود. در نتیجه، به دست می‌آید:

$$F(x', y')=\int_0^{x'}\left(\frac{7y'^3x^6}{x'^3}-\frac{9y'^2x^2}{x'^2}+5-\frac{4y'}{x'}\right)dx=$$

$$=x'^4y'^3-3x'y'^2+5x'-4y'$$

واین همان عبارتی است که قبلا پیداکردیم (باتوجه به‌این‌که x' و y'، همان x و yاند).

۱۱) مطلوب است تعیین حوزه‌ای که، در آن، عبارت*

$$P\,dx+Q\,dy=\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\,dx+\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}\,dy$$

دیفرانسیل کامل شود، تابع اولیهٔ آن را، در این حوزه، پیدا کنید.

حل. داریم (برای $y\neq 0$):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2-y^2}+x}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right)=\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

ضمناً در عبارت اول، علامت + یا −، متناظر با علامت y است. به این ترتیب، شرط انتگرال‌پذیری عبارت است از $y>0$.

برای پیدا کردن تابع اولیه، در نیم صفحهٔ بالایی ($y>0$)، از همان روشی استفاده می‌کنیم که در مسألهٔ ۱۰) به‌کار بردیم؛ تنها، معادلهٔ خط راست را به صورت پارامتری انتخاب می‌کنیم:

$$x=x't,\quad y=y't\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

آن وقت، داریم:

$$F(x',y')=\int_{(0,0)}^{(x',y')}P\,dx+Q\,dy=$$

$$=\int_0^1\left(x'\sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2}-x'}+y'\sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2}+x'}\right)\sqrt{t}\,dt=$$

$$=\frac{2}{3}\left(x'\sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2}-x'}+y'\sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2}+x'}\right)$$

۱۲) فرض می‌کنیم

$$P\,dx+Q\,dy=\frac{1}{2}\,\frac{x\,dy-y\,dx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}\qquad(A,C,AC-B^2>0)$$

---

*) طبق معمول، نماد $\sqrt{\ }$ را برای ریشهٔ حسابی به‌کار برده‌ایم.

برقراری شرط (A) را تحقیق، و ثابت سیکلیك را برای نقطهٔ خاص $(۰\ ۰)$ پیدا کنید.

راهنمائی. راحت‌تر از همه این است که انتگرال منحنی‌الخط را روی بیضی

$$Ax^۲+۲Bxy+Cy^۲=۱$$

محاسبه کنیم؛ در این صورت

$$\int_{(E)} Pdx+Qdy=\frac{۱}{۲}\int_{(E)} xdy-ydx$$

که به طور ساده، بـه مساحت این بیضی [**۵۵۱**، (۱۰)] منجر می‌شود که برای ما معلوم است [**۳۳۹**، ۶)]. با **۵۴۹**، ۹) مقایسه کنید.

۱۳) اگر شرط انتگرال‌پذیری رعایت شود، انتگرال منحنی‌الخط می‌تواند مستقل از مسیر انتگرال‌گیری باشد و، حتی در حالتی هم که نقطهٔ خاص وجود دارد، تابع اولیه‌ای یك ارزشی داشته باشد. مثال: عبارت

$$\frac{xdx+ydy}{x^۲+y^۲}$$

که، برای آن، مبداء مختصات نقطه‌ای خاص است، دارای تابع اولیهٔ، مثلا $\ln(x^۲+y^۲)$ می‌باشد که، همراه با مشتق‌های نسبی، در تمامی صفحه (به‌جز مبداء) یك ارزشی و پیوسته است. خواننده به‌سادگی روشن می‌شود که، این واقعیت، مربوط به صفرشدن ثابت سیکلیك در مبداء است.

۱۴) از عبارت دیفرانسیلی زیر انتگرال بگیرید:

$$z\left(\frac{۱}{x^۲y}-\frac{۱}{x^۲+z^۲}\right)dx+\frac{z}{xy^۲}dy+\left(\frac{x}{x^۲+z^۲}-\frac{۱}{xy}\right)dz$$

حل. «شرط انتگرال‌پذیری» به سادگی تحقیق می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{z}{x^۲y^۲};\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{۱}{xy^۲};\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{۱}{x^۲y}+\frac{z^۲-x^۲}{(x^۲+z^۲)^۲}$$

محاسبه را از روی دستور مشابه (۱۷)، ولی با جابه‌جایی نقش‌های x و z و، ضمناً، با فرض $z_۰=۰$ و $y_۰>۰$ و $x_۰$ انجام می‌دهیم. آن وقت، تنها یکی از سه انتگرال باقی می‌ماند و به دست می‌آید:

$$\Phi(x, y, z)=\int_۰^z\left(\frac{x}{x^۲+z^۲}-\frac{۱}{xy}\right)dz+C=\operatorname{arctg}\frac{z}{x}-\frac{z}{xy}+C$$

۵۶۶. کاربرد در فیزیک. در پرتو نظریه‌ای که، با آن، آشنا شده‌ایم، به مسأله‌هایی از مکانیک و فیزیک برمی‌گردیم، که قبلا هم مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

۱) کار میدان نیرو. در شمارهٔ **۵۵۴** دیدیم که، کار میدان نیرو، ضمن جا به جایی نقطهٔ مادی به جرم واحد درطول مسیر (K)، با انتگرال منحنی‌الخط

$$A=\int_{(K)} X\,dx+Y\,dy \qquad (۱۹)$$

بیان می‌شود، که در آن، $X=X(x,y)$ و $Y=Y(x,y)$، تصویرهای شدت میدان بر محورهای مختصات هستند. [**۵۵۴**، (۱۸) را ببینید].

کاملا طبیعی است، به روشن‌کردن شرط‌هایی بپردازیم که، به‌ازای آن‌ها، کار نیروهای میدان، تنها به موضع نقطه‌های ابتدا و انتها، بستگی داشته باشد و مستقل از شکل مسیر باشد. روشن است که، این مسأله، با مسألهٔ مربوط به استقلال مقدار انتگرال منحنی‌الخط (۱۹)، از مسیر انتگرال‌گیری خود، هم‌ارز است. بنابراین، شرط مطلوب، عبارت است از

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x} \qquad (۲۰)$$

و مسلماً، همراه با این فرض که، حوزهٔ فراگرفته شده به‌وسیلهٔ میدان، همبند ساده و فاقد نقطه‌های خاص باشد.

این شرط را، به‌صورت زیرهم می‌توان تنظیم کرد: کار نیروهای میدان، ضمن تغییر مکان نقطهٔ مادی از یک وضع به وضع دیگر، درآن حالت و تنها درآن حالت، مستقل از مسیر است که کار جزئی

$$X\,dx+Y\,dy$$

دیفرانسیل کامل ازیک تابع یک ارزشی $U(x,y)$ باشد. این تابع را، معمولا، نیروئی یا پتانسیلی می‌نامند که، در حالت وجود آن، خود میدان را میدان پتانسیلی می‌گویند.

کار میدان پتانسیلی، وقتی که نقطه ازوضع $A(x_0,y_0)$ به وضع $B(x_1,y_1)$ منتقل می‌شود، به‌طور ساده، برابراست با [**۵۵۷**، (۶) را ببینید] نمو نظیر تابع نیروئی:

$$U(x_1,y_1)-U(x_0,y_0)=U(B)-U(A)$$

به‌عنوان مثال: میدان جاذبهٔ نیوتونی را در نظر می‌گیریم. اگر در مبداء مختصات O، جرم μ و درنقطهٔ A، جرم واحد را قراردهیم، آن وقت، جرم واحد، به‌طرف مرکز O،

با نیروی $\overrightarrow{F}$ جذب می‌شود که، ازلحاظ مقدار، برابر است با

$$F=\frac{\mu}{r^2}$$

که در آن، $r=\sqrt{x^2+y^2}$، فاصلهٔ نقطهٔ A ازمبداء است. ازآن‌جاکه، کسینوس زاویه‌های بین این نیرو و محورها، برابر $-\frac{x}{r}$ و $-\frac{y}{r}$ می‌شود، بنابراین، تصویرهای نیروی $\overrightarrow{F}$ بر محورها، این‌طور بیان می‌شوند:

$$X=-\frac{\mu x}{r^2},\ Y=-\frac{\mu y}{r^2}$$

مستقیماً روشن است که، میدان نیوتونی، یك میدان پتانسیلی است، زیرا عبارت

$$-\frac{\mu x}{r^2}dx-\frac{\mu y}{r^2}dy \qquad (۲۱)$$

دیفرانسیل تابع زیراست:

$$U=\frac{\mu}{r}$$

که در این‌جا، نقش تابع پتانسیلی را به عهده دارد و آن را، پتانسیل نیوتونی می‌نامند (میدان نقطهٔ O). باآن‌که نقطهٔ خاص وجود دارد (مبداء مختصات)، این تابع یك ارزشی است: انتگرال عبارت (۲۱)، روی دورهٔ بسته، صفر خواهد بود، حتی وقتی که دوره، مبداء را دور بزند (دراین‌جا، «ثابت سیکلیك» برابر صفراست).

وقتی نقطه ازموضع A به‌موضع B منتقل شود، نیروهای میدان، کار

$$A=\frac{\mu}{r_B}-\frac{\mu}{r_A}$$

را انجام می‌دهند، که درآن، r_A و r_B عبارتند ازفاصله‌های نقطه‌های A و B ازمرکز. وقتی نقطهٔ B تا بی‌نهایت دور شود، کار به $-\frac{\mu}{r_A}$ تبدیل می‌شود، که برابراست با مقدارپتانسیل نیوتونی $\frac{\mu}{r_A}$، وقتی‌که نقطه از بی‌نهایت به موضع A منتقل می‌شود.

به‌عنوان مثال‌هایی از میدان‌های غیرپتانسیلی، می‌توان از میدان‌هایی نام برد که با نیروهای

$$F=kr \text{ یا } F=\frac{k}{r} \quad (k=\text{const.})$$

تشکیل‌شده باشند که جهت آن‌ها، با جهت شعاع حامل $\overrightarrow{r}$، زاویه‌ای برابر $+\frac{\pi}{2}$ تشکیل می‌دهند.

همهٔ این بحث‌ها را، در مورد میدان نیروئی فضائی‌هم، می‌توان تکرار کرد.

۲) جریان مسطح مایع تراکم ناپذیر. اگر مولفه‌های بردار سرعت را، روی محورها، u و v بنامیم، آن وقت، همان طور که درشمارهٔ ۵۵۴، ۲) دیدیم، مقدار مایع جاری در واحد زمان، از درون دورهٔ بستهٔ (K)، برابر است با

$$Q=\int_{(K)} v\,dx-u\,dy$$

[۵۵۴، ۲۲) را ببینید]. در حالت مایع تراکم‌ناپذیر و در شرایط نبودن راه‌آب و زیر-آب، این انتگرال، همیشه برابرصفراست. ازآن‌جا، نتیجه می‌شود که، مولفه‌های v و u از بردار سرعت الزاماً، تابع این شرط‌اند:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

دراین صورت، عبارت زیر انتگرال $v\,dx-u\,dy$ دارای تابع اولیهٔ

$$\varphi(M)=\varphi(x, y)$$

است که، در هیدرومکانیک، آن را تابع جریان می‌نامند.

اگر منحنی دلخواه (AB)، از وصل دونقطهٔ A و B، به دست‌آمده باشد، همان‌طور که می‌دانیم [۵۵۴، ۲۲)]، مقدار مایعی راکه، در واحد زمان و در سمتی معین، جاری می‌شود، می‌توان با انتگرال زیر بیان کرد:

$$Q=\int_{(AB)} v\,dx-u\,dy$$

ضمناً، جهت برمنحنی (AB) را باید چنان انتخاب کردکه قائم ممتد درجهت یاد شده، با جهت مثبت مماس، زاویه‌ای برابر $+\frac{\pi}{2}$ تشکیل دهد. می‌بینیم که، این مقدار، به‌طورساده، برابر است با تفاضل $\varphi(B)-\varphi(A)$، مقدارهای تابع جریان در دو انتهای منحنی.

۳) گرمایی که‌گاز جذب می‌کند. دوباره به‌مسألهٔ مربوط به مقدار گرمای حاصل از گاز ایده‌آل به جرم مفروض (مثلا یك مولکول‌گرم)، ضمن تغییر حالت آن، می‌پردازیم

[۵۵۴، ۳)]. اگر رفتار تغییرحالت گاز، با منحنی (K) برصفحهٔ V مشخص شود، در آن صورت، همان طورکه درشمارهٔ ۵۵۴، دیدیم، مقدار این گرما، با انتگرال منحنی‌الخط بیان می‌شود [(۲۳) را درهمان‌جا ببینید]:

$$U=\int_{(K)}\frac{c_p}{R}pdV+\frac{c_v}{R}Vdp$$

(از همان نام‌گذاری‌های سابق استفاده کرده‌ایم).

اگر همان طورکه معمول‌است ظرفیت‌های حرارتی c_v و c_p را (به‌ازای حجم ثابت وبه ازای فشار ثابت)، بی‌تغییر به‌حساب آوریم، شرط انتگرال پذیری، آشکارا، به هم می‌خورد. درواقع، باتوجه به این‌که $c_p\neq c_v$، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{c_p}{R}p\right)=\frac{c_p}{R}\neq\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{c_v}{R}V\right)=\frac{c_v}{R}$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شودکه: مقدار گرمای U تابعی از حالت موجودگاز نیست، بلکه به روندی بستگی داردکه، به‌ازای آن، گاز به‌این حالت درآمده است. حتی وقتی‌که با یك روند دوره‌ای (سیکلیك) سروکار داشته باشیم و گاز به‌حالت نخستین خود باز گردد، بازهم ممکن‌است مقداری گرما به دست‌آورد (یا ازدست بدهد).

اگرعبارت مقدار جزئی گرما، یعنی

$$dU=\frac{c_p}{R}pdV+\frac{c_v}{R}Vdp$$

را در $\frac{1}{T}$ ضرب‌کنیم، که در آن، $T=\frac{pV}{R}$ عبارت است از گرمای مطلق گاز، آن وقت، به این‌عبارت می‌رسیم:

$$\frac{dU}{T}=c_p\frac{dV}{V}+c_v\frac{dp}{p}$$

که به روشنی دیفرانسیل کامل است. دراین‌جا، تابع اولیه، عبارت است ازتابع

$$S=c_p\ln V+c_v\ln p$$

انتگرال منحنی‌الخط

$$\int_{(V_0,\,p_0)}^{(V,p)}\frac{dU}{T}$$

که به مسیر انتگرال‌گیری [منحنی واصل بین نقطهٔ ثابت (V_0, p_0) و نقطهٔ متغیر (V, p)] بستگی ندارد، تنها در مقدار ثابتی با تابع S اختلاف دارد. بعضی کمیت‌های فیزیکی (موسوم به آنتروپی)، که تابع‌هایی از حالت‌های گازند و نقش مهمی در محاسبه‌های مربوط به گرما به عهده دارند، با این انتگرال‌ها معین می‌شوند.

§۴. تابع‌های با تغییر محدود

۵۶۷. تعریف تابع با تغییر محدود. این بند را، درواقع، باید نوعی عقب نشینی از مسیر اصلی این فصل به‌حساب آورد. در این بند، خواننده را با طبقهٔ مهمی از تابع‌ها (تابع‌های با تغییر محدود) آشنا خواهیم کرد که به‌وسیلهٔ ژردان (C. Jordan) وارد در دانش شده است. این طبقه از تابع‌ها، در تعمیم مفهوم انتگرال معین، که در بند بعدی به آن خواهیم پرداخت، نقش مهمی به عهده دارند. علاوه بر آن، این تابع‌ها، در بسیاری از مسأله‌های دیگر آنالیز ریاضی هم، اهمیت زیادی دارند.

تابع $f(x)$ را، در بازهٔ متناهی (a, b)، معین می‌گیریم $(a<b)$. این بازه را به ترتیب دلخواهی به‌کمک نقطه‌های

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

به بخش‌های کوچکتر، تقسیم می‌کنیم (شبیه آن‌چه، برای مجموع‌های انتگرالی ریمانی، در تعیین انتگرال معین به‌عمل آوردیم) از مقدارهای مطلق تابع، نظیر بازه‌های جزئی جداگانه مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \qquad (1)$$

تمامی پرسش در این است که: آیا مجموعهٔ این‌گونه عددها، که متناظر با شیوه‌های مختلف تقسیم بازهٔ $[a, b]$ هستند، از بالا کران دارد یا نه؟

اگر مجموع (۱)، در مجموعهٔ آن‌ها، از بالا کران‌دار باشد، می‌گویند که، تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a, b]$ دارای تغییر محدود (یا واریاسیون محدود) است. ضمناً، مرز دقیق بالای این مجموع‌ها را، تغییر کامل (یا واریاسیون کامل) تابع، در بازهٔ مفروض، می‌نامند و با نماد زیر نشان می‌دهند:

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup\{v\}$$

این مفهوم را برای حالت تابع با تغییر نامحدودهم می‌توان به‌کاربرد، ولی دراین‌صورت تغییرکامل برابر $+\infty$ می‌شود.

بنابرخود تعریف مرزدقیق بالا، درهردوحالت می‌توان باانتخاب تقسیم‌های‌مناسبی ازبازهٔ $[a, b]$، تاحددلخواه، مجموع v را به تغییرکامل $\bigvee_a^b f(x)$ نزدیک کرد. به زبان دیگر، می‌توان چنان دنباله‌ای ازتقسیم‌ها راانتخاب‌کردکه، تغییرکامل، عبارت باشد ازحد دنبالهٔ نظیر مجموع‌های v.

ممکن است مسألهٔ محدود بودن تغییر تابع $f(x)$، دربازه‌ای نامتناهی و مثلا $[a, +\infty]$ مطرح باشد. تابع $f(x)$ را دربازهٔ $[a, +\infty]$ با تغییرمحدودگویند، وقتی‌که در هربخش متناهی دلخواه $[a, A]$ از آن، با تغییر محدود باشد، و تغییر کامل $\bigvee_a^A f(x)$ درمجموعهٔ آن‌ها، محدود باشد. درهمهٔ حالت‌ها، فرض می‌کنیم:

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \sup_{A>a} \left\{ \bigvee_a^A f(x) \right\} \qquad (۲)$$

توجه‌کنیم‌که، دراین تعریف‌ها، مسألهٔ مربوط به‌پیوستگی تابع $f(x)$، هیچ نقشی ندارد.

هرتابع کران‌دار یکنوا، می‌تواند مثالی برای تابع با تغییر محدود، دربازهٔ متناهی یا نامتناهی $[a, b]$، باشد. درحالت‌متناهی بودن‌بازهٔ $[a, b]$، این‌مطلب، ازاین‌جا نتیجه می‌شودکه:

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \right| = |f(b) - f(a)|,$$

به نحوی‌که $\bigvee_a^b f(x) = |f(b) - f(a)|$. برای فاصلهٔ $[a, +\infty]$، به روشنی داریم:

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \sup_{A>a} \{|f(A) - f(a)|\} = |f(+\infty) - f(a)|$$

منظور از $f(+\infty)$، مثل همیشه، عبارت است از: حد $f(A)$ $(A \to +\infty)$.

حالا، مثالی ازیک تابع پیوسته می‌آوریم‌که، باتغییر محدود، نباشد. فرض‌می‌کنیم

$$f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x} \quad (x \neq 0),\ f(0) = 0$$

ومثلا، بازهٔ $[۰، ۱]$ را درنظر می‌گیریم. اگر نقطه‌های تقسیم این بازه را، این طور انتخاب کنیم:

$$۰<\frac{۱}{۲n}<\frac{۱}{۲n-۱}<\cdots<\frac{۱}{۳}<\frac{۱}{۲}<۱$$

در آن صورت، به‌سادگی معلوم می‌شود:

$$v=v_n=۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n}=H_n$$

و[۳۶۵، ۱) را ببینید]

$$\bigvee_{۰}^{۱} f(x)=\sup\{v\}=+\infty$$

۵۶۸. طبقهٔ تابع‌های با تغییر محدود. دیدیم که، تابع یکنوا، دارای تغییر محدود است. اما می‌توان، به‌ترتیب زیر، این طبقه تابع‌ها را گسترش داد:

۱°. اگر تابع $f(x)$ دربازهٔ $[a، b]$ چنان داده شده باشدکه بتوان، این بازه را، به تعداد متناهی بخش‌های

$$[a_k، a_{k+۱}] \quad (k=۰، ۱، \ldots، m-۱; a_۰=a; a_m=b)$$

تقسیم‌کرد، به‌نحوی‌که تابع $f(x)$، در هرکدام ازآن‌ها، یکنوا باشد*، آن وقت، این‌تابع، دارای تغییر محدود است.

بازهٔ $[a، b]$ را، به‌ترتیبی دلخواه، به‌بخش‌ها تقسیم می‌کنیم و مجموع v را تشکیل می‌دهیم. چون، با اضافه‌کردن هر نقطهٔ جدیدتقسیم، مجموع v تنها می‌تواند بزرگترشود**، بنابراین، وقتی‌که همهٔ نقطه‌های a_k را در نظر بگیریم، مجموع $\bar{v}\geqslant v$ به دست می‌آید. اگر از مجموع $\bar{v}$ جمله‌هایی راکه به بازهٔ $[a_k، a_{k+۱}]$ تعلق دارند، انتخاب‌کنیم، درآن صورت (اگرمجموع آن‌هارا باعلامت (k) ــ دربالا ــ مشخص‌کنیم) خواهیم داشت:

$$\bar{v}^{(k)}=|f(a_{k+۱})-f(a_k)|.$$

---

*) چنین تابعی را، تابع قطعه به قطعه یکنوا گویند.

**) اگر نقطهٔ x'را بین x_i و $x_{i+۱}$ در نظر بگیریم، جملهٔ $|f(x_{i+۱})-f(x_i)|$ با مجموع زیر عوض می‌شود:

$$|f(x_{i+۱})-f(x')|+|f(x')-f(x_i)|\geqslant|f(x_{i+۱})-f(x_i)|$$

به نحوی که:

$$\bar{v}=\sum_{k=0}^{m-1}|f(a_{k+1})-f(a_k)|$$

از آن‌جاکه هر مجموع v، ازاین عدد تجاوز نمی‌کند، بنابراین، این عدد، تغییر کامل تابع خواهد بود.

۲°. اگرتابع $f(x)$ دربازهٔ $[a,b]$، با شرط

$$|f(\bar{x})-f(x)|\leqslant L|\bar{x}-x| \qquad (۳)$$

سازگار باشد، که درآن $L=\text{Const}$ و $\bar{x}$ و x نقطه های دلخواهی ازبازه هستند*، آن وقت، تابع دارای تغییر محدود است و ضمناً

$$\bigvee_a^b f(x)\leqslant L(b-a)$$

این حکم، از نابرابری زیر نتیجه می‌شود:

$$v=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|\leqslant L\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=L(b-a)$$

درحالت خاص:

۳°. تابع $f(x)$دربازهٔ $[a,b]$ با تغییر محدود است، وقتی‌که، دراین باره، دارای مشتق کران‌دار $f'(x)\leqslant L$ باشد (که درآن $L=\text{Const}$.)

درواقع، باتوجه بدقضیهٔ مربوط به میانگین، داریم:

$$|f(\bar{x})-f(x)|=|f'(\xi)(\bar{x}-x)|\leqslant L|\bar{x}-x|$$

$$(x<\xi<\bar{x} \quad \text{یا} \quad x>\xi>\bar{x})$$

به‌نحوی‌که شرط لیپ‌شیتز (۳) برقراراست.

براساس این ملاحظه‌ها، مثلا می‌توان محدود بودن تغییر تابع

$$f(x)=x^2\sin\frac{\pi}{x}\ (x\neq 0) \quad \text{و} \quad f(0)=0$$

---

*) این شرط‌را، معمولا، شرط لیپ شیتز (R. Lipschitz) می‌نامند.

را، درهر بازهٔ متناهی، ثابت کرد. درواقع، مشتق این تابع، کران‌دار است:

$$f'(x)=2x\sin\frac{\pi}{x}-\pi\cos\frac{\pi}{x}\ (x\neq 0)\ \text{و}\ f'(0)=0$$

ذکر این نکته جالب است که، این تابع، درهر بازه‌ای که شامل نقطهٔ ۰ باشد، «بی‌نهایت بار نوسان می‌کند»، یعنی بی‌نهایت بار از حالت صعودی به حالت نزولی و برعکس می‌رود.

طبقهٔ گستردهٔ تابع های با تغییر محدود را می‌توان با گزارهٔ زیر مشخص کرد:

۴°. اگر $f(x)$، دربازهٔ متناهی (یاحتی نامتناهی) $[a,b]$، به‌صورت انتگرالی که مرز بالای آن متغیر است، نشان داده شود:

$$f(x)=c+\int_a^x \varphi(t)dt \qquad (۴)$$

که درآن، $\varphi(t)$، دراین بازه، انتگرال پذیر مطلق است*، درآن صورت، $f(x)$، دراین بازه، دارای تغییر محدود است. ضمناً

$$\bigvee_a^b f(x)=\int_a^b |\varphi(t)|dt$$

$[a,b]$ را بازه‌ای متناهی می‌گیریم، آنوقت

$$v=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|=\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(t)dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|\varphi(t)|\,dt=\int_a^b|\varphi(t)|\,dt$$

که ازآن‌جا، حکم ثابت می‌شود.

درحالتی هم که صحبت برسر بازهٔ نامتناهی $[a,+\infty]$ باشد، کافی‌است که توجه کنیم

$$\bigvee_a^A f(x)\leqslant\int_a^A|\varphi(t)|\,dt\leqslant\int_a^{+\infty}|\varphi(t)|dt$$

---

*) یعنی ــ ولو به‌معنای غیرخاص ــ همراه باقدر مطلق خود $|\varphi(t)|$، انتگرال پذیر باشد.

یادداشت. می‌توان ثابت کرد که، هم در حالت بازهٔ متناهی و هم در حالت بازهٔ نامتناهی، برابری زیر برقرار است:

$$\bigvee_a^b f(x) = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt$$

در حالتی که تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, b)$ به‌طور ساده (و نه بطور مطلق) انتگرال‌پذیر باشد، به روشنی معلوم می‌شود که تغییر کامل آن نامتناهی است. ما به بحث تفصیلی در بارهٔ این دو حکم نمی‌پردازیم؛ تنها حکم اخیر را، ضمن چند مثال، روشن می‌کنیم.

فرض کنید $f(x) = x^2 \sin\frac{\pi}{x^2}$ $(x \neq 0)$ و $f(0) = 0$، به نحوی که

$$f'(x) = \varphi(x) = 2x\sin\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2} \quad (x \neq 0) \quad \text{و} \quad f'(0) = \varphi(0) = 0$$

در این صورت، مثلا برای $0 \leqslant x \leqslant 2$ داریم:

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$$

ولی در شمارهٔ ۴۸۲ روشن کردیم که این، انتگرالی متقارب و غیرمطلق است. با استفاده از همان اندیشه‌ای که در آن‌جا به‌کار بردیم، بازهٔ $[0, 2]$ را به‌وسیلهٔ نقطه‌های

$$0, \frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{\frac{2}{2n-1}}, \frac{1}{\sqrt{n-1}},$$

$$\sqrt{\frac{2}{2n-3}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1, \sqrt{2}, 2;$$

تقسیم می‌کنیم. برای مجموع نظیر v، به‌روشنی خواهیم داشت:

$$v > \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\sqrt{\frac{2}{2k-1}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right| \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_k$$

که از آنجا، نتیجه می‌شود:

$$\bigvee_0^2 f(x) = +\infty$$

به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که تابع

$$f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$$

در بازهٔ $[0,+\infty]$ دارای تغییر نامتناهی است [با **۴۷۶** مقایسه کنید].

۵۶۹. ویژگی‌های تابع بامتغیر محدود. همهٔ تابع‌هارا در بازهٔ متناهی $[a,b]$ در نظر می‌گیریم.

۱°. هرتابع با تغییر محدود، کران‌دار است.

درواقع، برای $a<x'\leqslant b$ داریم:

$$v'=|f(x')-f(a)|+|f(b)-f(x')|\leqslant \bigvee_a^b f(x)$$

از آنجا

$$|f(x')|\leqslant|f(x')-f(a)|+|f(a)|\leqslant|f(a)|+\bigvee_a^b f(x)$$

۲°. اگر دوتابع $f(x)$ و $g(x)$ با تغییر محدود باشند، مجموع، تفاضل و حاصل‌ضرب آن‌ها هم، تابعی باتغییر محدود است.

فرض کنیم: $s(x)=f(x)\pm g)y)$. آنوقت

$$|s(x_{i+1})-s(x_i)|\leqslant|f(x_{i+1})-f(x_i)|+|g(x_{i+1})-g(x_i)|$$

که اگر، نسبت به i، جمع کنیم:

$$\sum_i|s(x_{i+1})-s(x_i)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_i|f(x_{i+1})-f(x_i)|+\sum_i|g(x_{i+1}-g(x_i)|\leqslant$$

$$\leqslant\bigvee_a^b f(x)+\bigvee_a^b g(x)$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\bigvee_a^b s(x)\leqslant\bigvee_a^b f(x)+\bigvee_a^b g(x)$$

اکنون فرض می‌کنیم : $p(x)=f(x)\cdot g(x)$. برای $a\leqslant x\leqslant b$ فرض می‌کنیم

$$|f(x)|\leqslant K,\ g(x)\leqslant L\ \ (K, L=\text{const.})$$

[۱° را ببینید] روشن است که

$$|p(x_{i+1})-p(x_i)|=$$
$$=|f(x_{i+1})[g(x_{i+1})-g(x_i)]+g(x_i)[f(x_{i+1})-f(x_i)]|\leqslant$$
$$\leqslant K\cdot|g(x_{i+1})-g(x_i)|+L\cdot|f(x_{i+1})-f(x_i)|$$

واز آن‌جا ، به‌سادگی ، به‌دست می‌آید :

$$\bigvee_a^b p(x)\leqslant K\bigvee_a^b g(x)+L\bigvee_a^b f(x)$$

۳° . اگر $f(x)$ و $g(x)$ تابع‌های باتغییر محدود باشند وعلاوه برآن، داشته‌باشیم $|g(x)|\geqslant\sigma>0$ درآن صورت، خارج قسمت $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ هم تابع باتغییر محدود خواهد بود.

با توجه به ۲°، کافی است که محدود بودن تغییر تابع $h(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ را ثابت کنیم. داریم:

$$|h(x_{i+1})-h(x_i)|=\frac{|g(x_{i+1})-g(x_i)|}{|g(x_i)\cdot g(x_{i+1})|}\leqslant\frac{1}{\sigma^2}|g(x_{i+1})-g(x_i)|$$

به نحوی که

$$\bigvee_a^b h(x)\leqslant\frac{1}{\sigma^2}\bigvee_a^b g(x)$$

۴° . تابع $f(x)$ را، دربازهٔ $[a, b]$ $(a<b)$ ، معین می‌گیریم . اگر تابع $f(x)$ دربازهٔ $[a, b]$ باتغییرمحدود باشد، دربازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ هم‌باتغییر محدود خواهد بود وبرعکس . ضمناً

$$\bigvee_a^b f(x)=\bigvee_a^c f(x)+\bigvee_c^b f(x)\qquad(۵)$$

فرض کنیم $f(x)$ در $[a, b]$ ، دارای تغییر محدود باشد . هرکدام از بازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ را بطور جداگانه ، به‌بخش‌هائی تقسیم می‌کنیم :

$$y_0=a<y_1<\cdots<y_m=c;\ z_0=c<z_1<\cdots<z_n=b\qquad(۶)$$

که ضمناً، با این عمل، تمامی بازهٔ $[a, b]$ هم به بخش‌ها تقسیم می‌شود. مجموع‌ها را، به‌طور جداگانه برای بازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ تشکیل می‌دهیم:

$$v_1 = \sum_k |f(y_{k+1}) - f(y_k)|, \quad v_2 = \sum_i |f(z_{i+1}) - f(z_i)|$$

مجموع نظیر بازهٔ $[a, b]$ خواهد بود: $v = v_1 + v_2$ و بنابراین

$$v_1 + v_2 \leqslant \bigvee_a^b f(x)$$

درنتیجه، هرکدام ازمجموع‌های v_1 و v_2 بطورجداگانه، محدودند، یعنی تابع $f(x)$ در بازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$، تغییر محدود دارد. اگر تقسیم های (۶) را طوری بگیریم که مجموع‌های v_1 و v_2، به ترتیب، به سمت تغییرکامل میل کند، درحد به‌دست می‌آید:

$$\bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \leqslant \bigvee_a^b f(x) \qquad (۷)$$

اکنون فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$، در هریك ازبازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ با تغییر محدود باشد، بازهٔ $[a, b]$ را به دلخواه به بخش‌هایی تقسیم می‌کنیم. اگر نقطهٔ c، در ترکیب نقطه‌های تقسیم نباشد، آن‌راهم به‌این نقطه‌ها اضافه می‌کنیم؛ همان‌طورکه می‌دانیم*، با این عمل مجموع v تنها می‌تواند بزرگترشود. باحفظ علامت‌های قبلی، خواهیم داشت:

$$v \leqslant v_1 + v_2 \leqslant \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x)$$

ازاین‌جا، بلافاصله، محدودبودن تغییر $f(x)$ دربازهٔ $[a, b]$ نتیجه می‌شود:

$$\bigvee_a^b f(x) \leqslant \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \qquad (۸)$$

وبالاخره، از (۷) و (۸)، به (۵) می‌رسیم.

ازاین قضیه می‌توان درحالت خاص، نتیجه گرفت:

۵°. اگر تابع $f(x)$، دربازهٔ $[a, b]$، دارای تغییر محدود باشد، آن وقت، به ازای $a \leqslant x \leqslant b$، تغییرکامل

---

*) دومین پاورقی شمارهٔ ۵۶۸ را ببینید.

$$g(x)=\overset{x}{\underset{a}{\mathbf{V}}}f(t)$$

نسبت به x، تابعی یکنوا و صعودی (یا نزولی) خواهد بود.

درواقع، اگر داشته باشیم : $a\leqslant x'<x''\leqslant b$، آن‌گاه

$$\overset{x''}{\underset{a}{\mathbf{V}}}f(t)=\overset{x'}{\underset{a}{\mathbf{V}}}f(t)+\overset{x''}{\underset{x'}{\mathbf{V}}}f(t)$$

به‌طوری‌که

$$g(x'')-g(x')=\overset{x''}{\underset{x'}{\mathbf{V}}}f(t)\geqslant 0 \qquad (9)$$

(زیرا، بنا به‌خود تعریف تغییر کامل، مقدار آن نمی‌تواند منفی باشد).

اکنون روشن می‌شود که، تعریف تغییر کامل را، در بازهٔ نامتناهی $[a,+\infty]$ می‌توان، به‌جای (۲) به‌این صورت نوشت :

$$\overset{+\infty}{\underset{a}{\mathbf{V}}}f(x)=\lim_{A\to+\infty}\overset{A}{\underset{a}{\mathbf{V}}}f(x) \qquad (2^*)$$

با توجه به‌همین نکته است که می‌توان قضیه‌های شمارهٔ حاضر را، برای حالت بازهٔ نامتناهی هم، تعمیم داد.

۵۷۰ . معیارهای شناخت تابع باتغییر محدود . تابع $f(x)$ را ، در بازهٔ‌متناهی یا نامتناهی $[a,b]$ معین می گیریم .

۶° . برای این‌که تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a,b]$، با تغییر محدود باشد، لازم و کافی است که بتوان تابع صعودی یکنوا وکران دار $F(x)$ را، دراین بازه پیدا کرد، به‌نحوی‌که دربخش دلخواه $[x';x'']$ $(x'<x'')$ ازبازهٔ $[a,b]$ ، نمو تابع f ازلحاظ قدر مطلق، از نمو نظیر تابع F تجاوز نکند:

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant F(x'')-F(x')^*$$

(به‌طور طبیعی، تابع $F(x)$ را ــ که دارای این ویژگی است ــ می‌توان ماژوران تابع $f(x)$ نامید).

---

*) می‌شد، به نابرابری، بدون علامت قدر مطلق اکتفا کرد:

$$f(x'')-f(x')<F(x'')-F(x')$$

لازم بودن شرط ازاین‌جا ناشی می‌شود که ، نقش ماژوران را برای تابع با تغییر محدود، می‌توان مثلا به عهدهٔ تابع

$$g(x)=\overset{x}{\underset{a}{\mathbf{V}}}f(t)$$

گذاشت که ، بنا بر ۵°، صعودی یکنوا و کران‌دار است. بنابراین

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant g(x'')-g(x')=\overset{x''}{\underset{x'}{\mathbf{V}}}f(t)$$

ازخود تعریف تغییر کامل تابع نتیجه می‌شود.

کافی بودن شرط ، بـرای حالت بازهٔ متناهی، فـوراً ، از نابرابـری زیر نتیجه می‌شود :

$$v=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}[F(x_{i+1})-F(x_i)]=F(b)-F(a)$$

و برای بازهٔ نامتناهی، ازعبور به‌سمت حد، به‌دست می‌آید.

نوع دیگری ازمعیار است که اهمیت زیادی دارد :

۷°. برای این‌که تابع $f(x)$ درباز‌هٔ $[a,b]$ دارای تغییر محدود باشد، لازم و کافی است که تابع ، دراین بازه ، به‌صورت تفاضل دو تابع صعودی یکنوا وکران دار ، نمایش داده شود:

$$f(x)=g(x)-h(x) \qquad (۱۰)$$

شرط لازم است . بنابـر ۶°، برای تابع $f(x)$ باتغییر محـدود، ماژوران صعودی یکنوا و کران‌دار $F(x)$ وجود دارد . فرض می‌کنیم:

$$g(x)=F(x),\quad h(x)=F(x)-f(x)$$

به‌نحوی کـه (۱۰) برقرار باشد. ضمناً، تابع $h(x)$ یکنوا است، زیـرا بنا بر تعریف ماژوران، به‌ازای $x'<x''$ داریم :

$$h(x'')-h(x')=[F(x'')-F(x')]-[f(x'')-f(x')]\geqslant 0$$

کافی بودن شرط ازاین‌جا روشن می‌شود که ، باتوجه به وجود برابری (۱۰)، تابع

$$F(x)=g(x)+h(x)$$

ماژوران می‌شود، زیرا

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant[g(x'')-g(x')]+[h(x'')-h(x')]=$$
$$=F(x'')-F(x')$$

به‌عنوان تمرین، به‌خواننده پیشنهاد می‌شود:

۱) با اتکای به‌این معیارها، حکم‌های ۱° تا ۴° شماره قبل را دوباره ثابت کند.

۲) برای طبقه‌های تابع‌های با تغییر محدود، که درشمارهٔ **۵۶۸** مورد بررسی قرار گرفت، مستقیماً وجود ماژوران یکنوا و امکان نمایش به صورت تفاضل‌های یکنوا را ثابت کنید.

درمورد قضیهٔ ۷°، نکتهٔ تکمیلی زیررا یادآوری می‌کنیم. چون تابع‌های g و h کران‌دار هستند، می‌توان مقدار ثابتی پیدا کرد که اگر، آن‌را، به هردوی آن‌ها اضافه کنیم، هردو تابع مثبت شوند. به‌همین‌ترتیب، می‌توان با اضافه‌کردن یك تابع صعودی (به‌معنای اکید خود)، ولی کران‌دار (مثل $arctg\,x$) به‌تابع‌های g و h، به‌چنان صورتی از (۱۰) رسید که در آن‌جا، هردو تابع، صعودی (به‌معنای اکید خود) باشند.

این‌که توانستیم تابع با تغییر محدودرا، به‌مفهومی، منجر به‌تابع یکنواکنیم [۷° را ببینید]، نباید موجب این توهم شودکه، گویا، رفتار تابع با تغییر محدود «ساده»است: در واقع، نوسان نامتناهی تابع

$$f(x)=x^2\sin\frac{\pi}{x}\ (x\neq 0),\quad f(0)=0$$

هم [**۵۶۸** را ببینید]، این امکان را به وجود می‌آورد که، آن را، به‌صورت تفاضل دو تابع یکنوا درآوریم.

باوجود این، در ارتباط با نمایش (۱۰)، برخی از ویژگی‌های تابع‌های یکنوا، به تابع‌های با تغییرمحدود، منتقل می‌شود. مثلا، اگر به‌یاد بیاوریم‌که، درتابع یکنوای کران‌دار $f(x)$، به‌ازای $x=x_0$ دلخواه، حد یك‌طرفه، از راست یا چپ، وجود دارد:

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x),\quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)\qquad(11)$$

[۷۱، ۱°]، آن وقت بااستفاده از این ویژگی، برای هرکدام از دو تابع g و h، نتیجه می‌گیریم:

۸°. برای تابع $f(x)$ با تغییر محدود در بازهٔ $[a, b]$، در نقطهٔ دلخواه $x=x_0$ از

این بازه، حدهای یک‌طرفهٔ متناهی (۱۱) وجود دارند*.

۵۷۱. تابع‌های پیوستهٔ با تغییر محدود

۹°. تابع $f(x)$ را با تغییر محدود در بازه $[a, b]$ درنظر می‌گیریم. اگر $f(x)$ در نقطه‌ای مثل $x=x_0$ پیوسته باشد، آن‌وقت تابع

$$g(x)=\bigvee_a^x f(t)$$

هم، درهمین نقطه پیوسته است.

فرض می‌کنیم $x_0<b$ و ثابت می‌کنیم، $g(x)$ در نقطهٔ x_0، ازسمت راست پیوسته است. برای این‌منظور، $\varepsilon>0$ دلخواه را اختیار و بازهٔ $[x_0, b]$ را به‌وسیلهٔ نقطه‌های

$$x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

به بخش‌هایی تقسیم می‌کنیم، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$v=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|>\bigvee_{x_0}^{b} f(t)-\varepsilon \qquad (۱۲)$$

باتکیه برپیوستگی تابع $f(x)$، می‌توان x_1 را آن‌قدر نزدیک به x_0 فرض کرد که نابرابری زیر برقرار باشد:

$$|f(x_1)-f(x_0)|<\varepsilon$$

(در صورت لزوم، می‌توانستیم، نقطهٔ تقسیم دیگری هم اضافه کنیم که، در این صورت مجموع v تنها می‌توانست افزایش یابد).

از (۱۲) نتیجه می‌شود که:

$$\bigvee_{x_0}^{b} f(t)<\varepsilon+\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|<$$

$$<2\varepsilon+\sum_{i=1}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|\leqslant 2\varepsilon+\bigvee_{x_1}^{b} f(t)$$

---

*) روشن است که، اگر x_0 یکی از دو انتهای بازه باشد، تنها یکی از حدها می‌تواند وجود داشته باشد.

یعنی:

$$\bigvee_{x_0}^{x_1} f(t) < 2\varepsilon$$

و یا بالاخره

$$g(x_1) - g(x_0) < 2\varepsilon$$

ازاین‌جا، می‌توان نوشت:

$$0 \leqslant g(x_0 + 0) - g(x_0) < 2\varepsilon$$

که درنتیجه، باتوجه به‌نامشخص‌بودن ε

$$g(x_0 + 0) = g(x_0)$$

به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد (به‌ازای $x_0 > a$)

$$g(x_0 - 0) = g(x_0)$$

یعنی $g(x)$، در نقطهٔ x_0، ازسمت چپ پیوسته است.

ازقضیه‌ای که ثابت کردیم، می‌توان نتیجه گرفت:

۱۰°. هرتابع پیوسته باتغییر محدود را می‌توان به‌صورت تفاضل دوتابع صعودی پیوسته نمایش داد.

درواقع، اگر به اثبات گزارهٔ ۷° برگردیم (قسمت مربوط به لازم بودن شرط)، و تابع

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

را به‌عنوان ماژوران (محدودکنندهٔ) یکنوا درنظر بگیریم، که باتوجه به ۹° پیوسته است، آن‌وقت تبدیل مطلوب هم به‌دست می‌آید.

درخاتمه نشان می‌دهیم که، برای تابع پیوسته، درتعریف تغییرکامل

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup\{v\}$$

می‌توان به‌جای سوپرمم، ازحد استفاده‌کرد (چه درحالت متناهی‌بودن تغییرکامل وچه در حالت نامتناهی‌بودن آن).

۱۱°. فرض کنیم تابع $f(x)$، در حوزهٔ متناهی $[a, b]$، پیوسته باشد. این بازه را به‌وسیلهٔ نقطه‌های

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$$

تقسیم کنیم و سپس، مجموع

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

را تشکیل دهیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{\lambda \to 0} v = \bigvee_a^b f(x) \qquad (۱۳)$$

که در آن: $\lambda = \max (x_{i+1} - x_i)$*.

همانطور که قبلاً گفتیم، مجموع v با اضافه‌شدن نقطهٔ تقسیم جدید، کاهش پیدا نمی‌کند** ازطرف دیگر، اگر این نقطهٔ جدید، درفاصلهٔ بین x_k و x_{k+1} بیفتد، آن وقت، افزایش مجموعهٔ v، که به خاطر وجود این نقطهٔ جدید حاصل می‌شود، ازدو برابر نوسان تابع $f(x)$ در بازهٔ $[x_k, x_{k+1}]$ تجاوز نمی‌کند.

با توجه به‌این مطلب، عدد

$$A < \bigvee_a^b f(x)$$

را انتخاب، ومجموع v^* را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$v^* > A \qquad (۱۴)$$

فرض می‌کنیم، این مجموع متناظر با تقسیم زیر باشد:

$$x_0^* = a < x_1^* < \cdots < x_n^* = b$$

اکنون $\delta > 0$ را آن‌قدر کوچك اختیار می‌کنیم که نابرابری

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{v^* - A}{4m}$$

---

*) در این جا هم، به همان نوع عبورحدی توجه داریم که درمجموع‌های ریمانی ومجموع‌های داربو سروکار داشتیم [۲۵۹، ۳۰].

**) دومین پاورقی ۵۵۸ را ببینید.

تنها به‌ازای $|x''-x'|<\delta$ برقرار باشد (که با توجه به پیوستگی یکنواخت تابع f، عملی است)، ثابت می‌کنیم که، برای هرتقسیم دلخواهی که متناظر با $\lambda<\delta$ باشد، داریم:

$$v>A \qquad (۱۵)$$

با مفروض‌بودن روش تقسیم (I)،روش جدید تقسیم (II) را، از (I) و با افزودن همهٔ نقطه های x_k^* ، تشکیل می‌دهیم . اگر روش (II) نظیر مجموع v_0 باشد ، در آن صورت:

$$v_0 \geqslant v^* \qquad (۱۶)$$

از طرف دیگر، روش (II) ، حداکثر، با افزایش m بار، و هر بار یک نقطه از (I) به دست می‌آید . چون هر افزایش ، موجب می‌شود تا مجموع v، کمتر از $\frac{v^*-A}{۲m}$، افزایش یابد، بنابراین :

$$v_0-v<\frac{v^*-A}{۲}$$

ازاین‌جا ، از (۱۶) و (۱۴) نتیجه می‌شود:

$$v>v_0-\frac{v^*-A}{۲}\geqslant\frac{A+v^*}{۲}>A$$

به این ترتیب ، به‌ازای $\lambda<\delta$ ، (۱۵) برقرار است ، ولی ازآن‌جاکه همیشه

$$v\leqslant \bigvee_a^b f(x)$$

بنابراین ، (۱۴) برقرار است . آن‌چه می‌خواستیم ، ثابت شد .

۵۷۲. منحنی‌های راستاپذیر . مفهوم تابع با تغییر محدود، درمسألهٔ مربوط به راستاپذیری منحنی‌ها هم ، کاربرد دارد ؛ ضمناً این مفهوم، برای نخستین بار، به وسیلهٔ ژردان وارد شده است . بااین بحث ، مطلب مربوط به‌این بند را پایان می‌دهیم .

فرض‌کنیم، منحنی (K) ، بامعادله‌های پارامتری

$$x=\varphi(t)\ ,\ y=\psi(t) \qquad (۱۷)$$

داده شده باشد؛ تابع های $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ را پیوسته می‌گیریم . ضمناً فرض می‌کنیم که منحنی دارای نقطهٔ تکراری نباشد.

اگرراس‌های خط شکستهٔ محاطی‌را درنقطه‌هایی از منحنی، نظیر مقدارهای‌پارامتر:

$$t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T \qquad (۱۸)$$

بگیریم ، برای محیط خط شکسته ، خواهیم داشت :

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2}$$

همانطور که می‌دانیم [۲۴۷]، طول دو کمان منحنی، حدبالای مجموعهٔ همهٔ محیط‌های p است. اگر این حد ، متناهی باشد ، منحنی را راستاپذیر گویند . قبلا ، باشرط راستاپذیری منحنی آشنا شده‌ایم [جلداول ، ۲۷۸] قضیهٔ زیر، شرط لازم وکافی را، برای راستاپذیر بودن منحنی، به‌دست می‌دهد .

قضیهٔ ژردان . برای این که منحنی (۱۷) راستاپذیر باشد، لازم و کافی است که تابع‌های $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ ، هردو دارای تغییر محدود دربازهٔ $[t_0,T]$ باشند .

شرط لازم است . اگرمنحنی راستاپذیر، دارای طول s باشد، درآن صورت، برای تقسیم دلخواه (۱۸) از بازهٔ $[t_0,T]$ ، داریم:

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi[t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2}\leqslant s$$

ازآن‌جا ، بنابرنابرابری روشن

$$|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|\leqslant|\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2}$$

نتیجه می‌شود :

$$\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|\leqslant s$$

وبنابراین ، تابع $\varphi(t)$ ، به‌واقع ، دارای تغییر محدود است.

شرط کافی‌است. اکنون فرض‌می‌کنیم، هردوتابع $\varphi(t)$ و $\psi(t)$، دارای تغییرمحدود باشند. با توجه به نابرابری روشن

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|+\sum_{i=0}^{n-1}|\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)|$$

می‌توان گفت که ، همهٔ عددهای p ، مثلا باعدد:

$$\bigvee_{t_0}^{T}\varphi(t)+\bigvee_{t_0}^{T}\psi(t)$$

از بالا، کران‌دار هستند. ازاین جا، بنا بر آن‌چه در بالا ثابت شد، راستاپذیری منحنی (K) نتیجه می‌شود.

دو نکتهٔ دیگر را هم اضافه کنیم:

از آن‌چه گفته شد، نتیجه می‌شود که، طول s منحنی (۱۷)، در نابرابری زیر صدق می‌کند:

$$s\leqslant\bigvee_{t_0}^{T}\varphi(t)+\bigvee_{t_0}^{T}\psi(t)$$

با در نظر گرفتن کمان متغیر $s=s(t)$، که پاسخ‌گوی بازهٔ $[t_0, t]$ تغییر پارامتر است، نابرابری بالا را در بازهٔ $[t, t+\Delta t]$ به‌کار می‌بریم $(\Delta t>0)$. در این صورت

$$0<\Delta s<\bigvee_{t}^{t+\Delta t}\varphi(t)+\bigvee_{t}^{t+\Delta t}\psi(t)$$

از آن‌جاکه، با بی‌نهایت کوچک بودن Δt، هردو جملهٔ سمت راست [بنا بر ۹،۵۷۱°] وهمراه با آن‌ها Δs، بی‌نهایت کوچک می‌شوند، می‌توان نتیجه گرفت: برای منحنی راستاپذیر پیوسته، کمان متغیر $s(t)$ تابعی پیوسته از پارامتر می‌شود.

چون این تابع، به‌طور یکنوا، از ۰ تا طول S تمامی منحنی صعود می‌کند، بنابراین به‌ازای هرمقدار دلخواه عدد طبیعی n می‌توان منحنی را به n بخش تقسیم کرد، به‌نحوی که طول هربخش برابر $\frac{S}{n}$ باشد [قضیهٔ کوشی، ۸۲]. اگرصفحه را باشبکه‌ای ازمربع‌های به‌ضلع $\frac{S}{n}$ بپوشانیم، هریك ازبخش‌های مزبور، نمی‌تواند با بیش ازچهارتا از این مربع‌ها برخورد داشته باشد. به این ترتیب، مجموع مساحت‌های همهٔ مربع‌هایی که با منحنی برخوردارند، در هرحالت، از $4n.\frac{S^2}{n^2}$ تجاوز نمی‌کند ومی‌تواند به قدر دلخواه کوچك شود: منحنی دارای مساحت صفر است.

از این‌جا، این نتیجهٔ جالب به‌دست می‌آید: حوزهٔ محدود به منحنی راستاپذیر (یاچند منحنی از این گونه)، آشکارا تربیع پذیر، یعنی دارای مساحت است [۳۳۷].

§۵. انتگرال ستیلتیس

۵۷۳. تعریف انتگرال ستیلتیس. انتگرال ستیلتیس (Th. J. Stieltjes)، عبارت است از تعمیم مستقیم انتگرال معین ریمان [**۲۹۵**]. تعریف این انتگرال، چنین است: دو تابع کران‌دار $f(x)$ و $g(x)$ را، در بازهٔ $[a, b]$ در نظر می‌گیریم. بازهٔ $[a, b]$ را به وسیلهٔ نقطه‌های

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \qquad (۱)$$

تقسیم و فرض می‌کنیم: $\lambda = \max \Delta x_i$. با انتخاب نقطهٔ ξ_i در هر یك از بخش‌های $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$، مقدار $f(\xi_i)$ از تابع $f(x)$ را محاسبه و آن در نمو تابع $g(x)$، نظیر بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$، یعنی در

$$\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i)$$

ضرب می‌کنیم. بالاخره، مجموع همهٔ این حاصل‌ضرب‌ها را تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i) \qquad (۲)$$

همین مجموع است که مجموع انتگرالی ستیلتیس نامیده می‌شود.

حد متناهی مجموع ستیلتیس، وقتی که $\lambda = \max \Delta x_i$ به سمت صفر میل کند، انتگرال ستیلتیس تابع $f(x)$، نسبت به تابع $g(x)$، نامیده و به این ترتیب، نشان داده می‌شود:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi) \Delta g(x_i)^* \qquad (۳)$$

برای تأکید براین مطلب که با انتگرال ستیلتیس سروکار داریم، معمولا، آن را با این علامت‌ها، نشان می‌دهند:

---

*) برای مشخص بودن وضع، فرض کرده‌ایم: $a < b$؛ حالت $a > b$ را هم می‌توان به ترتیب مشابهی بررسی کرد. ضمناً، باتوجه به برابری $\int_a^b = -\int_b^a$ ، این دو حالت، مستقیماً، به یکدیگر تبدیل می‌شوند.

$$(s)\int_a^b f(x)dg(x) \quad \text{یا} \quad \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{S}}} f(x)dg(x)$$

دراین‌جا، حد را به همان معنای حالت انتگرال معین معمولی می‌گیریم. به زبان دقیق‌تر: عدد I را انتگرال ستیلتیس می‌نامیم، وقتی‌که، برای $\varepsilon>0$ دلخواه، بتوان عدد $\delta>0$ را طوری پیدا کرد که، تنها با تقسیم بازهٔ $[a, b]$ به بخش‌ها، به نحوی‌که داشته باشیم: $\lambda<\delta$؛ بلافاصله نابرابری زیر برقرار باشد:

$$|\sigma - I|<\varepsilon$$

به هر ترتیبی‌که ξ_i را در بازه‌های متناظر انتخاب کرده باشیم.

اگر انتگرال (۳) وجود داشته باشد، می‌گویند: تابع $f(x)$ دربازهٔ $[a, b]$، برحسب تابع $g(x)$، انتگرال پذیر است.

می‌بینیم‌که تنها اختلاف این تعریف با تعریف معمولی انتگرال ریمان (کـه البته، اختلافی اساسی است)، دراین است که، $f(\xi_i)$، به جای نمـو Δx_i متغیر مستقل، درنمو $\Delta g(x_i)$ تابع دوم ضرب می‌شود. به‌این ترتیب، انتگرال ریمان، حالت خاصی‌ازانتگرال ستیلتیس می‌شود: در انتگرال ریمان، بـه جای تابع $g(x)$، خـود متغیر مستقل x انتخـاب شده است:

$$g(x)=x$$

۵۷۴. شرط‌های‌کلی وجود انتگرال ستیلتیس. به حالتی اکتفا می‌کنیم که تابع $g(x)$، بـه طور یکنوا، صعـودی باشد. در این حـالت، به ازای $a<b$، همیشه داریم: $\Delta g(x_i)>0$، شبیه‌آن‌که قبلا داشتیم $\Delta x_i>0$. برای رسیدن به این نتیجه، باید به‌جای Δx_i، $\Delta g(x_i)$ را در نظر بگیریم وآن چه را درشماره‌های **۲۹۶** و **۲۹۷** گفته‌ایم، کلمه به‌کلمه تکرارکنیم.

شبیه مجموع‌های داربو، دراین‌جا هم، مجموع‌های

$$s=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta g(x_i), \quad S=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta g(x_i)$$

را تشکیل می‌دهیم‌که، درآن‌ها، m_i و M_i، به ترتیب، عبارتند از مرزهای دقیق پایینی و بالایی تابع $f(x)$ دربازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$. این مجموع‌ها را، مجموع‌های پایینی و بالایی داربو ــ ستیلتیس می‌نامیم.

قبل ازهمه روشن است‌که (ضمن یك تقسیم) داریم:

$$s \leqslant \sigma \leqslant S$$

ضمناً، s و S، عبارتند از مرزهای دقیق مجموع‌های ستیلتیسی σ.

مجموع‌های داربو ـ ستیلتیس هم، شبیه حالت ساده [۲۹۶]، دارای دو ویژگی هستند:

ویژگی اول. اگر به نقطه‌های تقسیم موجود، نقطه‌های تازه‌ای بیفزاییم، در آن صورت، مجموع پایینی داربو ـ ستیلتیس تنها می‌تواند ترقی‌کند و مجموع بالایی‌آن تنها می‌تواند کاهش یابد.

ویژگی دوم: هیچ‌کدام از مجموع‌های پایینی داربو ـ ستیلتیس از هیچ کدام از مجموع‌های بالایی‌آن ـ ولو مربوط به تقسیم دیگری از بازه باشد ـ تجاوز نمی‌کند.

اگر انتگرال‌های پایینی و بالایی داربو ـ ستیلتیس را تشکیل دهیم:

$$I_* = \sup\{s\} \quad \text{و} \quad I^* = \inf\{S\}$$

معلوم می‌شود که

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S$$

بالاخره، به‌کمك مجموع‌های داربو ـ ستیلتیس، بـه سادگی می‌توان، معیار اصلی وجود انتگرال ستیلتیس را، برای حالت مفروض، معین کرد:

قضیه. برای وجود انتگرال ستیلتیس، لازم و کافی‌است که داشته باشیم:

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$$

یا

$$\lim_{\lambda \to 0} = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i) = 0 \qquad (۴)$$

که در آن، ω_i عبارت است از نوسان $M_i - m_i$ تابع $f(x)$ در بازهٔ iام $[x_i, x_{i+1}]$.

تمامی اثبات، کاملا شبیه اثباتی است که در شماره‌های **۲۹۶** و **۲۹۷** داشتیم و، به همین مناسبت، آن را به خواننده وامی‌گذاریم.

درشمارهٔ بعد، ازاین معیار، برای پیداکردن دوطبقهٔ مهـم تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$، که برای آن‌ها انتگرال‌ستیلتیس وجود داشته باشد، استفاده خواهیم کرد.

۵۷۵. حالت‌های وجود انتگرال ستیلتیس.

۱. اگر تابع $f(x)$ پیوسته، و تابـع $g(x)$ دارای تغییر محـدود باشد، آن وقت،

انتگرال ستیلتیس

$$\int_a^b f(x)dg(x) \qquad (۵)$$

وجود دارد.

ابتدا فرض می‌کنیم، $g(x)$، به طور یکنوا صعودی باشد؛ معیار شمارهٔ پیش را به کار می‌بریم. از روی $\varepsilon>0$ مفروض دلخواه، با توجه به‌پیوستگی یکنواخت تابع $f(x)$، می‌توان $\delta>0$ را چنان پیدا کرد که، نوسان $f(x)$، در حوزهٔ دلخواه به طول کمتر از δ، از $\dfrac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$ کوچکتر شود. اکنون فرض می‌کنیم، بازهٔ $[a, b]$ را، چنان تقسیم کرده باشیم که نابرابری $\lambda=\max\Delta x_i<\delta$ برقرار باشد. آن وقت، هر $\omega_i<\dfrac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$ و

$$\sum_i \omega_i \Delta g(x_i)<\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\sum_i[g(x_{i+1})-g(x_i)]=\varepsilon$$

که از آن جا، شرط (۴) و، سپس، وجود انتگرال، نتیجه می‌شود.

درحالت کلی، اگر $g(x)$ با تغییرمحدود باشد، می‌توان آن را به‌صورت تفاضل دو تابع صعودی کران‌دار نشان‌داد: $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$ [۵۷۰، ۷°] و، بنابر آن مجموع ستیلتیس نظیر تابع $g(x)$، به‌این صورت، تبدیل می‌شود:

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g_1(x_i)-\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g_2(x_i)=\sigma_1-\sigma_2$$

باتوجه به‌آن چه‌قبلا ثابت کردیم، هریك ازمجموع‌های σ_1 و σ_2، به ازای $\lambda\to 0$، به سمت حدی متناهی میل می‌کنند و، در نتیجه، مجموع σ هم دارای حدی متناهی‌است.

می‌توان‌شرط‌های مربوط به‌تابع $f(x)$را تضعیف و، درعین‌حال، شرط‌های‌مربوط به تابع $g(x)$ را، تقویت کرد:

II. اگر تابع $f(x)$، به مفهوم ریمانی، در $[a,b]$ انتگرال‌پذیرباشد، و $g(x)$ درشرط لایب‌نیتس صدق کند

$$|g(\bar{x})-g(x)|\leqslant L(\bar{x}-x) \qquad (۶)$$

$$(L=\text{const},\ a\leqslant x<\bar{x}\leqslant b)$$

آن وقت، انتگرال (۵) وجود دارد.

برای این‌که بتوانیم، دراین‌جا هم، از معیار بالا استفاده‌کنیم، ابتدا فرض می‌کنیم که تابع $g(x)$، علاوه براین‌که باشرط (۶) سازگاراست، ضمناً، صعودی یکنوا هم باشد. باتوجه به (۶) روشن است‌که $\Delta g(x_i)\leqslant L\Delta x_i$، به‌نحوی‌که

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta g(x_i)\leqslant L\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$$

ولی مجموع آخری، به‌ازای $\lambda\to 0$، باتوجه به انتگرال‌پذیری تابع $f(x)$ (به مفهوم ریمانی) [۲۹۷]، به سمت صفرمیل می‌کند؛ بنابراین، مجموع اول هم به‌سمت صفر میل خواهدکردکه، وجود انتگرال(۵) را، ثابت می‌کند.

در حالت‌کلی، تابع $g(x)$ را،که در شرط لایب‌نیتس صدق می‌کند، می‌توان به صورت تفاضل زیرنوشت:

$$g(x)=Lx-[Lx-g(x)]=g_1(x)-g_2(x)$$

تابع $g_1(x)=Lx$، به روشنی، با شرط لایب نیتس سازگار است و، ضمناً، به‌طوریکنوا صعودی است. این‌حکم، برای $g_2(x)=Lx-g(x)$ هم درست است، زیرا بنابر (۶)، به‌ازای $a\leqslant x<\bar{x}\leqslant b$

$$g_2(\bar{x})-g_2(x)\leqslant L(\bar{x}-x)+[g(\bar{x})-g(x)]\geqslant 0$$

و

$$|g_2(\bar{x})-g_2(x)|\leqslant L(\bar{x}-x)+|g(\bar{x})-g(x)|\leqslant 2L(\bar{x}-x)$$

که دنبالهٔ بحث را می‌توان مثل حالت قبل انجام داد.

III. اگر تابع $f(x)$، به مفهوم ریمانی، انتگرال‌پذیر باشد وتابع $g(x)$ رابتوان به صورت انتگرالی‌که مرز بالای آن متغیر است، نشان داد:

$$g(x)=c+\int_a^x\varphi(t)dt \qquad (۷)$$

که در آن، $\varphi(t)$ دربازهٔ $[a, b]$، به‌طور مطلق انتگرال پذیر است، درآن‌صورت، انتگرال (۵) وجود دارد.

فرض‌کنیم $\varphi(t)\geqslant 0$، به نحوی‌که $g(x)$، صعودی یکنوا باشد. اگر $\varphi(t)$، به

معنای خاص، انتگرال‌پذیرو، در نتیجه، کران‌دار باشد، آن وقت، به‌ازای $a \leqslant x < x' \leqslant b$، داریم:

$$|g(\bar{x}) - g(x)| = \left| \int_x^{\bar{x}} \varphi(t)dt \right| \leqslant L(\bar{x} - x)$$

به‌این ترتیب، $g(x)$ در شرط لایب‌نیتس صدق می‌کند و، به‌اعتبار II، انتگرال وجوددارد.

اکنون فرض می‌کنیم، $\varphi(t)$، به معنای غیرخاص، انتگرال‌پذیر باشد. حالتی را در نظر می‌گیریم که تنها یك نقطهٔ خاص، ومثلا نقطهٔ b، وجود داشته باشد. قبل‌از همه $\varepsilon > 0$ دلخواه را اختیار، و $\eta > 0$ را چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\int_{b-\eta}^{b} \varphi(t)dt < \frac{\varepsilon}{2\Omega} \qquad (8)$$

که در آن، Ω، عبارت است از نوسان کلی تابع $f(x)$ در بازهٔ مفروض.

بازهٔ $[a, b]$ را، به‌دلخواه، به بخش‌هایی تقسیم می‌کنیم و مجموع

$$\sum = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i)$$

را تشکیل می‌دهیم: این مجموع، به دو مجموع تبدیل می‌شود:

$$\sum = \sum' + \sum''$$

از این دومجموع، اولی نظیر بازه‌هایی است که همهٔ آن‌ها در بازهٔ $[a, b - \frac{\eta}{2}]$ قراردارند و، دومی، متناظر با بقیهٔ بازه‌هاست. آخری‌ها، تنها وقتی در بازهٔ $[b - \eta, b]$ واقع‌اند که داشته باشیم: $\lambda = \max \Delta x_i < \frac{\eta}{2}$، که در این صورت، بنا به (۸) خواهیم داشت:

$$\sum'' < \Omega \int_{b-\eta}^{b} \varphi(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

از طرف دیگر، چون تابع $\varphi(t)$، در بازهٔ $[a, b - \frac{\eta}{2}]$، به معنای خاص، انتگرال پذیر است، بنابراین طبق آن چه ثابت کردیم، برای λ به قدر کافی کوچك، مجموع $\sum'$ هم از $\frac{\varepsilon}{2}$

کوچکتر می‌شود. ازاین جا، (۴) نتیجه می‌شود که می‌خواستیم ثابت کنیم.

در حالت کلی، وقتی که تابع $\varphi(t)$ در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر مطلق است، تابع‌های

$$\varphi_1(t)=\frac{|\varphi(t)|+\varphi(t)}{2}, \varphi_2(t)=\frac{|\varphi(t)|-\varphi(t)}{2}$$

را درنظر می‌گیریم، که به روشنی، غیرمنفی و در بازهٔ مفروض انتگرال‌پذیرند. چون

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)-\varphi_2(t)$$

مساله دوباره به‌حالتی منجر می‌شود که قبلا بررسی کرده‌ایم.

یادداشت. فرض می‌کنیم، تابع $g(x)$ در بازهٔ $[a, b]$، پیوسته و، به‌جز در تعدادی متناهی از نقطه‌ها، دارای مشتق $g'(x)$ باشد؛ ضمناً، این مشتق* (به معنای خاص یا غیرخاص)، از a تا b، انتگرال‌پذیر باشد؛ آن وقت، همان طور که می‌دانیم [۴۷۰، یادداشت]، دستور از نوع (۷) برقرار است:

$$g(x)=g(a)+\int_a^x g'(t)dt$$

اگر $g'(x)$، انتگرال‌پذیر مطلق باشد، آن وقت، می‌توان مطلبی راکه در III شرح‌دادیم، در مورد تابع $g(x)$ هم مورد استفاده قرار داد.

۵۷۶. ویژگی‌های انتگرال ستیلتیس. از تعریف انتگرال ستیلتیس، می‌توان مستقیماً به‌نتیجه‌های زیر رسید:

$$۱^\circ.\ \int_a^b dg(x)=g(b)-g(a);$$

$$۲^\circ.\ \int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]dg(x)=\int_a^b f_1(x)dg(x)\pm\int_a^b f_2(x)dg(x);$$

$$۳^\circ.\ \int_a^b f(x)d[g_1(x)\pm g_2(x)]=\int_a^b f(x)dg_1(x)\pm\int_a^b f(x)dg_2(x);$$

$$۴^\circ.\ \int_a^b kf(x)d[lg(x)]=kl\cdot\int_a^b f(x)dg(x)\quad (k, l=\text{const.})$$

---

*) به شرطی که مقدار آن، در نقطه‌هایی که وجود ندارد، به دلخواه انتخاب شود.

ضمناً، در حالت‌های ۲°، ۳°و ۴°، ازوجود انتگرال‌های سمت راست، وجود انتگرال‌های سمت چپ، نتیجه می‌شود.

$$5^\circ.\ \int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^c f(x)dg(x)+\int_c^b f(x)dg(x)$$

بافرض $a<c<b$ و این‌که، هر سه انتگرال، وجود داشته باشند.

برای اثبات این دستور، کافی است، ضمن تشکیل مجموع ستیلتیس برای انتگرال $\int_a^b f\,dg$، نقطهٔ c را هم، به نقطه‌های تقسیم بازهٔ $[a, b]$ اضافه‌کنیم.

به مناسبت دستور اخیر، نکته‌هایی را یاد آوری می‌کنیم. قبل از همه، از وجود انتگرال $\int_a^b f\,dg$، می‌توان وجود انتگرال‌های $\int_a^c f\,dg$ و $\int_c^b f\,dg$ را نتیجه گرفت.

برای روند حدی که، به‌کمك آن، از مجموع‌های ستیلتیسی به انتگرال ستیلتیس می‌رسیم، اصل تقارب بولزانو ـ کوشی هم برقرار است. بنابراین، از روی $\varepsilon>0$ مفروض، و با توجه به وجود انتگرال $\int_a^b f\,dg$، می‌توان $\delta>0$ را طوری پیدا کرد که، هردو مجموع دلخواه σ و $\bar{\sigma}$ ستیلتیسی، که متناظر با λ و $\bar{\lambda}<\delta$ هستند، اختلافی کوچکتر از ε داشته باشند. ضمناً، اگر نقطهٔ c درترکیب نقطه‌های تقسیم وارد شده باشد و نقطه‌های تقسیم بازهٔ $[a, b]$، در هر دو حالت، یکی باشد، آن وقت، تفاضل $\sigma-\bar{\sigma}$، به تفاضل $\sigma_1-\bar{\sigma}_1$ دو مجموع ستیلتیس متعلق به بازهٔ $[a, c]$ تبدیل می‌شود، زیرا جمله‌های دیگر، دو به دو حذف می‌شوند. اکنون، با استفاده از اصل تقارب بولزانو ـ کوشی دربازهٔ $[a, c]$ و مجموع‌های ستیلتیسی مربوط به‌آن، می‌توان وجود انتگرال $\int_a^c f\,dg$ را نتیجه گرفت. وجود انتگرال $\int_c^b f\,dg$ هم، به همین ترتیب، ثابت می‌شود.

باید به‌خصوص، روی این واقعیت تاکید کنیم که: از وجود انتگرال‌های $\int_a^c f\,dg$ و $\int_c^b f\,dg$ نمی‌توان، در حالت کلی، وجود انتگرال $\int_a^b f\,dg$ را نتیجه گرفت.

برای این که این مطلب را باور کنیم، کافی است به این مثال توجه کنیم. فرض می‌کنیم، برای تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$، در بازهٔ $[-۱, ۱]$، نابرابری‌های زیر برقرار باشند:

$$f(x)=\begin{cases}۰ & (-۱\leqslant x\leqslant ۰)\\ ۱ & (۰<x\leqslant ۱)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}۰ & (-۱\leqslant x<۰)\\ ۱ & (۰\leqslant x\leqslant ۱)\end{cases}$$

به‌سادگی دیده می‌شود که انتگرال‌های

$$\int_{-۱}^{۰} f(x)dg(x) \quad \text{و} \quad \int_{۰}^{۱} f(x)dg(x)$$

هر دو، وجود دارند و برابر صفرند، زیرا مجموع‌های ستیلتیسی نظیر آن‌ها، برابر صفر می‌شوند: این حکم، برای اولی از آن‌جا نتیجه می‌شود که همیشه $f(x)=۰$، و برای دومی ناشی از ثابت‌بودن تابع $g(x)$ است که، در نتیجه همیشه، $\Delta g(x_i)=۰$.

با وجود این، انتگرال

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)dg(x)$$

وجود ندارد. در واقع، اگر بازهٔ $[-۱, ۱]$ را چنان تقسیم کنیم که نقطهٔ ۰ در بین نقطه‌های تقسیم نباشد، و مجموع زیر را تشکیل دهیم:

$$\sigma=\sum_{i=۰}^{n-۱} f(\xi_i)\Delta g(x_i)$$

آن وقت، اگر نقطه ۰ در بازهٔ $[x_k, x_{k+۱}]$ باشد، $(x_k<۰<x_{k+۱})$، در آن صورت، در مجموع σ، تنها جملهٔ kام باقی می‌ماند و بقیه برابر صفر می‌شوند، زیرا، به ازای $i\neq k$ داریم:

$$\Delta g(x_i)=g(x_{i+۱})-g(x_i)=۰$$

و بنابراین

$$\sigma=f(\xi_k)[g(x_{k+۱})-g(x_k)]=f(\xi_k)$$

و بسته به آن‌که $\xi_k\leqslant ۰$ یا $\xi_k>۰$ باشد، σ برابر ۰ یا ۱ می‌شود، به‌نحوی که σ، دارای حد نیست.

این رفتار خاص، مربوط به آن است که، هر دو تابع، $f(x)$ و $g(x)$، در نقطهٔ $x=0$، ناپیوسته‌اند [۵۸۴، ۳) و ۴) را ببینید].

۵۷۷. انتگرال‌گیری جزء به جزء: برای انتگرال‌های ستیلتیس، دستور زیر برقرار است:

$$\int_a^b f(x)dg(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)df(x) \quad (۹)$$

که با فرض وجود یکی از انتگرال‌ها، وجود دیگری هم ثابت می‌شود. این دستور، به دستور انتگرال‌گیری جزء به جزء معروف شده است. آن را ثابت می‌کنیم.

فرض می‌کنیم، انتگرال $\int_a^b gdf$ وجود باشد. بازهٔ $[a, b]$ را، به بخش‌های $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0, 1, \dots, n-1)$ تقسیم و نقطه‌های ξ_i را، در این بخش‌ها، انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی که داشته‌باشیم:

$$a=x_0\leqslant\xi_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_{i-1}\leqslant\xi_{i-1}\leqslant x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}\leqslant$$
$$\leqslant\cdots\leqslant x_{n-1}\leqslant\xi_{n-1}\leqslant x_n=b$$

مجموع ستیلتیس، برای انتگرال $\int_a^b fdg$، یعنی

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1})-g(x_i)]$$

را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\sigma=\sum_{1}^{n} f(\xi_{i-1})g(x_i)-\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(x_i)=$$

$$=-\left\{g(a)f(\xi_0)+\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)[f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})]-g(b)f(\xi_{n-1})\right\}$$

که با توجه به برابری

$$f(x)g(x)\Big|_a^b=f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

مقدار σ، به این صورت در می‌آید.

$$\sigma = f(x)g(x)\Big|_a^b - \Big\{g(a)[f(\xi_0)-f(a)]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)[f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})]+g(b)[f(b)-f(\xi_{n-1})]\Big\}$$

عبارت واقع در داخل آکولاد، همان مجموع ستیلتیسی برای انتگرال $\int_a^b g\,df$ است (که وجود آن، مفروض بود). این مجموع، متناظر است با تقسیم بازهٔ $[a, b]$، به وسیلهٔ نقطه‌های

$$a \leqslant \xi_0 \leqslant \xi_1 \leqslant \cdots \leqslant \xi_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant \cdots \leqslant \xi_{n-1} \leqslant b$$

به شرطی که نقطه‌های x_i به عنوان نقطه‌های انتخابی در بازه‌های

$$[\xi_{i-1}, \xi_i] (i = 1, \ldots, n-1)$$

و a و b برای بازه‌های $[a, \xi_0]$ و $[\xi_{n-1}, b]$ در نظر گرفته شده باشند. اگر طبق معمول، فرض کنیم: $\lambda = \mathrm{Max}(x_{i+1}-x_i)$، آن وقت، طول همهٔ بازه‌های جزئی، از 2λ تجاوز نمی‌کنند. وقتی $\lambda \to 0$، مجموع واقع در داخل کروشه به سمت $\int_a^b g\,df$ میل می‌کند، در نتیجه، برای σ هم حدی وجود دارد، یعنی $\int_a^b f\,dg$، که بادستور (۹) معین می‌شود.

به عنوان نتیجهٔ این بحث، به این حقیقت جالب می‌رسیم که: اگر تابع $g(x)$ در بازهٔ $[a, b]$، نسبت به تابع $f(x)$ انتگرال‌پذیر باشد، تابع $f(x)$ هم، نسبت به تابع $g(x)$، انتگرال‌پذیر خواهد بود.

این نکته، به ما امکان می‌دهد تا، برای وجود انتگرال ستیلتیس، علاوه بر آنچه در **۵۷۵** دیدیم، حالت‌های تازه‌ای هم، با تغییر نقش f و g به یکدیگر، به دست آوریم.

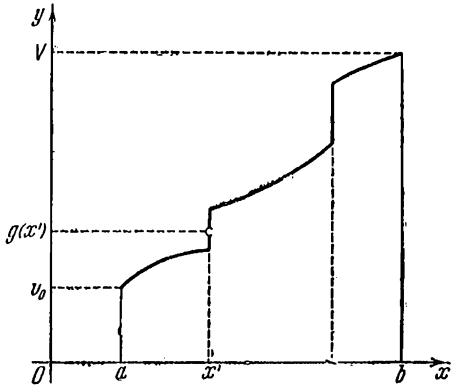
۵۷۸. تبدیل انتگرال ستیلتیس، به انتگرال ریمن. تابع $f(x)$ را، در بازهٔ $[a, b]$، پیوسته و $g(x)$ را در همین بازه، صعودی یکنوا، و ضمناً به معنای اکید خود*، می‌گیریم. در این صورت، همان طور که له بگ (H. Lebesgue) ثابت کرده است:

---

*) اکیدبودن صعودی را، تنها به خاطر ساده‌کردن بحث، در نظر گرفته‌ایم.

انتگرال ستیلتیس $(s)\int_a^b f(x)dg(x)$ را می‌توان، با تبدیل $v=g(x)$، مستقیماً به انتگرال ریمن منجر کرد.

در شکل ۲۹، نمودار تابع $v=g(x)$ نشان داده شده است. برای مقدارهایی از $x=x'$ که، به ازای آن‌ها، تابع $g(x)$ با جهش رو به رو می‌شود (زیرا، لزومی ندارد که تابع $g(x)$، حتماً پیوسته باشد)، نمودار را به وسیلهٔ پاره خطهای قائم و با وصل نقطه‌های $(x', g(x'-0))$ و $(x', g(x'+0))$ به یکدیگر، تکمیل می‌کنیم. به‌این‌ترتیب، خط پیوسته‌ای به دست می‌آید که، برای هر مقدار v بین $v_0=g(a)$ و $V=g(b)$، یك



شکل ۲۹

مقدار معین x، بین a و b وجود دارد. روشن است که این تابع $x=g^{-1}(v)$ پیوسته و، به معنای عام خود، صعودی یکنواست؛ این تابع را می‌توان به عنوان معکوس تابع $v=g(x)$ به حساب آورد.

به خصوص، اگر تنها به مقدارهایی از v اکتفا کنیم که تابع $v=g(x)$، به واقع به ازای تغییر x (از a تا b) اختیار می‌کند، آن وقت، $x=g^{-1}(v)$، تابع معکوس آن، به معنای عادی خواهد شد، یعنی v را تنها به مقدارهایی از x نسبت می‌دهد که، به ازای آن‌ها، $g(v)=x$ است؛ ولی از بازهٔ مقدارهای v

$$[g(x'-0),\ g(x'+0)]$$

که به جهش تابع $g(x)$ مربوط می‌شود، تنها یك مقدار $v=v'=f(x')$، دارای مقدار متناظر $x=x'$ است و، روشن است، که مقدارهای دیگر v، با مقداری از x متناظر نیستند. ولی ما، به طور قراردادی، آن‌ها را هم، متناظر با $x=x'$ می‌گیریم؛ این قرارداد، از نظر هندسی، همان تکمیل نمودار تابع $y=f(x)$ با یك رشته پاره خطهای قائم است.

اکنون ثابت می‌کنیم که:

$$(s)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))dv \qquad (۱۰)$$

که در آن، انتگرال آخری، به معنای معمول گرفته شده است؛ این انتگرال وجود دارد، زیرا تابع $f(g^{-1}(v))$، که همراه با آن، تابع مرکب $f^{-1}(v)$ پیوسته است.

برای این منظور، بازهٔ $[a, b]$ را، به‌کمك نقطه‌های

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

تقسیم می‌کنیم ومجموع ستیلتیسی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)]^*$$

اگر $v_i = g(x_i)$ بگیریم $(i = 0, 1, \ldots, n)$ خواهیم داشت:

$$v_0 < v_1 < \cdots < v_i < v_{i+1} < \cdots < v_n = V$$

چون $x_i = g^{-1}(v_i)$، بنابراین

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(g^{-1}(v_i))\Delta v_i \quad (\Delta v_i = v_{i+1} - v_i)$$

این عبارت، به صورت مجموع ریمنی، برای انتگرال زیر است:

$$\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))dv$$

ولی، از این جا، هنوز نمی‌توان، مستقیماً، عبور به سمت حد را برای برابری (۱۰) نتیجه گرفت، زیرا حتی به ازای $\Delta x_i \to 0$ $(\lambda \to 0)$، ممکن است Δv_i به‌سمت صفر میل نکند (مثلا، اگر بین x_i و x_{i+1}، که بی‌نهایت به هم نزدیك‌اند، مقدار x' واقع باشد که، در آن جا، $g(x)$ دچار جهش می‌شود). به همین مناسبت، بحث را به صورت دیگری انجام می‌دهیم.

داریم:

$$\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))dv = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} f(g^{-1}(v))dv$$

و

---

*) برای سادگی کار، خود نقطهٔ x_i را از بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ انتخاب کرده‌ایم.

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{v_i}^{v_{i+1}} f(x_i)dv$$

به نحوی که

$$\sigma=\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))dv=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{v_i}^{v_{i+1}}[f(x_i)-f(g^{-1}(v))]dv$$

اکنون Δx_i را آن قدر کوچك می‌گیریم تا نوسان تابع $f(x)$، در همین بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$، کمتر از عدد دلخواه مفروض $\varepsilon>0$ باشد. چون به ازای $v_i\leqslant v\leqslant v_{i+1}$، داریم: $x_i\leqslant g^{-1}(v)\leqslant v_{i+1}$، بنابراین، ضمناً، خواهیم داشت:

$$|f(x_i)-f(g^{-1}(v))|<\varepsilon$$

ودر چنین حالتی

$$\left|\sigma-\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))dv\right|<\varepsilon(V-v_0)$$

به این ترتیب، ثابت می‌شود

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))dv$$

که از آن‌جا، (۱۰) نتیجه می‌شود.

باوجود اهمیت اصولی این نتیجه‌گیری، درعمل، وسیلهٔ راحتی برای محاسبهٔ انتگرال ستیلتیس نمی‌باشد. در شمارهٔ بعد، نشان خواهیم دادکه این محاسبه، در برخی حالت‌های ساده، چگونه انجام می‌گیرد.

۵۷۹. محاسبهٔ انتگرال ستیلتیس. قضیهٔ زیررا ثابت می‌کنیم:

۱°. اگرتابع $f(x)$ در بازهٔ $[a, b]$، به معنای ریمنی خود، انتگرال‌پذیر باشد و $g(x)$ با انتگرال

$$g(x)=C+\int_a^x \varphi(t)dt$$

نشان داده شود، که درآن، $\varphi(t)$ دربازهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر مطلق است، آن وقت داریم:

$$(s)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx \qquad (۱۱)$$

انتگرال سمت راست وجود دارد [۲۹۸، ۴۸۲]. وجود انتگرال ستیلتیس هم، قبلا ثابت شده است [۵۷۵، III]. بنابراین، تنها باید برابری (۱۱) را ثابت کرد.

بدون این‌که به‌کلیت مطلب لطمه‌ای وارد شود، می‌توان تابع $\varphi(x)$ را مثبت فرض کرد [با بخش آخر شمارهٔ ۵۷۵ مقایسه کنید]. طبق معمول، مجموع ستیلتیس را تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1})-g(x_i)]=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i)\varphi(x)dx$$

ازآن‌جاکه، از طرف دیگر، می‌توان نوشت:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi(x)dx$$

خواهیم داشت:

$$\sigma-\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(\xi_i)-f(x)]\varphi(x)dx$$

روشن است که، برای $x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$ داریم: $|f(\xi_i)-f(x)|\leqslant\omega_i$، که در آن، ω_i عبارت است ازنوسان تابع $f(x)$ دربازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$. ازآن‌جا، تفاضل بالارا می‌توان، به این ترتیب، ارزیابی کرد:

$$\left|\sigma-\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta g(x_i)$$

ولی می‌دانیم [۵۷۵، III] که، به‌ازای $\lambda\to 0$، مجموع آخری به‌سمت صفر میل می‌کند، بنابراین

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

که دستور (۱۱) را ثابت می‌کند.

از این قضیه [با توجه به یادداشت آخر شمارهٔ ۵۷۵] می‌توان نتیجهٔ زیر را

به دست آورد که، در عمل، کاربردی مستقیم دارد.

۲°. اگر تابع $f(x)$ را باهمان فرض‌های قبلی درنظر بگیریم و، ضمناً، فرض کنیم که، تابع $g(x)$، در تمامی بازهٔ $[a, b]$ پیوسته و، در آن، احتمالاً به جز تعداد محدودی نقطه، دارای مشتق، $g'(x)$، و $g'(x)$ در $[a, b]$ به‌طورمطلق انتگرال پذیر* باشد، آن وقت

$$(s)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx \qquad (۱۲)$$

توجه به این نکته جالب است که، انتگرال سمت راست در دستور (۱۲)، نتیجه‌ای صوری از انتگرال سمت‌چپ‌است، زیرا اگر نماد $dg(x)$ را، به‌واقع، به‌مفهوم دیفرانسیل بگیریم، می‌توان به جای آن، $g'(x)dx$ را قرار داد.

به حالت تابع ناپیوستهٔ $g(x)$ برمی‌گردیم (و خواهیم دید که، در عمل، کاربرد زیادی دارد). ازتابع ناپیوستهٔ $\rho(x)$ آغاز می‌کنیم که همه با آن آشناهستیم و بادستور-های زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(x)=\begin{cases}0 & (x\leqslant 0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$$

این تابع، دارای ناپیوستگی گونهٔ دوم ـ جهش ـ در نقطهٔ $x=0$ و از طرف راست است؛ ضمناً، مقدار جهش $\rho(+0)-\rho(0)$ برابر است با ۱. تابع $\rho(x)$، درسمت چپ نقطهٔ $x=0$ و درسایر نقطه‌ها، پیوسته است. تابع، $\rho(x-c)$، همین‌ناپیوستگی‌را، در سمت راست نقطهٔ $x=c$ دارد؛ برعکس، در تابع، $\rho(c-x)$، ناپیوستگی‌در سمت چپ نقطهٔ $x=c$، و مقدار جهش برابر ۱ ـ است.

بافرض پیوسته بودن تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=c$، انتگرال

$$(s)\int_a^b f(x)d\rho(x-c)$$

را محاسبه می‌کنیم، که در آن، $a\leqslant c<b$ (به ازای $c=b$، مقدار انتگرال، برابر صفر می‌شود).

مجموع ستیلتیس را تشکیل می‌دهیم:

---

*) به شرطی که، در نقطه‌هایی که وجود ندارد، مقدار آن را، به‌دلخواه انتخاب کنیم.

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta\rho(x_i-c)$$

فرض کنیم، نقطهٔ c، مثلا در بازهٔ kام بیفتد، به طوری که $x_k\leqslant c<x_{k+1}$. دراین‌صورت $\Delta\rho(x_k-c)=1$ و روشن است که، به ازای $i\neq k$ داریم: $\Delta\rho(x_i-c)=0$. به این ترتیب، همهٔ مجموع‌های، σ، منجر به یك جمله می‌شوند: $\sigma=f(\xi_k)$. اکنون فرض می‌کنیم، λ به سمت صفر میل کند، بنا بـه پیوستگی: $f(\xi_k)\to f(c)$. بنابراین (بـه ازای $a\leqslant c<b$) داریم:

$$(s)\int_a^b f(x)d\rho(x-c)=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=f(c) \qquad (۱۳)$$

به همین ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت که (به ازای $a<c\leqslant b$):

$$(s)\int_a^b f(x)d\rho(c-x)=-f(c) \qquad (۱۴)$$

(این انتگرال، به ازای $c=a$، برابر صفر می‌شود).

اکنون دروضعی هستیم که می‌توانیم قضیهٔ ۲° را، درحالتی کلی‌تر ــ یعنی بدون شرط پیوستگی تابع $g(x)$ ــ ثابت کنیم.

۳°. فـرض کنیم، $f(x)$ تابعی پیوسته در بـازهٔ $[a,b]$ و $g(x)$ در همه جا ــ به استثنای، احتمـالا، تعداد محـدودی نقطه ــ دارای مشتق $g'(x)$ (در این بازه) باشد؛ ضمناً $g'(x)$ دربازهٔ $[a,b]$ انتگرال پذیر است. اگـر فرض کنیم، تابع، $g(x)$، در تعداد محدودی نقطهٔ

$$c_0=a<c_1<\cdots<c_k<\cdots<c_m=b$$

ناپیوستگی از نوع اول داشته باشد، آن وقت، انتگرال ستیلتیس وجود دارد وبا دستور زیر بیان می‌شود:

$$(s)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx+f(a)[g(a+0)-g(a)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+$$

$$+f(b)[g(b)-g(b-0)] \qquad (۱۵)$$

در این جا، جمله‌هایی بیرون از انتگرال وجود دارند که، در آن‌ها، جهش تابع $g(x)$ در نقطه‌های a و b، یك طرفه هستند*.

برای این که، نوشته‌ها ساده‌تر شود، جهش‌های تابع $g(x)$ را، ازسمت راست و سمت چپ، با نشانه‌های زیر مشخص می‌کنیم:

$$\alpha_k^+ = g(c_k+0)-g(c_k) \quad (k=0, 1, \dots, m-1)$$

$$\alpha_k^- = g(c_k)-g(c_k-0) \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

و دراین صورت، روشن است که برای $1 \leqslant k \leqslant m-1$ داریم:

$$\alpha_k^+ + \alpha_k^- = g(c_k+0)-g(c_k-0)$$

این تابع کمکی را تشکیل می‌دهیم:

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \rho(x-c_k) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^- \rho(c_k-x)$$

که مثل این است که، همهٔ ناپیوستگی‌های تابع $g(x)$ را در خود جمع کرده است، به‌نحوی که تفاضل $g_2(x) = g(x)-g_1(x)$، به نحوی که ثابت خواهیم کرد، پیوسته می‌شود.

تابع $g_2(x)$، به‌ازای مقدارهایی از x که مخالف همهٔ c_kها باشند، پیوسته است، زیرا هر دو تابع $g(x)$ و $g_1(x)$، به‌ازای این مقدارها، پیوسته‌اند. اکنون ثابت می‌کنیم که تابع $g_2(x)$، در سمت راست نقطهٔ $c_k (k<m)$ پیوسته است. همهٔ جمله‌های مجموع $g_1(x)$، به جز جملهٔ $\alpha_k^+ \rho(x-c_k)$، به ازای $x=c_k$، از سمت راست پیوسته‌اند؛ بنابراین، کافی است رفتارعبارت $g(x)-\alpha_k^+ \rho(x-c_k)$ را مطالعه کنیم. این‌عبارت، به ازای $x=c_k$، برابر $g(c_k)$ می‌شود و، دربارهٔ حدآن به ازای $x \to c_k+0$ هم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to c_k+0} [g(x)-\alpha_k^+ \rho(x-c_k)] = g(c_k+0)-\alpha_k^+ = g(c_k)$$

به همین ترتیب، می‌توان تحقیق کرد که، تابع $g_2(x)$ هم، درسمت چپ نقطهٔ $c_k (k>0)$، پیوسته است.

سپس، اگر نقطهٔ x را (غیر از همهٔ c_k ها)، که در آن‌جا، تابع $g(x)$ دارای مشتق

---

*) اگر، درعمل، دریکی ازاین نقطه‌ها، جهش وجود نداشته باشد، جملهٔ متناظر با آن برابر صفر می‌شود.

است، انتخاب کنیم، در این صورت، در نزدیکی این نقطه، مقداری است ثابت و، در نتیجه، تابع $g_2(x)$ هم، در آن‌جا، دارای مشتق می‌شود و ضمناً

$$g'_2(x)=g'(x)$$

برای تابع پیوستهٔ $g_2(x)$، بنا بر قضیهٔ قبل، انتگرال ستیلتیس وجود دارد:

$$(s)\int_a^b f(x)dg_2(x)=(R)\int_a^b f(x)g'_2(x)dx=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

انتگرال زیرهم، به همان ترتیب، محاسبه می‌شود [(۱۳) و (۱۴) را ببینید]:

$$(s)\int_a^b f(x)dg_1(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+\cdot(s)\int_a^b f(x)d\rho(x-c_k)-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^-\cdot(s)\int_a^b f(x)d\rho(c_k-x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+ f(c_k)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^- f(c_k)=f(a)[g(a+0)-g(a)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+f(b)[g(b)-g(b-0)]$$

اگر این‌دو برابری را باهم جمع کنیم، به برابری (۱۵) می‌رسیم که، ضمناً، وجود انتگرال ستیلتیس $f(x)$ را، نسبت به تابع $g(x)=g_1(x)+g_2(x)$ ثابت می‌کند [۵۷۶، ۳°].

۵۸۰. مثال‌ها. ۱) انتگرال‌های زیر را، از روی دستور (۱۱) محاسبه کنید:

a) $(s)\int_0^2 x^2 d\ln(1+x)$, b) $(s)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x d\sin x$, c) $(s)\int_{-1}^{1} x d\operatorname{arctg} x$

حل. a) داریم:

$$(s)\int_0^2 x^2 d\ln(1+x)=(R)\int_0^2\frac{x^2}{1+x}dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)\right)\Big|_0^2=\ln 3$$

پاسخ‌های b) و c): b) $1-\frac{\pi}{2}$؛ c) ۰.

۲) این انتگرال‌ها را، با توجه به دستور (۱۵)، محاسبه کنید:

a) $(s)\int_{-1}^{3} x\,dg(x)$; $g(x)=\begin{cases}0 & (x=-1)\\ 1 & (-1<x<2)\\ -1 & (2\leqslant x\leqslant 3)\end{cases}$

b) $(s)\int_{0}^{2} x^2\,dg(x)$; $g(x)=\begin{cases}-1 & (0\leqslant x<\frac{1}{2})\\ 0 & (\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{3}{2})\\ 2 & (x=\frac{3}{2})\\ -2 & (\frac{3}{2}<x\leqslant 2)\end{cases}$

حل. a) تابع $g(x)$، دارای جهش ۱ در نقطهٔ $x=-1$ و جهش -2 در نقطهٔ $x=2$ است. در بقیهٔ نقطه‌ها داریم: $g'(x)=0$. بنابراین

$$(s)\int_{-1}^{3} x\,dg(x)=(-1)\cdot 1+2\cdot(-2)=-5$$

b) تابع $g(x)$ دارای جهش ۱ در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ وجهش -2 در نقطهٔ $x=\frac{3}{2}$ است (مقدار تابع g، در نقطهٔ $x=\frac{3}{2}$، تأثیری در نتیجه ندارد). در سایر نقطه‌ها داریم: $g'(x)=0$. بنابراین

$$(s)\int_{0}^{2} x^2\,dg(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot(-2)=-\frac{17}{4}$$

۳) این انتگرال‌ها را، طبق دستور (۱۵)، محاسبه کنید:

a) $\int_{-2}^{2} x\,dg(x)$; b) $\int_{-2}^{2} x^2\,dg(x)$; c) $\int_{-2}^{2} (x^3+1)\,dg(x)$

که در آن‌ها

$$g(x)=\begin{cases} x+۲ & (-۲\leqslant x\leqslant -۱)\\ ۲ & (-۱<x<۰)\\ x^۲+۳ & (۰\leqslant x\leqslant ۲)\end{cases}$$

حل. تابع $g(x)$، در نقطه‌های $x=-۱$ و $x=۰$، دارای جهش ۱ می‌باشد و داریم:

$$g'(x)=\begin{cases} ۱ & (-۲\leqslant x\leqslant -۱)\\ ۰ & (-۱<x<۰)\\ ۲x & (۰\leqslant x\leqslant ۲)\end{cases}$$

بنابراین

$$\int_{-۲}^{۲} x\,dg(x)=\int_{-۲}^{-۱} x\,dx+۲\int_{۰}^{۲} x^۲dx+(-۱)\cdot ۱+۰\cdot ۱=۲\frac{۵}{۶}$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$\int_{-۲}^{۲} x^۲dg(x)=۱۱\frac{۱}{۳};\quad \int_{-۲}^{۲}(x^۳+۱)dg(x)=۱۵\frac{۱}{۲۰}$$

۴) در طول پاره خط $[a, b]$ از محور x، جرم‌هایی قرار دارندکه یا درچند نقطهٔ جداگانه متمرکزشده‌اند و یا درطول پاره خط، به طور پیوسته، توزیع‌شده‌اند. بدون این که بین این دو حالت فرقی قایل شویم، برای $x>a$ مجموع همهٔ جرم‌هایی را که در بازهٔ $[a, x]$ واقع‌اند، با $\Phi(x)$ نشان می‌دهیم؛ علاوه برآن فرض‌می‌کنیم: $\Phi(a)=۰$. واضح است که $\Phi(x)$، تابعی صعودی و یکنواست. می‌خواهیم گشتاور ایستائی(ممان ستاتیك)این جرم‌ها را، نسبت به مبداء مختصات، پیداکنیم.

بازهٔ $[a, b]$را، بانقطه‌های

$$a=x_۰<x_۱<\cdots<x_i<x_{i+۱}<\cdots<x_n=b$$

تقسیم می‌کنیم. روشن است که، روی پاره خط $[x_i, x_{i+۱}]$ به ازای $i>۰$، جرم $\Phi(x_{i+۱})-\Phi(x_i)=\Delta\Phi(x_i)$ واقع است. به همین ترتیب، در بازهٔ، $[a, x_۱]$، جرم $\Phi(x_۱)-\Phi(x_۰)=\Delta\Phi(x_۰)$ قرار دارد. اگر در همهٔ حالت‌ها، جرم‌را مثلا متمرکز در انتهای سمت راست بازه به حساب آوریم، برای گشتاور ایستائی مطلوب، عبارت تقریبی

زیر به دست می‌آید:

$$M \doteq \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \Delta\Phi(x_i)$$

اگر همهٔ Δx_iها را به سمت صفر میل دهیم، به نتیجهٔ دقیق زیر می‌رسیم:

$$M = (s)\int_a^b x\, d\Phi(x) \qquad (۱۶)$$

همان طور که درجلددوم، درارتباط با انتگرال معین معمولی توضیح‌داده شده است [۳۴۸]، در این جا هم می‌توان ابتدا گشتاور ایستائی «جزئی» $dM = x\,d\Phi(x)$، نظیر پاره خط محور، از x تا $x+dx$ را معین و، سپس، این جزءها را با هم «جمع» کرد.

به همین ترتیب، برای گشتاور لختی (ممان اینرسی) همان جرم‌ها، نسبت به‌مبداء، به این دستور می‌رسیم:

$$I = (s)\int_a^b x^2\, d\Phi(x) \qquad (۱۷)$$

براین نکتهٔ مهم تاکید کنیم که: انتگرال ستیلتیس به ما امکان می‌دهد تا حالت‌های مختلف تقسیم جرم را ــ توزیع پیوسته ویاجرم‌های متمرکز ــ با یك دستور انتگرالی بیان کنیم.

فرض کنیم، جرم‌هایی که به طور پیوسته توزیع شده‌اند، دارای چگالی خطی $\rho(x)$ باشند. علاوه برآن، فرض می‌کنیم جرم‌های m_1، m_2، ...، m_k در نقطه‌های c_1، c_2، ...، c_k، متمرکزشده باشند. آن وقت، اگر این نقطه‌ها را استثنا کنیم، مشتق تابع $\Phi(x)$، چنین می‌شود:

$$\Phi'(x) = \rho(x)$$

ضمناً، در هر نقطهٔ $x = c_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$، تابع دارای جهشی است، برابر با جرم m_j دراین نقطه.

اکنون، اگر انتگرال (۱۶) را، با توجه به دستور (۱۵)، بسط دهیم، به دست می‌آید:

$$M = (s)\int_a^b x\, d\Phi(x) = (R)\int_a^b x\rho(x)\,dx + \sum_{j=1}^{k} c_j m_j$$

اگر در سمت راست دقت کنیم، به سادگی روشن می‌شود که جملهٔ اول، معرف گشتاور ایستایی جرم‌هایی است که به طور پیوسته توزیع شده‌اند و جملهٔ دوم، معرف گشتاور ایستایی جرم‌های متمرکز است. برای انتگرال (۱۷) هم، نتیجهٔ مشابهی به دست می‌آید.

۵) برای این که مضمون تمرین قبل را روشن‌تر کنیم، پیشنهاد می‌کنیم:

a) عبارت $\Phi(x)$ را تشکیل دهید و نمودار آن را برای این حالت رسم کنید که: در نقطه‌های $x=$ ۱، ۲، ۳، جرم‌هایی با مقدار واحد و در بازهٔ [۳، ۱]، جرم‌هایی با چگالی ۲، به طور پیوسته، توزیع شده باشد.

b) همچنین، برای این توزیع: جرم به مقدار ۲، برای $x=$ ۲، ۴ و جرم‌های با توزیع پیوسته با چگالی $2x$ در بازهٔ [۵، ۰].

c) توزیع جرم را توضیح دهید، به شرطی که $\Phi(x)$ برابر با تابع $g(x)$ از تمرین ۳) باشد.

پاسخ. a) در بازهٔ [۳، ۱] داریم:

$$\Phi(x)=\begin{cases}0 & (x=1)\\ 2x-1 & (1<x<2)\\ 2x & (2\leqslant x<3)\\ 7 & (x=3)\end{cases}$$

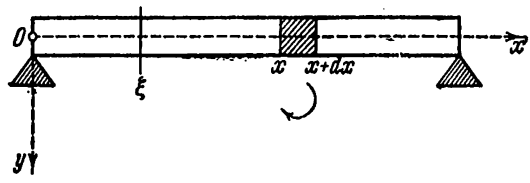
b) در بازهٔ [۵، ۰] داریم:

$$\Phi(x)=\begin{cases}x^2 & (0\leqslant x<2)\\ x^2+2 & (2\leqslant x<4)\\ x^2+4 & (4\leqslant x\leqslant 5)\end{cases}$$

c) در نقطه‌های $x=-1$ و $x=0$، جرم‌هایی به مقدار واحد واقع‌اند؛ در بازهٔ [۱ — ، ۲ —] جرم با چگالی واحد و در بازهٔ [۲، ۰]، جرم با چگالی $2x$ توزیع شده است.

۶) تمرین دیگری را مورد بررسی قرار می‌دهیم که، در آن، انتگرال ستیلتیس، همان نقش انتگرال ۴) را به عهده دارد. فرض می‌کنیم، بر تیرکی که بر دو نقطه تکیه دارد*، به جز باری که به طور پیوسته توزیع شده است، نیروهای متمرکزی هم عمل کند (شکل

*) این فرض‌را، تنها برای سادگی کار، آورده‌ایم.



شکل ۳۰

۳۰). محور طول را در امتداد محور تیرك و محور y را، عمود بر آن و به طرف پایین می‌گیریم (شکل را ببینید). بدون این‌که بین نیروهای عمل کننده فرق بگذاریم، مجموع همهٔ نیروهای عمل‌کننده برتیرك را در بازهٔ $[0, x]$ $(x>0)$، به اضافهٔ واکنش نقطه‌های اتکا، با $F(x)$ نشان می‌دهیم؛ ضمناً، فرض می‌کنیم: $F(0)=0$. نیروی $F(x)$را، نیروی برش، درمقطع x تیرك می‌نامند. ضمناً، نیرویی را که به طرف پایین باشد، مثبت و، اگر به طرف بالا باشد، منفی می‌گیریم.

می‌خواهیم، گشتاور خمشی $\mathbf{M}$، در مقطع دلخـواه $x=\xi$ را پیدا کنیم. برای این منظور، باید مجموع گشتاورهای همهٔ نیروهایی را، که در سمت راست (یا چپ) تیرك، نسبت به این مقطع، عمل می‌کنند، در نظر گرفت. ضمناً، وقتی‌که صحبت از سمت راست تیرك است، وقتی گشتاور را مثبت بـه حساب می‌آوریم کـه، این بخش را، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخاند (برای بخش سمت چپ، قاعده، برعکس‌است).

چون برجزء $[x, x+dx]$، مثلا در سمت راست تیرك، نیروی

$$F(x+dx)-F(x)=dF(x)$$

عمل می‌کند، گشت‌آور جزئی، چنین خواهد بود:

$$d\mathbf{M}=(x-\xi)dF(x)$$

و بنا براین، با «جمع کردن»، به دست می‌آید:

$$M=M(\xi)=(s)\int_{\xi}^{l}(x-\xi)dF(x)$$

به همین ترتیب، با آغاز از سمت چپ تیرك، می‌توان (با بـه حساب آوردن تغییر جهت مثبت، برای محاسبهٔ گشتاور) نوشت:

$$M(\xi)=(s)\int_{0}^{\xi}(\xi-x)dF(x) \qquad (۱۸)$$

مستقیماً دیده می‌شود که، هر دو عبارت گشتاور خمشی، در واقع، یکی هستند. برابری آن‌ها، باشرط

$$\int_0^l x dF(x) - \xi F(l) = 0$$

هم ارز است، که خود، نتیجه‌ای است ازشرط تعادل

$$F(l) = 0, \quad \int_0^l x dF(x) = 0$$

که در آن‌ها، اولی به معنای صفر بودن مجموع همهٔ نیروهـاست و دومی بیان می‌کند که مجموع گشتاورهای (نسبت به مبداء) نیروهای مؤثر برتیرك، برابر صفر است.

اگر شدت باری را که به طور ناپیوسته توزیع شده‌است، با $q(x)$ نشان دهیم، آن وقت، با حذف نقطه‌هایی که، در آن جا، نیروهای متمرکز عمل می‌کنند، داریم:

$$\frac{dF(x)}{dx} = q(x)$$

فرض کنیم، نیروهای متمرکز F_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ در نقطه‌های $x = x_j$ عمل کنند، آن وقت، واضح است که نیروی برشی، دراین نقطه‌ها، دارای جهشی برابر F_j است. سپس، اگر دستور (۱۵) را در انتگرال (۱۸) به‌کاربریم، نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{M}(\xi) = \int_0^\xi (\xi - x) q(x) dx + \sum_{x_j < \xi} (\xi - x_j) F_j$$

دو جملهٔ سمت راست، به ترتیب، عبارتند ازگشتاورهای جداگانه‌ای که به‌وسیلهٔ بارپیوسته و نیروهای متمرکز به وجودآمده است: انتگرال ستیلتیس، آن‌ها را دریك انتگرال جمع کرده است.

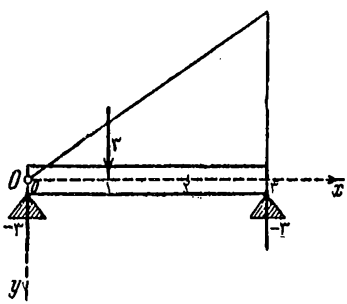
حقیقت دیگری را هم ثابت می‌کنیم، که برای نظریهٔ مقاومت مصالح جالب است. در دستور (۱۸)، باانجام انتگرال‌گیری جزء به جزء، به دست می‌آید:

$$\mathrm{M}(\xi) = \int_0^\xi (\xi - x) dF(x) = (\xi - x) F(x) \Big|_0^\xi - \int_0^\xi F(x) d(\xi - x) = \int_0^\xi F(x) dx$$

از این جا روشن می‌شود که در همه جا، به جز نقطه‌های اثر نیروهـای متمرکز، برابری زیر برقرار است:

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\xi}=F(\xi)$$

۷) مثال. فرض می‌کنیم میله‌ای به طول $l=۳$ (شکل ۳۱)، بار «مثلثی» با شدت $\frac{۲}{۳}x$ را تحمل می‌کند؛ علاوه بر آن، فرض می‌کنیم، نیرویی متمرکز برابر ۳، در نقطهٔ $x=۱$، بر آن اثر کند؛ واکنش هر دو تکیه‌گاه را برابر ۳ — می‌گیریم (آن‌ها، از قانون اهرم پیروی می‌کنند). مطلوب است تعیین نیروی برشی $F(x)$ و گشتاور خمشی $\mathbf{M}(\xi)$ پاسخ.



شکل ۳۱

$$F(x)=\begin{cases}۰ & (x=۰)\\ \frac{۱}{۳}x^{۲}-۳ & (۰<x<۱)\\ \frac{۱}{۳}x^{۲} & (۱\leqslant x<۳)\\ ۰ & (x=۳)\end{cases}$$

$$M(\xi)=\begin{cases}\frac{۱}{۹}\xi^{۳}-۳\xi & (۰\leqslant\xi\leqslant۱)\\ \frac{۱}{۹}\xi^{۳}-۳ & (۱<\xi\leqslant۳)\end{cases}$$

۸) دستور (۱۵)، برای محاسبهٔ انتگرال‌های معمولی (به مفهوم ریمانی آن) نیز مفید است. این مطلب را، با مثالی کلی، روشن می‌کنیم.

$\varphi(x)$ را، تابعی «قطعه به قطعه چند جمله‌ای»، در بازهٔ $[a, b]$ می‌گیریم؛ و این، به معنای آن است که بتوانیم بازهٔ $[a, b]$ را، به وسیلهٔ نقطه‌های

$$a=\xi_{۰}<\xi_{۱}<\cdots<\xi_{k}=b$$

به تعداد محدودی از بخش‌ها چنان تقسیم کنیم که، در هر کدام از آن‌ها، تابع $\varphi(x)$ به صورت یك چند جمله‌ای، با درجه‌ای که از n تجاوز نمی‌کند، باشد. با تعویض مقدار تابع $\varphi(x)$ و همهٔ مشتق‌های آن، در نقطه‌های a و b، با صفر؛ مقدار جهش مشتق iام $\varphi^{(i)}(x)$

رادر نقطهٔ jام ($x=\xi_j$)، به‌صورت $\delta_j^{(i)}$ نشان می‌دهیم ($i=0,1,\dots,n$؛ $j=0,1,\dots,k$).

سپس، $f(x)$ را تابع پیوسته دلخواهی می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$F_1(x)=\int f(x)dx$$

و به طور کلی

$$F_s(x)=\int F_{s-1}(x)dx \quad (s\geq 1)$$

در این صورت، دستور زیر برقرار است:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=$$

$$=-\sum_{j=0}^{k}F_1(\xi_j)\delta_j^{(0)}+\sum_{j=0}^{k}F_2(\xi_j)\delta_j^{(1)}-\dots+(-1)^{k+1}\sum_{j=0}^{k}F_{k+1}(\xi_j)\delta_j^{(k)}$$

در واقع، به ترتیب داریم:

$$(R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=(s)\int_a^b \varphi(x)dF_1(x)=$$

$$=\varphi(x)F_1(x)\Big|_a^b-(s)\int_a^b F_1(x)d\varphi(x)$$

جملهٔ اول حذف می‌شود و برای جملهٔ دوم، داریم:

$$\int_a^b F_1(x)d\varphi(x)=\sum_j F_1(\xi_j)\delta_j^{(0)}+\int_a^b F_1(x)\varphi'(x)dx$$

به همین ترتیب

$$\int_a^b F_1(x)\varphi'(x)dx=-\sum_j F_2(\xi_j)\delta_j^{(1)}-\int_a^b F_2(x)\varphi''(x)dx$$

و غیره.

۹) در پایان، به‌کمک دستور (۱۱)، تعمیم مفیدی از دستور انتگرال‌گیری جزء به جزء را درمورد انتگرال‌های معمولی، به دست می‌آوریم. اگر $u(x)$ و $v(x)$ را دو تابع انتگرال پذیر مطلق، در بازهٔ $[a,b]$ بگیریم و فرض کنیم، تابع‌های $U(x)$ و $V(x)$ با

دستورهای انتگرالی زیر معین شوند:

$$U(x)=U(a)+\int_a^x u(t)dt,$$

$$V(x)=V(a)+\int_a^x v(t)dt$$

آن وقت، دستور زیر برقرار است:

$$\int_a^b U(x)v(x)\,dx=U(x)V(x)\Big|_a^b-\int_a^b V(x)u(x)dx \qquad (۱۹)$$

برای اثبات، از روی دستور (۱۱)، انتگرال سمت چپ را با انتگرال ستیلتیس عوض می‌کنیم و جزء به جزء انتگرال می‌گیریم: [۵۷۷]:

$$\int_a^b U(x)v(x)dx=\int_a^b U(x)dV(x)=U(x)V(x)\Big|_a^b-\int_a^b V(x)dU(x)$$

که اگر یك بار دیگر، از دستور (۱۱)، برای انتگرال آخری استفاده کنیم، به (۱۹) می‌رسیم.

در این‌جا، تابع‌های $u(x)$ و $v(x)$ در نقش‌مشتق‌های $U(x)$ و $V(x)$ ظاهر شده‌اند (بدون این که، در واقع، چنین باشد). در حالتی که تابع‌های $U(x)$ و $V(x)$ پیوسته باشند، مساله منجر به‌دستور معمولی انتگرال جزء‌به‌جزء می‌شود، زیرا در آن حالت‌داریم:

$$U'(x)=u(x) \text{ و } V'(x)=v(x)$$

۵۸۱. توضیح هندسی انتگرال ستیلتیس. انتگرال

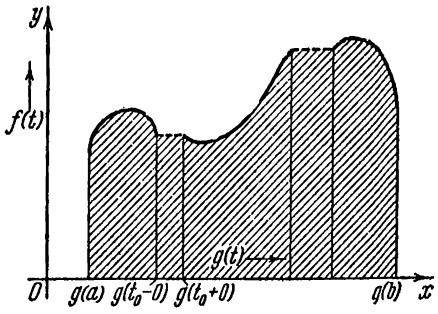
$$(s)\int_a^b f(t)dg(t) \qquad (۲۰)$$

را با فرض مثبت و پیوسته بودن $f(t)$ و صعودی یکنوا (به معنای اکید) بودن $g(t)$ در نظر می‌گیریم؛ تابع $g(t)$، می‌تواند دارای ناپیوستگی (جهش) هم باشد.

دستگاه معادله‌های پارامتری

$$x=g(t),\quad y=f(t) \qquad (۲۱)$$

معرف یك منحنی (K) است که، در حالت کلی، ناپیوسته است. اگر به ازای $t=t_0$،



شکل ۳۲

تابع $g(t)$ با یك جهش همراه باشد، به طوری‌که $g(t_0-0)<g(t_0+0)$، در آن صورت، یك مقدار حدی $y=f(t)$ برابر با $f(t_0)$، متناظر با این مقدارهای حدی $x=g(t)$ است. منحنی (K) را، با پاره‌خطهای افقی که زوج نقطه‌های

$$(g(t_0-0),\ f(t_0)),$$
$$(g(t_0+0),\ f(t_0))$$

را به‌هم وصل می‌کنند، و متناظر با جهش‌های تابع $g(x)$ هستند، تکمیل می‌کنیم (شکل را ببینید). به این ترتیب، منحنی پیوستهٔ (L) تشکیل می‌شود. ثابت می‌کنیم که، انتگرال (۲۰)، معرف مساحت شکل زیر این منحنی است (دقیق‌تر: مساحت شکل محدود به‌منحنی (L)، محور x و دو عرض‌کناری نظیر $g(a)$ و $g(b)$).

برای این منظور، بازهٔ $[a, b]$ را، به وسیلهٔ نقطه‌های

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_i<t_{i+1}<\cdots<t_n=b$$

تقسیم می‌کنیم که، درنتیجه، بازهٔ $[g(a), g(b)]$ واقع برمحور x هم، به وسیلهٔ نقطه‌های

$$g(a)<g(t_1)<\cdots<g(t_i)<g(t_{i+1})<\cdots<g(b)$$

به بخش‌هایی تقسیم می‌شود.

با واردکردن کمترین و بیشترین مقدارهای m_i و M_i از تابع $f(t)$ در بازهٔ $[t_i, t_{i+1}]$، مجموع‌های پایینی و بالایی ستیلتیس ـ داربو را تشکیل می‌دهیم:

$$s=\sum_i m_i\Delta g(t_i),\quad S=\sum_i M_i\Delta g(t_i)$$

به سادگی دیده می‌شود که، این‌ها، عبارتند از مساحت دو شکلی که ازمستطیل‌های محاطی و محیطی تشکیل شده‌اند، به نحوی که شکل منحنی‌الخط مفروض، بین آن‌ها قرار دارد.

وقتی که Δt_i به سمت صفر میل کند، هردو مجموع، به‌سمت حد مشترك (۲۰) میل می‌کنند و، بنابراین [۳۳۶]، شکل تربیع پذیر است و مساحت آن، با انتگرال (۲۰) بیان می‌شود.

۵۸۲. قضیهٔ میانگین؛ برآوردها. ۱°. فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a, b]$ کران‌دار

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

و تابع $g(x)$، صعودی یکنوا باشد. اگر انتگرال ستیلتیس I از $f(x)$، نسبت به $g(x)$، وجود داشته باشد، دستورهای زیر برقرار است:

$$I=(s)\int_a^b f(x)dg(x)=\mu[g(b)-g(a)] \quad (m\leqslant\mu\leqslant M) \quad (۲۲)$$

واین، همان قضیهٔ میانگین برای انتگرال ستیلتیس است.

برای اثبات، از نابرابری روشن مربوط به مجموع ستیلتیسی آغازمی‌کنیم:

$$m[g(b)-g(a)]\leqslant\sigma\leqslant M[g(b)-g(a)]$$

با عبور به سمت حد، به‌دست می‌آید:

$$m[g(b)-g(a)]\leqslant I\leqslant M[g(b)-g(a)] \quad (۲۳)$$

و یا*

$$m\leqslant\frac{I}{g(b)-g(a)}\leqslant M$$

که اگر این نسبت را با μ نشان دهیم، به (۲۲) می‌رسیم.

اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، آن وقت، μ، مقداری از تابع در این بازه می‌شود و دستور (۲۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$(s)\int_a^b f(x)dg(x)=f(\xi)[g(b)-g(a)] \quad (a\leqslant\xi\leqslant b) \quad (۲۴)$$

۲°. حالتی از انتگرال ستیلتیس که، در آن، تابع $f(x)$ پیوسته وتابع دارای تغییر محدود باشد، اهمیت عملی زیادی دارد. در این حالت، انتگرال ستیلتیس را، می‌توان به این ترتیب، برآورد کرد:

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right|\leqslant MV \quad (۲۵)$$

که در آن

---

*) توجه ما به حالتی است که داشته باشیم: $g(b)>g(a)$، زیرا درحالت $g(b)=g(a)$ [یعنی $g(x)=\text{const.}$]، هر دو طرف دستور (۲۲) برابر صفر می‌شود.

$$M=\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x),\quad V=\bigvee_a^b g(x)$$

در واقع، برای مجموع ستیلتیس σ داریم:

$$|\sigma|=|\sum_i f(\xi_i)\Delta g(x_i)|\leqslant \sum_i |f(\xi_i)|\,|\Delta g(x_i)|\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_i |g(x_{i+1})-g(x_i)|\leqslant MV$$

که با عبور به‌حد، نابرابری مطلوب به دست می‌آید:

۳°. ازهمین‌جا می‌توان، به‌خصوص، نزدیکی مجموع σ را باخود انتگرال‌ستیلتیس I نتیجه گرفت (با توجه به همان فرض‌های قبلی دربارهٔ تابع‌های f و g). σ و I را، به این‌صورت، می‌نویسیم:

$$\sigma=\sum_i f(\xi_i)\Delta g(x_i)=\sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i)\,dg(x_i)$$

$$I=\sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dg(x)$$

اگر این دو برابری را از هم کم کنیم، حاصل می‌شود:

$$\sigma-I=\sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i)-f(x)]\,dg(x)$$

اگرطبق‌معمول، نوسان تابع $f(x)$ دربازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ را، ω_i بنامیم، به‌نحوی‌که

$$|f(\xi_i)-f(x)|\leqslant \omega_i \quad (x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1})$$

آن وقت، با استفاده از برآورد (۲۵) برای هرکدام از انتگرال‌های $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$، خواهیم داشت:

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i)-f(x)]\,dg(x)\right|\leqslant \omega_i \bigvee_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)$$

اگر بازهٔ $[a, b]$ را به‌بخش‌هایی چنان‌کوچك تقسیم کنیم که همه‌جا داشته باشیم: $\omega_i<\varepsilon$ ($\varepsilon>0$، عدد دلخواه مفروضی است)، آن وقت، نتیجه می‌شود:

$$|\sigma - I| \leqslant \varepsilon \bigvee_a^b g(x) \qquad (۲۶)$$

از این برآورد، در شمارهٔ بعد استفاده خواهیم کرد.

۵۸۳. عبورحدی در زیر علامت انتگرال ستیلتیس.

۱°. $f_n(x)$ $(n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$ را در بازهٔ $[a, b]$ پیوسته می‌گیریم و فرض می‌کنیم، $f_n(x)$، به ازای $n \to \infty$، به‌طور یکنواخت، به سمت یك تابع حدی میل کند:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

[روشن است که، این تابع، پیوسته خواهد بود، **۴۳۶**]، و $g(x)$ تابعی با تغییر محدود باشد در این صورت

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$$

اثبات. با فرض $\varepsilon > ۰$ دلخواه، می‌توان N را طوری پیدا کرد که، به ازای $n > N$، برای همهٔ xها داشته باشیم:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

در این صورت، بنابر (۲۵)، برای $n > N$ داریم:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dg(x) - \int_a^b f(x)\,dg(x) \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dg(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \bigvee_a^b g(x)$$

که با توجه به‌غیرمشخص‌بودن ε، قضیه را ثابت می‌کند.

۲°. اکنون فرض می‌کنیم $f(x)$ دربازهٔ $[a, b]$، تابعی پیوسته و همهٔ تابع‌های $g_n(x)$ $(n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$، در این بازه، با تغییر محدود باشند. اگر تغییرهای کلی این تابع‌ها، در مجموع خود، محدود باشند:

$$\bigvee_a^b g_n(x) \leqslant V \quad (n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$$

و ضمناً $g_n(x)$ به ازای $n \to \infty$، به سمت یك تابع حدی میل کند:

$$g(x)=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, g_n(x)$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\int_a^b f(x)dg_n(x)=\int_a^b f(x)dg(x)$$

اثبات. قبل از هرچیز، ازاین مطمئن شویم که، خودتابع حدی $g(x)$ نیز، دارای تغییر محدود است. بازهٔ $[a, b]$ را، به ترتیبی دلخواه، به وسیلهٔ نقطه‌های

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$$

تقسیم می‌کنیم. در این صورت (برای n دلخواه) داریم:

$$\sum_i|g_n(x_{i+1})-g_n(x_i)|\leqslant\bigvee_a^b g_n(x)\leqslant V$$

که اگر، به ازای $n\to\infty$، به سمت حد برویم، به دست می‌آید:

$$\sum_i|g(x_{i+1})-g(x_i)|\leqslant V$$

و ازآن‌جا

$$\bigvee_a^b g(x)\leqslant V$$

مجموع‌های ستیلتیس را تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma=\sum_i f(x_i)\Delta g(x_i),\quad \sigma_n=\sum_i f(x_i)\Delta g_n(x_i)$$

اگر فرض کنیم، بازهٔ $[a, b]$، به بخش‌های چنان کوچکی تقسیم شده باشد که، نوسان تابع $f(x)$ در هرکدام از آن‌ها، کوچکتر از عدد مفروض $\varepsilon>0$ باشد، آن وقت، بنابر برآورد (۲۶)، برای همهٔ nها، داریم:

$$|\sigma_n-\int_a^b f(x)dg_n(x)|\leqslant\varepsilon V,\quad |\sigma-\int_a^b f(x)dg(x)|\leqslant\varepsilon V \qquad (۲۷)$$

ازطرف دیگر، اگرهمین تقسیم را تثبیت کنیم، روشن است که، به ازای $n\to\infty$، خواهیم داشت: $\sigma_n\to\sigma$، به نحوی که می‌توانیم N را طوری پیدا کنیم که، برای $n>N$، داشته باشیم:

$$|\sigma_n-\sigma|<\varepsilon \qquad (۲۸)$$

دراین صورت، برای همان مقدارهای n، بنابر (۲۷) و (۲۸)، خواهیم داشت:

$$\left|\int_a^b f\,dg_n-\int_a^b f\,dg\right|\leqslant\left|\int_a^b f\,dg_n-\sigma_n\right|+|\sigma_n-\sigma|+$$

$$+|\sigma-\int_a^b f\,dg|<(۲V+۱)\varepsilon$$

که باتوجه به دلخواه بودن ε، حکم لازم را ثابت می‌کند.

۵۸۴. مثال‌ها و اضافه‌ها. ۱) اگر تابع $g(x)$، به‌معنای اکید خود، صعودی یکنوا باشد، می‌توان برای ξ ـ در دستور (۲۴) ـ دقیق‌تر حکم کرد: $a<\xi<b$.

در واقع، اگر حداقل و حداکثر مقدار تابع $f(x)$ را، دربازهٔ $[a,b]$، m و M بنامیم و $m<M$ به حساب آوریم*، به سادگی می‌توانیم بخش $[\alpha,\beta]$ را، ازاین بازه، چنان پیدا کنیم که مرزهای $f(x)$ در آن، برابر $m'>m$ و $M'<M$ باشند، به نحوی که [با (۲۳) مقایسه کنید]

$$m[g(\beta)-g(\alpha)]<m'[g(\beta)-g(\alpha)]\leqslant(s)\int_\alpha^\beta\leqslant$$

$$\leqslant M'[g(\beta)-g(\alpha)]<M[g(\beta)-g(\alpha)]$$

اگر نابرابرهای (۲۳) را برای بازه‌های $[a,\alpha]$ و $[\beta,b]$ بنویسیم و آن‌ها را، با قبلی‌ها، جمع کنیم، به‌یك نابرابری می‌رسیم که از (۲۳) دقیق‌تر است:

$$m[g(b)-g(a)]<I<M[g(b)-g(a)]$$

به نحوی که

$$\mu=\frac{I}{g(b)-g(a)}$$

دقیقاً بین m و M (ونه برابر بایکی ازآن‌ها) قرار می‌گیرد؛ در نتیجه، می‌توان ξ راهم پیدا کرد، که برای آن داریم: $\mu=f(\xi)$، به‌نحوی که بین a و b (ونه برابر بایکی ازآن‌ها) باشد.

---

*) درحالت $M=m$، تابع $f(x)$ منجر به‌مقدار ثابت می‌شود و مقدار آن، در حالت کلی، می‌تواند دلخواه باشد.

۲) با استفاده از دستور (۱۱) شمارهٔ **۵۷۹** دستور انتگرال‌گیری جزء به جزء و قضیهٔ مربوط به میانگین برای انتگرال‌های ستیلتیس [۵۷۷؛ **۵۸۲**، ۱°]، می‌توان قضیهٔ دوم میانگین را دربارهٔ انتگرال‌های معمولی [**۳۰۶**]، به سادگی، ثابت کرد.

به‌این ترتیب، فرض می‌کنیم، $f(x)$ (به‌معنای ریمانی) انتگرال‌پذیر و $g(x)$ صعودی یکنوا*، در بازهٔ $[a, b]$، باشند. تابع

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

را درنظر می‌گیریم که، تابعی پیوسته است [**۳۰۵**، ۱۱°].

اکنون به ترتیب داریم:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)dF(x)=g(x)F(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)dg(x)=$$

$$=g(b)f(b)-F(\xi)[g(b)-g(a)]=g(a)F(\xi)+g(b)[F(b)-F(\xi)]=$$

$$=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx \quad (a\leqslant\xi\leqslant b)$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

در حالتی که $g(x)$ صعودی یکنوا، به معنای اکید خود، باشد، می‌توان بر اساس آن چه در ۱) دیدیم، ξ را دقیق‌تر ارزیابی کرد: $a<\xi<b$.

۳) ثابت کنید که اگر، در نقطه $x=c$، یکی از تابع‌های f و g پیوسته و، دیگری، در همسایگی این نقطه، کران‌دار باشد، آن وقت، وجود انتگرال‌های $\int_a^c(s)$ و $\int_c^b(s)$، به معنای وجود انتگرال $\int_a^b(s)$ است [**۵۷۶**، ۵° را ببینید].

برای این منظور، توجه کنیم که، اگر نقطهٔ c را در ترکیب نقطه‌های تقسیم وارد کنیم، مجموع ستیلتیسی σ، از مجموع‌های مشابه در بازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ تشکیل خواهد شد و، به ازای $\lambda=\max\Delta x_i\to 0$، به مجموع انتگرال‌های $\int_a^c f\,dg+\int_c^b f\,dg$ می‌رسد.

---

*) حالتی را که $g(x)$ نزولی یکنوا باشد، می‌توان به سادگی به‌همین حالت منجر کرد.

میل خواهد کرد. اکنون فرض می‌کنیم، نقطه c، در میان نقطه‌های تقسیم نباشد. اگر نقطهٔ c را به نقطه‌های تقسیم اضافه کنیم، به جای σ، به مجموع جدید $\bar{\sigma}$ می‌رسیم که می‌دانیم، به ازای $\lambda \to 0$، دارای حد مشخصی است. بنابراین، کافی است ثابت کنیم، تفاضل $\bar{\sigma} - \sigma$، همراه با λ، به سمت صفر میل می‌کند.

فرض کنیم، c در بازهٔ $[x_k, x_{k+1}]$ بیفتد؛ در این صورت، تفاوت مجموع $\bar{\sigma}$ با مجموع σ در این است که، به جای جملهٔ

$$f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

در آن، دو جملهٔ زیر وجود دارد:

$$f(\xi')[g(c) - g(x_k)] + f(\xi'')[g(x_{k+1}) - g(c)]$$

که در آن، ξ' و ξ''، با شرط‌های $x_k \leqslant \xi' \leqslant c$ و $c \leqslant \xi'' \leqslant x_{k+1}$ انتخاب شده‌اند. اگر برای سادگی کار، فرض کنیم: $\xi' = \xi'' = c$، عبارت اخیر، به صورت زیر در می‌آید:

$$f(c)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

به نحوی که

$$\sigma - \bar{\sigma} = [f(\xi_k) - f(c)][g(x_{k+1}) - g(x_k)] \qquad (۲۹)$$

در حالت $\lambda \to 0$، یکی از عامل‌های سمت راست، بی‌نهایت کوچک می‌شود و چون دومی کران دار است، نتیجه می‌شود: $\bar{\sigma} - \sigma \to 0$؛ چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴) اگر هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$، در یک نقطه $x = c$ $(a \leqslant c \leqslant b)$ ناپیوسته باشند، انتگرال ستیلتیس

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) \qquad (۳۰)$$

وجود ندارد.

برای اثبات، دو حالت را، جدا از هم، در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض می‌کنیم $a < c < b$، و حدهای $g(c-0)$ و $g(c+0)$ را نابرابر می‌گیریم. در این حالت، برای تشکیل مجموع ستیلتیسی، نقطهٔ c را جزو نقطه‌های تقسیم به حساب نمی‌آوریم و، مثلا، فرض می‌کنیم: $x_k < c < x_{k+1}$. با انتخاب یکبار $\xi_k \neq c$ و یکبار دیگر $\xi_k = c$، دو مجموع σ و $\bar{\sigma}$ را تشکیل می‌دهیم؛ تفاضل این دو مجموع، منجر به عبارت (۲۹) می‌شود. با نزدیک کردن نقطه‌های تقسیم، به یکدیگر، خواهیم داشت:

$$g(x_{k+1})-g(x_k)\to g(c+0)-g(c-0)\neq 0$$

علاوه بر آن، نقطهٔ ξ_k را می‌توان طوری انتخاب کرد که، تفاضل $f(\xi_k)-f(c)$، از لحاظ قدر مطلق، بزرگتر از عدد ثابت مثبتی باشد. در این صورت، تفاضل $\sigma-\overline{\sigma}$ به سمت صفر میل نمی‌کند، به نحوی که، انتگرال نمی‌تواند وجود داشته باشد.

درحالتی‌هم که داشته باشیم: $g(c-0)=g(c+0)$، ولی مقدارمشترک آن‌ها مخالف $g(c)$ باشد*، c را بین نقطه‌های تقسیم به حساب می‌آوریم و فرض می‌کنیم: $c=x_k$. اگر $f(x)$، مثلادارای ناپیوستگی‌سمت راست، درنقطهٔ $x=c$ باشد، مثل‌قبل، دومجموع σ و $\overline{\sigma}$ را، که تنها در انتخاب ξ_k فرق دارند، تشکیل می‌دهیم؛ برای σ، نقطهٔ ξ_k، به دلخواه بین $x_k=c$ و x_{k+1} اختیار شده است، و برای σ ، c را به عنوان ξ_k انتخاب کرده‌ایم. مثل حالت قبل، به (۲۹) می‌رسیم و، بحث، به همان ترتیب، ادامه می‌یابد.

تمرین‌های ۳) و ۴)، برآن چه که درپایان شماره **۵۷۶** بحث کردیم، روشنی بیشتری می‌اندازند.

۵) فرض کنیم، دربازهٔ $[a, b]$، $f(x)$ تابعی پیوسته و $g(x)$ دارای تغییر محدود باشد.

با تکیه بر برآورد(۲۵)، پیوستگی انتگرال ستیلتیس

$$I(x)=\int_a^x f(t)dg(t)$$

را (که موز بالای آن، x، متغیر است) در نقطهٔ x_0، که در آن جا $g(x)$ پیوسته است، ثابت کنید.

نتیجه را می‌توان بلافاصله، از نابرابری زیر، به دست آورد:

$$\left|I(x_0+\Delta x)-I(x_0)\right|=\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f\,dg\right|\leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)\cdot \bigvee_{x_0}^{x_0+\Delta x} g(x)$$

به شرطی که توجه کنیم، در نقطهٔ x_0، تغییر $\bigvee_a^x g(x)$ هم باید پیوسته باشد [۵۷۱، ۹°].

---

*) حالتی هم که $c=a$ و $g(a+0)$ مخالف $g(a)$ باشد، و یا $c=b$ و $g(b-0)$ مخالف $g(b)$ باشد، همین مطلب درست است.

۶) اگر $\mathfrak{F}$ طبقهٔ تابع‌های پیوسته در بازهٔ $[a, b]$ و $\mathfrak{G}$ طبقهٔ تابع‌های با تغییر محدود در این بازه باشند، می‌دانیم که، در این صورت، هر تابع از یك طبقه، نسبت به هر تابع از طبقهٔ دیگر، انتگرال‌پذیر است. ثابت کنید که، اگر بخواهیم، این دو طبقه، ویژگی مفروض (۱) داشته باشند، نمی‌توان هیچ‌کدام از آن‌ها را گسترده‌تر کرد.

این حکم، با توجه به ۴)، دربارهٔ طبقهٔ $\mathfrak{F}$ تقریباً واضح است. درواقع، اگر تابع $f(x)$ دارای نقطهٔ ناپیوستگی x_0 باشد، در آن صورت روشن است که، مثلا نسبت به تابع با تغییر محدود $\rho(x-x_0)$، که در همان نقطه ناپیوسته است، آشکارا، انتگرال ناپذیر می‌شود [۵۷۳].

اکنون فرض می‌کنیم، $g(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، دارای تغییر کامل نامتناهی باشد؛ با این فرض، چنان تابع پیوسته‌ای برای $f(x)$ می‌سازیم که، برای آن، انتگرال (۳۰) وجود نداشته باشد.

اگر بازهٔ $[a,b]$ را به دو بخش تقسیم کنیم، دست‌کم در یکی از آن‌ها، تغییر کامل تابع $g(x)$، باز هم نامتناهی می‌شود. این نیمه را دوباره به دو بخش تقسیم می‌کنیم و غیره. با این روش، نقطه‌ای مثل c پیدا می‌شود که، در هیچ کدام از همسایگی‌های آن، $g(x)$ دارای تغییر محدود نیست. برای سادگی فرض می‌کنیم: $c=b$.

در این حالت، می‌توان به سادگی دنباله‌ای صعودی از مقدارهای $x=a_n$ را، که به سمت b میل می‌کند

$$a_0=a<a_1<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots<b,\ b_n\to b$$

چنان ساخت که رشتهٔ

$$\sum_{i=0}^{\infty}|g(a_{i+1})-g(a_i)|$$

متباعد شود. سپس، برای این رشته هم، می‌توان دنباله‌ای از عددهای $f_i>0$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$، که به سمت صفر میل می‌کنند، انتخاب کرد، به نحوی که رشتهٔ

$$\sum_{i=0}^{\infty}f_i|g(a_{i+1})-g(a_i)| \qquad (۳۱)$$

هم متباعد شود [با ۳۷۵، ۴) و ۷) مقایسه کنید]. اکنون، تابع $f(x)$ را به این ترتیب، تعیین می‌کنیم که داشته باشیم:

$$f(a_i)=f_i\operatorname{sign}[g(a_{i+1})-g(a_i)]^* \quad (i=0, 1, 2, \dots),$$
$$f(b)=0$$

ضمناً $f(x)$ در بازه‌های $[a_i, a_{i+1}]$، خطی به حساب می‌آوریم:

$$f(x)=f(a_i)+\frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i}(x-a_i) \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

روشن است که $f(x)$، تابعی است پیوسته؛ با وجود این، با توجه به تباعد رشتهٔ (۳۱)، به ازای $n\to\infty$، داریم:

$$\sigma_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)[g(a_{i+1})-g(a_i)]=\sum_{i=0}^{n-1} f_i[g(a_{i+1})-g(a_i)]\to+\infty$$

به نحوی که، درواقع، انتگرال f نسبت به g، وجود ندارد.

حکمی را که ثابت کردیم، به این ترتیب هم، می‌توان بیان کرد: اگر انتگرال ستیلتیس (۳۰)، برای تابع مفروض f، نسبت به تابع دلخواه g از $\mathfrak{G}$، وجود داشته باشد، در آن صورت، f الزاماً به $\mathfrak{F}$ تعلق خواهد داشت؛ به همین ترتیب: اگر این انتگرال، نسبت به به تابع مفروض g، برای f از $\mathfrak{F}$ وجود داشته باشد، در آن صورت، g الزاماً به $\mathfrak{G}$ تعلق دارد.

۷) در قضیهٔ اول مربوط به عبور حد در زیر علامت انتگرال ستیلتیس [۱،۵۸۳°]، با این شرط عمل کردیم که، دنبالهٔ تابع‌های $\{f_n(x)\}$ به طوری که نواخت، به سمت تابع حدی $f(x)$ میل کند. می‌توان، به جای این شرط، این شرط گسترده‌تر را قرار داد که، همهٔ این تابع‌ها کران دار هستند:

$$|f_n(x)|\leqslant M$$
$$(M=\text{const}, a\leqslant x\leqslant b, n=1, 2, 3, \dots)$$

[تنها لازم است، پیوستگی تابع حدی $f(x)$ را، از قبل، مفروض بگیریم].

برای اثبات، کافی است حالتی را در نظر بگیریم که $g(x)$، به معنای اکید خود، صعودی باشد [یادداشت شمارهٔ ۵۷۰ را ببینید]. ولی، برای این حالت، می‌توان از تبدیل شمارهٔ ۵۷۸ [(۱۰) را ببینید] استفاده کرد:

$$(S)\int_a^b f_n(x)\,dg(x)=(R)\int_{v_0}^{V} f_n(g^{-1}(v))\,dv,$$

---

*) یادآوری می‌کنیم که $\operatorname{sign} z$ عبارت است از $+1$، 0 یا -1، بسته به این که، z بزرگتر، مساوی یا کوچکتر از صفر باشد. در هرحال $z\operatorname{sign} z=|z|$.

$$(s)\int_a^b f(x)\,dg(x)=(R)\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\,dv$$

و با توجه به این‌که، با انتگرال‌های ریمانی سروکار داریم، به‌سادگی، قضیهٔ آرتسلا را به‌کار برد:

۸) در پایان، تفسیر دیگری از مفهوم انتگرال ستیلتیس می‌دهیم که، به مفهوم تابع جمعی (Additive function) از بازه، مربوط می‌شود [با ۳۴۸ مقایسه کنید].

فرض کنیم، برای هر بخش $[\alpha,\beta]$ از بازهٔ مفروض $[a,b]$، عدد $G([\alpha,\beta])$ متناظر باشد؛ ضمناً، اگر بازهٔ $[\alpha,\beta]$، به وسیلهٔ نقطهٔ γ، به بخش‌های $[\alpha,\gamma]$ و $[\gamma,\beta]$ تقسیم شود، داشته باشیم:

$$G([\alpha,\beta])=G([\alpha,\gamma])+G([\gamma,\beta])$$

در این صورت، $G([\alpha,\beta])$ را تابع جمعی از بازهٔ متغیر $[\alpha,\beta]$ گویند. فرض کنیم، علاوه بر آن، برای بازهٔ $[a,b]$، تابع نقطه‌ای $f(x)$ هم داده شده باشد. اکنون، طبق معمول، بازهٔ $[a,b]$ را به وسیلهٔ نقطه‌های

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

به بخش‌های $[x_i,x_{i+1}]$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ تقسیم و، در هر بخش، نقطهٔ دلخواه ξ_i انتخاب شده باشد و، بالاخره، مجموع زیر را تشکیل داده باشیم:

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)G([x_i,x_{i+1}]) \qquad (۳۲)$$

حد این مجموع، به ازای $\lambda=\max(x_{i+1}-x_i)\to 0$، عبارت‌است از انتگرال ستیلتیس که، به طور طبیعی، با توجه به روش تشکیل آن، این طور نشان داده می‌شود:

$$\int_a^b f(x)\,G(dx) \qquad (۳۳)$$

اگر تابع نقطه‌ای دیگر $g(x)$ را به این ترتیب، تعریف کنیم:

$$g(x)=G([a,x]) \quad (x>a) \text{ و } g(a)=0$$

آن وقت، با توجه به‌جمعی‌بودن تابع G، در همهٔ حالت‌ها داریم:

$$G([\alpha,\beta])=g(\beta)-g(\alpha) \qquad (۳۴)$$

به طوری‌که مجموع (۳۲)، به مجموع ستیلتیسی معمول

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,[g(x_{i+1})-g(x_i)]$$

وحد (۳۳)، به انتگرال ستیلتیسی معمولی

$$(s)\int_a^b f(x)dg(x)$$

تبدیل می‌شود.

برعکس، اگر انتگرال اخیر وجود داشته باشد، آن وقت، با تعریف تابع از بازه با برابری (۱۴) (که ضمناً، می‌توان تحقیق کرد که تابعی جمعی است)، می‌توان انتگرال ستیلتیس معمولی را، به انتگرال (۳۴) تبدیل کرد.

۵۸۵. تبدیل انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم، به انتگرال ستیلتیس. اکنون که باانتگرال‌های ستیلتیس آشنا شده‌اید، مراجعهٔ به انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم [۵۴۶]، می‌تواند مفید باشد.

$$\int_{(AB)} f(x,y)dx \quad [\text{یا} \int_{(AB)} f(x,y)dy]$$

فرض می‌کنیم، منحنی (AB) با معادله‌های پارامتری، داده شده باشد:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

و وقتی‌که t، به‌طور یکنوا، از α تا β تغییر می‌کند، منحنی (AB) از A به B پیموده‌شود. برای مشخص بودن وضع $\alpha<\beta$ می‌گیریم. در این‌صورت، نقطه‌های $A_i\ (i=0,1,\dots,n)$، که برای تشکیل مجموع انتگرالی روی منحنی انتخاب شده‌اند، متناظر‌ند با مقدارهای صعودی پارامتر t

$$t_0=\alpha<t_1<\dots<t_i<t_{i+1}<\dots<t_n=\beta$$

و همچنین، نقطهٔ M_i از کمان A_iA_{i+1}، متناظر است با

$$t=\tau_i\ (i=0,1,\dots,n-1;\ t_i\leqslant\tau_i\leqslant t_{i+1})$$

خود مجموع انتگرالی هم، ومثلا اولی، به‌صورت زیرنوشته می‌شود:

$$\sigma=\sum_i f(\varphi(\tau_i),\ \psi(\tau_i))\Delta\varphi(t_i)$$

مستقیماً روشن است که این مجموع، یك مجموع ستیلتیسی است، به نحوی که، انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم، بنابر تعریف خود، با حالت‌خاص انتگرال ستیلتیسی، یکی می‌شود.

$$\int_{(AB)} f(x, y)dx = (s)\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))d\varphi(t)$$

و به همین ترتیب

$$\int_{(AB)} f(x, y)dy = (s)\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))d\psi(t)$$

ازاین‌جا، شرطهای کاملاکلی وجود انتگرال منحنی‌الخط (۳۵) به دست می‌آید. کافی است تابع $f(x, y)$ پیوسته و تابع $\varphi(t)$ (یا $\psi(t)$ برحسب حالت) دارای تغییر محدود [۱۰،۵۷۵°] باشد.

در حالت خاص، اگر منحنی AB راستاپذیر [۵۷۲] و تابع‌های $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ پیوسته باشند، آن وقت، انتگرال زیر وجود دارد:

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))d\varphi(t) + \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t))d\psi(t)$$

اکنون، با توجه به‌آن چه در ۵۷۹ دربارهٔ محاسبهٔ انتگرال‌های ستیلتیس گفته شده است [به‌خصوص ۲° را ببینید]، می‌توان دوباره، دستورهای (۴) و (۵) یا (۶) ازشمارهٔ ۵۴۷ را، حتی با فرض‌هایی کلی‌تر از سابق، به دست‌آورد.

سپس، می‌توانیم نتیجهٔ آخرشمارهٔ ۵۵۱ را، به‌سادگی، تعمیم دهیم: مساحت شکل (D) محدود به منحنی پیوستهٔ راستاپذیر، با یکی از دستورهای (۹)، (۱۰) یا (۱۱) شمارهٔ مذکور بیان می‌شود. ضمناً، برای بحث دراین مورد، لزومی ندارد چیزی‌را تغییر دهیم، زیرا پیش‌قضیهٔ شمارهٔ ۵۵۰ [و یادداشت مربوط به‌آن] را می‌توان مستقیماً، در حالت منحنی راستاپذیر، به‌کار برد. یادداشت آخر شمارهٔ ۵۷۲ را نیز ببینید.

بالاخره، تمامی‌نظریهٔ انتگرال منحنی‌الخط نسبت به مسیرخود [§۳]، درموردحالت انتگرال‌های برروی مسیر راستاپذیر دلخواه، تعمیم داده می‌شود.

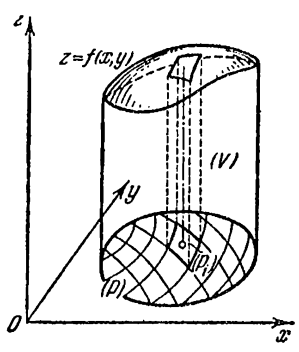
MATH75.IR

فصل شانزدهم

انتگرال‌های دوگانه

§۱. تعریف و ویژگی‌های سادهٔ انتگرال‌های دوگانه

۵۸۶. مسألهٔ مربوط به‌حجم تیر استوانه‌ای. همان‌طور که مسألهٔ مربوط به‌مساحت ذوزنقهٔ منحنی‌الخط، ما را به‌مفهوم انتگرال معین راهنمایی کرد [۲۹۴]، مسألهٔ مشابه‌آن، که دربارهٔ حجم تیر استوانه‌ای است، ما را به سمت مفهوم تازه‌ای ــ انتگرال (معین) دوگانه ــ راهنمایی می‌کند.



شکل ۳۳

جسم (V) را درنظر می‌گیریم، که از بالا، به وسیلهٔ سطح

$$z = f(x, y) \qquad (۱)$$

از پهلوها به وسیلهٔ سطح استوانه‌ای به مولدهای موازی محور z و، بالاخره، ازپایین به‌وسیلهٔ شکل مسطح (P) واقع برصفحهٔ xy (شکل۳۳)، محدود شده است. می‌خواهیم حجم V این جسم را پیدا کنیم*.

اگر بخواهیم این‌مسأله را، با روش محاسبهٔ انتگرالی، حل‌کنیم، طبق معمول، ابتدا حجم مورد نظر را به بخش‌های جزئی تقسیم و حجم هربخش را محاسبه می‌کنیم؛ سپس، مجموع این حجم‌های جزئی را به دست می‌آوریم وبا عبور به‌سمت حد، به‌نتیجهٔ‌مطلوب

---

*) اگر تابع $f(x, y)$ پیوسته وبخش مستوی (P) تربیع‌پذیر باشد، در آن صورت، وجود حجم برای حالت مفروض، به سادگی و از ملاحظه‌های مربوط به شماره‌های **۳۴۱** و **۳۳۷**، نتیجه می‌شود.

می‌رسیم. برای این منظور، حوزهٔ (P) را، با شبکه‌ای از منحنی‌ها، به بخش‌های (P_1)، (P_2)، ...، (P_n) تقسیم می‌کنیم و یك رشته ستون‌های استوانه‌ای را در نظر می‌گیریم که، قاعده‌های آن‌ها، همین بخش‌های جزئی باشند و، روی هم، جسم مفروض‌را تشکیل‌دهند.

برای محاسبهٔ حجم‌های جداگانهٔ این استوانه‌ها، در هرشکل (P_i)، نقطهٔ (ξ_i, η_i) را به‌دلخواه، انتخاب می‌کنیم. اگر به‌جای هرستون، یك‌استوانهٔ واقعی به ارتفاع $f(\xi_i, \eta_i)$ در نظر بگیریم، حجم ستون، به تقریب، چنین می‌شود:

$$f(\xi_i, \eta_i) \cdot P_i$$

که در آن، P_i عبارت است از مساحت شکل (P_i). دراین حالت، مقدار تقریبی حجم تمامی جسم، برابر است با

$$V \doteq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot P_i$$

هرقدر تعداد (P_i)ها بیشتر و، در نتیجه، مساحت P_iها کوچکتر باشد، دقت این رابطه، بیشتر می‌شود. درحد، وقتی که بزرگترین قطر از همهٔ حوزه‌های (P_i) به‌سمت‌صفر میل‌کند، به یك برابری تحقیقی می‌رسیم:

$$V = \text{حد} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i \qquad (۲)$$

و به این ترتیب، مسأله‌ای که طرح کردیم، حل شد.

وقتی‌که حد به‌این صورت باشد، انتگرال دوگانه از تابع $f(x, y)$ نسبت به حوزهٔ (P) نامیده می‌شود، و به این ترتیب، نمایش می‌دهند:

$$\int_{(P)} \int f(x, y) dP$$

و دستور (۲)، برای حجم، به‌این صورت در می‌آید*:

$$V = \int_{(P)} \int f(x, y) dP \qquad (۲^*)$$

به‌این ترتیب، انتگرال دوگانه، عبارت است از تعمیم مستقیم مفهوم انتگرال معین

---

*) برای شکل‌کاملا دقیق این دستور، شمارهٔ ۵۹۰ را ببینید.

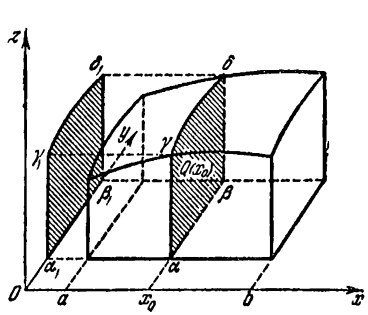
ساده، درحالت تابع با دو متغیر. این انتگرال، در تعیین کمیت‌های هندسی وفیزیکی هم، نقشی اساسی دارد.

۵۸۷. تبدیل انتگرال دوگانه به انتگرال تکراری. باادامهٔ تعبیر هندسی انتگرال دوگانه، به عنوان حجم یك تیر استوانه‌ای، راهنمایی‌هایی برای محاسبهٔ آن، از طریق تبدیل آن به انتگرال تکراری، به دست می‌دهیم.

قبلا، در جلد دوم، با مسألهٔ محاسبهٔ حجم جسم (V) ازروی مقطع عرضی آن، سرو کار داشته‌ایم [۳۴۲]. فرض کنیم، جسم، محدود به صفحه‌های $x=a$ و $x=b$ باشد (شکل ۳۴)؛ همچنین فرض می‌کنیم، مقطع جسم با صفحهٔ عمود بر محور x و نظیر طول x $(a\leqslant x\leqslant b)$، دارای مساحت $Q(x)$ باشد. آن وقت، حجم جسم، به‌فرض وجودآن، با دستور زیر بیان می‌شود:

$$V=\int_a^b Q(x)dx \qquad (۳)$$

اکنون، ازاین‌دستور، برای محاسبهٔ حجم تیر استوانه‌ای، که درشمارهٔ پیش مطرح کردیم، استفاده می‌کنیم. از حالت ساده‌ای آغاز می‌کنیم که، قاعدهٔ تیر، از مستطیل $[a, b; c, d]$ تشکیل شده باشد (شکل ۳۵).



شکل ۳۴

شکل ۳۵

مقطع تیر با صفحهٔ $x=x_0$ $(a\leqslant x_0\leqslant b)$، ذوزنقهٔ منحنی‌الخط $\alpha\beta\gamma\delta$ است. برای پیداکردن مساحت آن، این شکل را برصفحهٔ yz تصویر می‌کنیم؛ ذوزنقهٔ $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ را، که برابر با آن است، به دست می‌آید (زیرا، برصفحهٔ موازی خودش تصویر شده است). بنابراین

$$Q(x_0)=\text{مساحت } \alpha\beta\gamma\delta=\text{مساحت } \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$$

ولی، معادلهٔ منحنی $\gamma_1\delta_1$ در صفحهٔ yz، به روشنی، چنین است:

$$z=f(x_0, y) \quad (c\leqslant y\leqslant d)$$

با استفاده از مقدار معلـوم مساحت ذوزنقهٔ منحنی‌الخط به صورت انتگرال معین، خواهیم داشت:

$$Q(x_0)=\int_c^d f(x_0, y)dy$$

چون بحث ما، مربوط به‌مقطعی‌دلخواه است، بنابراین، به‌طور کلی، برای $a\leqslant x\leqslant b$ داریم:

$$Q(x)=\int_c^d f(x, y)dy^*$$

باقراردادن این‌مقدار $Q(x)$ در دستور (۳)، به دست می‌آید:

$$V=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)dy$$

ولی، برای حجم V، مقدار (۲) را هم داریم، بنابراین

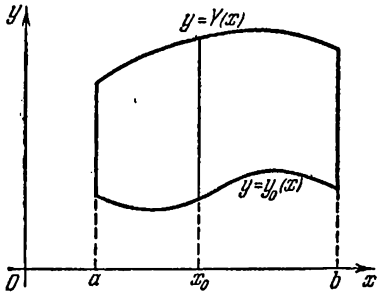
$$\int\int_{(P)} f(x, y)dP=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)dy \qquad (۴)$$

و، به‌این‌ترتیب، انتگرال‌دوگانه، به‌انتگرال تکراری تبدیل می‌شود.

در حالت کلی‌تر هم، که حوزهٔ (P) بر صفحهٔ xy، ذوزنقهٔ منحنی‌الخطی است، محدود به منحنی‌های

$$y=y_0(x) \text{ و } y=Y(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

و دو عـرض $x=a$ و $x=b$ (شکل ۳۶)، می‌توان به‌نتیجهٔ مشابهی رسید.



شکل ۳۶

---

*) این تابع نسبت به x هم، باهمان فرض که برای نتیجـه‌گیری دستور (۳) داشتیم، پیوسته است [۵۰۶].

تفاوت در این است که: قبلا، با تثبیت $x = x_0$ دلخواه، مقدارهای y در بازهٔ $[c,d]$ واقع می‌شدند، در حالی که اکنون، بازهٔ

$$[y_0(x_0), Y(x_0)]$$

خود، بستگی به x_0 دارد، به نحوی که

$$Q(x_0) = \int_{y_0(x_0)}^{Y(x_0)} f(x_0, y)dy$$

و سرانجام، به دست می‌آید:

$$V = \int_{(P)} \int f(x, y)dP = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)dy^* \qquad (5)$$

اکنون که با مفهوم انتگرال دوگانه ومحاسبهٔ آن، به‌کمك تعبیر هندسی، آشنا شدیم، موضوع را به صورتی کلی‌تر و از دیدگاه تحلیلی خالص، مطرح می‌کنیم.

۵۸۸. تعریف انتگرال دوگانه: باهمهٔ این‌ها، در این‌جا هم، بدون هندسه و یادست‌کم بدون زبان هندسی، به بحث نمی‌پردازیم [۱۶۰–۱۶۳]: دربارهٔ «حوزهٔ دو بعدی» (P) صحبت خواهیم کرد، حوزه‌ای که تابع با دو متغیر مفروض، در آن‌جا معین است؛ آن را به‌کمك «منحنی‌ها» به «حوزه‌های» جزئی تقسیم خواهیم کرد؛ از «مساحت» این «حوزه‌ها» نام خواهیم برد وغیره. درعمل، این «حوزه‌ها» و «منحنی‌ها» درفضای دو بعدی قراردارند که، نقطه‌های آن، نقش زوج عددها را به عهده دارند. ولی، به خاطر سادگی بیشتر، به جای همهٔ این‌ها، از شکل واقعی هندسی آن‌ها استفاده می‌شود، بدون این که، هیچ گونه تفاوتی بین آن‌ها قایل باشند. به خصوص، هروقت که از «مساحت حوزه» درفضای دو بعدی حسابی صحبت می‌شود، همیشه مساحت حوزهٔ هندسی متناظر با آن، در نظر گرفته می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که، برای تربیع پذیربودن حوزهٔ محدود به یك منحنی، لازم و کافی است که، این منحنی، دارای مساحت صفر باشد [۳۳۷]. طبقهٔ وسیع این منحنی‌ها را، منحنی‌های هموار و یا منحنی‌هایی که ازتعدادی متناهی قطعه‌های هموار تشکیل شده‌اند (یعنی، منحنی‌های قطعه به‌قطعه هموار)، می‌نامند.** از قبل فرض می‌کنیم که هم دورهٔ حوزهٔ

---

*) در این جا هم، انتگرال درونی، تابع پیوسته‌ای از x می‌شود [**۵۰۹** را ببینید].

**) بدون این که این ویژگی به هم بخورد، می‌توان، وجود تعدادی متناهی از نقطه‌های خاص را هم پذیرفت.

(P) و هم منحنی‌هایی که حوزه را به بخش‌ها تقسیم می‌کنند، همگی دارای مساحت صفر باشند (مثلا، متعلق به طبقه‌ای باشند که هم اکنون اشاره کردیم)؛ با این فرض، وجود همهٔ مساحت‌های لازم، تضمین می‌شود.

حالا، دوباره به مفهوم انتگرال دوگانه ــ که در شمارهٔ ۵۸۶ با آن آشنا شدیم ــ برگردیم و، به‌صورت گسترده‌تری، تعریف کلی آن را بیاوریم.

فرض کنیم، تابع $f(x,y)$، در حوزهٔ (P)، معین باشد.* حوزهٔ (P) را، به کمک شبکه‌ای از منحنی‌ها، تعدادی متناهی حوزه‌های (P_1)، (P_2)، ...، (P_n) تقسیم می‌کنیم و مساحت‌های آن‌ها را؛ به ترتیب، P_1، P_2، ...، P_n می‌نامیم. اگر چه ساده‌تر از همه این است که این حوزه‌های جزئی را، همبند بگیریم، ولی برای این که بحث آیندهٔ خود را راحت‌تر کنیم، بهتر است امکان وجود ناهمبندی را هم، در نظر داشته باشیم. در محدودهٔ i امین حوزهٔ جزئی (P_i)، نقطهٔ (ξ_i,η_i) را به دلخواه انتخاب، مقدار $f(\xi_i,\eta_i)$ تابع را در این نقطه، در مساحت P_i ــ حوزهٔ نظیر آن ــ ضرب و، بالاخره، حاصل ضرب‌های مشابه را با هم جمع می‌کنیم. مجموع حاصل

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)P_i$$

را، مجموع انتگرالی برای تابع $f(x,y)$، در حوزهٔ (P)، می‌نامیم.

بزرگترین قطر** از حوزه‌های جزئی (p_i) را λ می‌نامیم.

حد متناهی I*** ازمجموع انتگرالی σ را، به ازای $\lambda\to 0$، انتگرال دوگانهٔ تابع $f(x,y)$ در حوزهٔ (P) می‌نامند و آن را این طور نشان می‌دهند:

$$I=\iint_{(P)} f(x,y)\,dP$$

تابعی را که دارای انتگرال باشد، انتگرال پذیر گویند.

۵۸۹. شرط‌های وجود انتگرال دوگانه. تابع انتگرال پذیر، الزاماً باید کران‌دار

---

*) ضمناً، هیچ فرضی دربارهٔ پیوستگی آن، نمی‌کنیم.

**) یادآور می‌شویم که، درمجموعهٔ نقطه‌ها، قطر عبارت است از حداکثر فاصلهٔ بین دو نقطه دلخواه مجموعه. درحالتی که با حوزهٔ مستوی بسته ومحدود به‌منحنی پیوسته سروکار داشته‌باشیم، قطر، به طور ساده، عبارت است از بزرگترین وتر (۱۷۴ را ببینید).

***) خواننده خود، می‌تواند به سادگی، معنای دقیق این مفهوم تازهٔ حد را دریابد.

باشد؛ زیرا درغیراین صورت، درهر تقسیم دلخواهی از حوزهٔ (P)، می‌توان به حساب انتخاب نقطه (ξ_i, η_i)، مجموع انتگرالی‌را به دلخواه بزرگ کرد.

به این ترتیب، وقتی که دربارهٔ شرط‌های انتگرال پذیری تابع مفروض $f(x,y)$ صحبت می‌کنیم، از پیش، آن راکران‌دار به حساب می‌آوریم:

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M$$

در این جا هم، مثل تابع یك متغیره، بهتر است از به‌اصطلاح مجموع‌های پایینی و بالایی داربو استفاده کنیم:

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i P_i \qquad S = \sum_{i=1}^{n} M_i P_i$$

که در آن‌ها، m_i و M_i، به ترتیب، عبارتند ازمرزهای دقیق پایین وبالای تابع $f(x,y)$ در حوزهٔ (P_i).

به ازای تقسیم حوزهٔ مفروض (P) بـه بخش‌ها، و بدون ارتباط به انتخاب نقطهٔ (ξ_i, η_i)، این نابرابری برقرار است:

$$s \leqslant \sigma \leqslant S$$

ولی، با انتخاب مناسب این نقطه‌ها، می‌توان مقدارهای $f(\xi_i, \eta_i)$ را به قدر دلخواه به m_i(یا M_i) نزدیك کردکه، همراه با آن، مجموع σ هم به قدر دلخواه به s (یا S) نزدیك می‌شود. به این ترتیب، مجموع‌های بالایی و پایینی داربو، به ترتیب، عبارتند از مرزهای دقیق بالا و پایین مجموع‌های انتگرالی متناظر با روش مفروض تقسیم حوزه.

برای مجموع‌های داربو، مثل‌حالت خطی، می‌توان ویژگی‌های زیررا ثابت‌کرد:

ویژگی اول. اگر با اضافه‌کردن نقطه‌های تقسیم‌جدید، بخش‌های (P_i) را خردتر کنیم، مجموع پایینی داربو، کاهش ومجموع بالایی‌آن، افزایش پیدا نمی‌کند.

ویژگی دوم. هرگز مجموع پایینی داربو، از مجموع بالایی آن تجاوز نمی‌کند، ولو این که مربوط به دو روش تقسیم حوزهٔ (P) باشند.

اثبات،کاملا شبیه قبل‌انجام می‌گیرد [۲۹۶]؛ فقط هرجاکه، درآن حالت‌ها، دربارهٔ نقطه‌های تقسیم صحبت شده است، دراین‌جا، باید از خط‌های تقسیم صحبت شود.

ولی، نکته‌ای وجود داردکه باید مورد توجه قرارگیرد. در حالت خطی، هر نقطهٔ جدید، به روشنی، یکی‌از بازه‌های قبلی‌را بـه دوبخش تقسیم می‌کند؛ ضمناً، بخش مشترك دوبازه، همیشه عبارت است ازیك بازه درحالت صفحه، به‌این دلیل وضع پیچیده‌تر می-

شود که، دو منحنی، می‌توانند یکدیگر را در نقطه‌های زیادی (وحتی در بی‌نهایت‌نقطه) قطع کنند. به همین مناسبت، یك حوزهٔ جزئی همبند، ممکن است به وسیلهٔ منحنی تازه، به بخش‌های ناهمبندهم تقسیم‌شود؛ همچنین، بخش‌مشترك دوحوزهٔ همبند، ممکن‌است‌حوزه‌ای ناهمبند باشد. به‌همین دلیل است‌که، ازهمان ابتدا، وجود بخش‌های ناهمبند را، در تقسیم حوزه، استثنا نکردیم.

بالاخره، مفهوم انتگرال‌های پایینی و بالایی داربو را وارد می‌کنیم:

$$I_* = \sup\{s\},\quad I^* = \inf\{S\}$$

ضمناً، معلوم می‌شود که

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S$$

سرانجام، با تکرار واژه به واژهٔ اثباتی که برای حالت خطی داشتیم [۲۹۷]، در این‌جا هم به دست می‌آید:

قضیه. برای وجود انتگرال دوگانه، لازم وکافی است‌که داشته باشیم:

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$$

ویا با علامت‌های دیگر:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i P_i = 0 \qquad (۶)$$

که درآن، ω_i عبارت است از نوسان $M_i - m_i$ تابع $f(x, y)$ دربازهٔ جزئی (P_i).

۵۹۰. طبقهٔ تابع‌های انتگرال‌پذیر. به کمك معیار فوق، می‌توان به سادگی ثابت کرد:

I. هر تابع $f(x, y)$که در حوزهٔ (P) پیوسته باشد، انتگرال‌پذیر است.

درواقع، اگر تابع f درحوزهٔ (بستهٔ)(P) پیوسته باشد، باتوجه به‌ویژگی پیوستگی یکنواخت، می‌توان برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ را چنان پیدا کردکه، در هر بخش دلخواه حوزهٔ (P)که قطری‌کمتر ازδ دارد، نوسان تابع‌کوچکتر از ε بشود. اکنون، حوزه (P) را طوری به بخش‌های (P_i) تقسیم می‌کنیم‌که همهٔ آن‌ها، قطری‌کمتر از δ داشته باشند، دراین صورت، برای هرنوسان داریم: $\omega_i < \varepsilon$ و

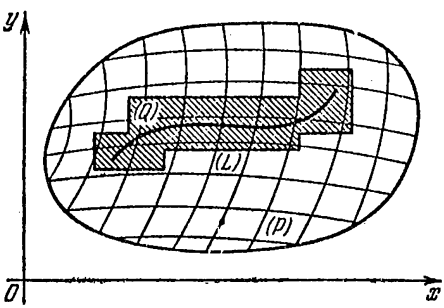
$$\sum_i \omega_i P_i < \varepsilon \sum P_i = \varepsilon P$$

ازاین‌جا معلوم می‌شودکه شرط (۶) برقرار و، بنابراین، تابع انتگرال‌پذیر است.

یادداشت. اکنون می‌توان، دستور (*۲) برای حجم تیر استوانه‌ای را، با دقتی بیشتر بیان کرد. برای این‌منظور می‌توان شبیه دستور انتگرالی برای مساحت ذوزنقهٔ منحنی‌الخط [۳۲۹] و با استفاده از مجموع‌های داربو برای حجم جسم‌های محاطی و محیطی، عمل کرد.

برای این‌که بتوانیم طبقهٔ تابع‌های انتگرال‌پذیر را گسترش دهیم، به‌پیش قضیهٔ زیر نیازداریم:

پیش‌قضیه. فرض‌کنیم، منحنی (L) که مساحتی برابر صفر دارد، درحوزهٔ (P) داده شده‌باشد. دراین صورت، می‌توان برای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه، $\delta > 0$ را طوری پیداکرد که، تنها وقتی‌که حوزهٔ (P) به‌بخش‌هایی با قطرهای کمتر از δ تقسیم شود، مجموع مساحت‌هایی از این حوزه‌های جزئی که با (L) نقطه‌های مشترک دارند، کمتر از ε باشد.



شکل ۳۷

بنابر فرض، منحنی (L) را می‌توان به وسیلهٔ حوزهٔ چندضلعی Q محیط کرد که مساحتی کمتر از ε داشته باشد. حوزهٔ Q را طوری آماده می‌کنیم که منحنی (L) بادروهٔ (K) از این حوزه، نقطهٔ مشترکی نداشته باشد. دراین‌صورت، فاصلهٔ بین نقطه‌های متغیر دو منحنی، به کمترین مقدار $\delta > 0$ خواهد رسید*.

اکنون حوزهٔ (P) را طوری به بخش‌ها تقسیم می‌کنیم که قطرهای آن‌ها، کوچکتر از δ باشند. روشن است که، در این صورت، همهٔ حوزه‌های جزئی که با منحنی (L) برخوردارند، در حوزهٔ (Q) قرارمی‌گیرند و، در نتیجه، مساحت آن‌ها، کمتر از ε می‌شود.

II. اگر تابع کران‌دار $f(x, y)$ دارای ناپیوستگی‌هایی در تعداد محدودی از منحنی‌های با مساحت صفر باشد، تابعی انتگرال‌پذیر است.

عدد دلخواه $\varepsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. بنا به‌فرض، همهٔ «منحنی‌های ناپیوستگی» در تابع $f(x, y)$ را، می‌توان در درون حوزهٔ چند ضلعی (Q) بامساحت کلی کوچکتر از ε محصور کرد. در شکل ۳۷، این‌حوزه را باهاشور، پوشانده‌ایم. مرز این حوزه، ازتعداد محدودی خط‌های شکستهٔ (L) تشکیل‌شده است که، به روشنی، مساحت برابر صفردارند. درحوزهٔ بسته‌ای که، از P باجداکردن حوزهٔ درونی (Q) به دست می‌آید، تابع

---

*) پاورقی مربوط به‌شمارهٔ **۳۳۶**، جلد دوم را ببینید.

$f(x, y)$ پیوسته و، بنابراین، پیوستهٔ یکنواخت است. درنتیجه، از روی $\varepsilon > 0$ مفروض، می‌توان عدد $\delta_1 > 0$ را طوری پیدا کرد که، در هر بخشی از حوزه که قطری کمتر از δ_1 داشته باشد، تابع $f(x, y)$ کوچکتر از ε بشود.

اکنون، بنا بر پیش‌قضیه، می‌توان $\delta_2 > 0$ را هم طوری پیدا کرد که، هروقت حوزهٔ (P) با منحنی‌های دلخواه به بخش‌هایی با قطرهای کمتر از δ_2 تقسیم شوند، مجموع مساحت‌های آن بخش‌ها که به خط شکستهٔ (L) ــ مرز حوزهٔ چند ضلعی جدا شدهٔ Q ــ برمی‌خورند، کوچکتر از ε شوند.

δ را کوچکترین عدد از دوعدد δ_1 و δ_2 می‌گیریم. حوزهٔ (P) را، به بخش‌های (P_1)، (P_2)، ...، (P_n)، با قطرهایی کوچکتر از δ تقسیم می‌کنیم و این مجموع را در نظر می‌گیریم:

$$\sum_i \omega_i P_i$$

این مجموع را، به صورت دو مجموع زیر می‌نویسیم:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''}$$

که در آن، i' متناظر با حوزه‌های $(P_{i'})$ است که، همهٔ آن‌ها، در بیرون حوزهٔ جدا شدهٔ Q قرار دارند؛ و i'' متناظر است باهمهٔ حوزه‌های دیگر. هرکدام ازاین مجموع‌ها را، به‌طور جداگانه، برآورد می‌کنیم.

چون همهٔ $(P_{i'})$ها از حوزهٔ (P)، با جداکردن (Q) به‌دست‌آمده‌اند و، ضمناً قطرهای آن‌ها، از $\delta \leqslant \delta_1$ کوچکتر است، بنابراین $\omega_{i'} < \varepsilon$، به نحوی که

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} < \varepsilon \sum P_{i'} < \varepsilon P$$

از طرف دیگر، اگر نوسان تابع $f(x, y)$ را، در تمامی حوزهٔ (P)، برابر Ω بگیریم، آن وقت (چون $\omega_i \leqslant \Omega$)، خواهیم داشت:

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} \leqslant \Omega \sum_{i''} P_{i''}$$

دراین‌جا، $\sum' P_{i''}$ عبارت است از مجموع مساحت‌های حوزه‌هایی از (P_i)که: ۱) یا به تمامی در حوزهٔ (Q) قرار دارند ۲) یا بامرز (L) این حوزه برخورد دارند. مساحت کل اولی‌ها، ازع کمتر است، زیرا $\varepsilon < Q$. همین مطلب دربارهٔ مساحت کل دومی‌ها هم‌درست است، زیرا حوزه، به‌بخش‌هایی با قطرهای کوچکتر از $\delta \leqslant \delta_1$ تقسیم‌شده است. بنابراین:

$\sum_{P_i''} < 2\varepsilon$، به نحوی که

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} < 2\Omega\varepsilon$$

و سرانجام، به ازای $\lambda < \delta$ داریم:

$$\sum_i \omega_i P_i < (P + 2\Omega)\varepsilon$$

چون سمت راست این نابرابری، همراه با ε، به قدر دلخواه کوچك است، بنابراین، شرط (۶) برقرار می‌شود.

۵۹۱. انتگرال پایین و انتگرال بالا، به عنوان حد. درحالت دو بعدی هم، قضیهٔ زیر درست است:

قضیهٔ داربو. برای تابع دلخواه $f(x, y)$، که در (P) کران‌دار باشد، برابری‌های حدی زیر برقرارند [با **۳۰۱** مقایسه کنید]:

$$I_* = \lim_{\lambda \to 0} s, \quad I^* = \lim_{\lambda \to 0} S$$

ازآن‌جاکه اثبات این حکم، در جنبه‌ای، با حالت خطی خود اختلاف دارد، آن‌را (مثلا برای مجموع بالایی) می‌آوریم.

دراین‌جا هم، از روی $\varepsilon > 0$ مفروض، ابتدا به‌کمك شبکه‌ای از منحنی‌ها، حوزهٔ (P) را طوری به بخش‌ها تقسیم می‌کنیم تا برای مجموع متناظر S' داشته باشیم:

$$S' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$$

این شبکهٔ منحنی‌ها ــ که کل آن‌ها را (L) می‌نامیم ــ دارای مساحت صفراست. در این صورت، از روی پیش‌قضیهٔ شمارهٔ پیش، می‌توان $\delta > 0$ را چنان پیدا کرد که، وقتی حوزهٔ (P) را به بخش‌های (P_i) با قطرهای کوچکتر از δ تقسیم می‌کنیم، مجموع مساحت‌های آن حوزه‌های جزئی که دست‌کم یکی از منحنی‌های (L) را قطع می‌کنند، کوچکتر از $\frac{\varepsilon}{2\Omega}$ باشد، که در آن، Ω عبارت است از نوسان کامل تابع f در حوزهٔ (P).

مجموع نظیر این تقسیم را S می‌نامیم و آن را بامجموع S'' مقایسه می‌کنیم؛ مجموع S'' ازاین راه به دست می‌آید که به منحنی‌های تقسیم، تمامی شبکهٔ (L) را اضافه کنیم. بنابر ویژگی اول مجموع داربو [۵۸۹] داریم: $S' \geqslant S''$، به نحوی که طبعاً

$$S'' < I^* + \frac{\varepsilon}{۲}$$

اختلاف مجموع‌های S و S'' تنها در جمله‌هایی است که با بخش‌هایی از (P_i) که با منحنی‌های (L) متقاطع‌اند، نظیر باشند. چون مجموع مساحت‌های این بخش‌ها کوچکتر از $\frac{\varepsilon}{۲\Omega}$ است، به سادگی معلوم می‌شود که

$$S - S'' < \Omega \cdot \frac{\varepsilon}{۲\Omega} = \frac{\varepsilon}{۲}$$

و بالاخره

$$I^* \leqslant S < I^* + \varepsilon$$

ودر نتیجه، حکم ثابت می‌شود.

اکنون، معیار وجود انتگرال، منجر به برابری زیرمی‌شود:

$$I_* = I^*$$

که به‌کمك آن، شبیه حالت خطی، ثابت می‌شود، برای انتگرال‌پذیر بودن تابع، کافی‌است نابرابری زیر، به ازای هر $\varepsilon > ۰$، دست کم برای یك زوج از مجموع‌های داربو، برقرار باشد:

$$S - s < \varepsilon$$

۵۹۲. ویژگی‌های تابع‌های انتگرال‌پذیر و انتگرال‌های دوگانه.

۱°. اگر به ترتیب دلخواهی، مقدارهای تابع $f(x, y)$ انتگرال‌پذیر در (P) را در طول یك منحنی (L) بامساحت صفر عوض‌کنیم (تنها بااین شرط که، تغییر تابع، محدود بماند)، آن وقت، تابع حاصل هم، در (P)، انتگرال‌پذیر خواهد بود، و انتگرال آن، برابر انتگرال $f(x, y)$ است.

برای اثبات، باید مجموع‌های انتگرالی را برای هردوتابع ــ تابع اصلی و تغییر-یافتهٔ آن ــ تشکیل داد. این دو مجموع ممکن است تنها در جمله‌هایی باهم اختلاف داشته باشند، که به حوزه‌هایی از (P_i) مربوط باشند که با منحنی (L) برخورد دارند. ولی، بنابر پیش‌قضیهٔ شمارهٔ ۵۹۰، مساحت مشترك این حوزه‌ها، به ازای $\lambda \to ۰$، به سمت‌صفر میل‌کند. ازآن‌جا به‌سادگی نتیجه می‌شودکه، هردومجموع انتگرالی، به‌سمت حدمشترکی میل می‌کنند.

به‌این ترتیب، وجود ومقدار انتگرال دوگانه، به مقدارهایی‌که تابع زیر انتگرال در طول تعداد محدودی منحنی‌های به مساحت صفر، اختیار می‌کند، بستگی ندارد.

۲°. اگر حوزهٔ (P)، که در آن تابع $f(x, y)$ داده شده است، به‌وسیلهٔ منحنی (L) (به مساحت ۰)، به دو حوزهٔ (P') و (P'') تقسیم‌شده باشد، در آن صورت، از انتگرال‌پذیری تابع $f(x, y)$ در تمامی حوزهٔ (P)، می‌توان انتگرال‌پذیری آن را درحوزه‌های جزئی (P') و (P'') نتیجه گرفت و، برعکس، از انتگرال‌پذیری تابع در دو حوزهٔ (P') و (P'')، می‌توان انتگرال‌پذیری درحوزهٔ (P) را نتیجه گرفت. ضمناً

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)dP = \iint\limits_{(P')} f(x, y)dP + \iint\limits_{(P'')} f(x, y)dP$$

اگر حوزه‌های (P') و (P'') را، با روشی دلخواه تقسیم کنیم، همراه با آن، (P) هم به بخش‌های

$$(P_1), (P_2), \ldots, (P_n)$$

تقسیم می‌شود. اگر بخش‌های واقع در (P') را با i' و بخش‌های واقع در (P'') را با i'' نشان دهیم، آن وقت

$$\sum \omega_i P_i = \sum \omega_{i'} P_{i'} + \sum \omega_{i''} P_{i''}$$

تابع $f(x, y)$ را، در (P)، انتگرال‌پذیر می‌گیریم، به‌نحوی‌که به‌ازای $\lambda \to 0$، مجموع سمت چپ به سمت صفر میل کند، دراین صورت، مجموع‌های سمت راست هم، به‌طور مسلم، به‌سمت صفرمیل‌می‌کنند، به نحوی‌که تابع‌مفروض، در (P') و (P'') هم، انتگرال‌پذیر می‌شود.

برعکس، اگر موقعیت اخیر وجود داشته باشد، به‌نحوی‌که به‌ازای $\lambda \to 0$، هر دو مجموع سمت راست، به سمت صفر میل کنند، آن وقت، مجموع سمت چپ هم به سمت صفر میل خواهدکرد. ولی باید به‌خاطر داشت‌که اثبات این حکم را، نه برای هر تقسیم دلخواهی از حوزه (P)، بلکه با تقسیم جداگانهٔ حوزه‌های (P') و (P'') آغاز کردیم.

برای این‌که، از تقسیم غیرمشخص حوزهٔ (P)، به این تقسیم خاص برسیم، کافی است منحنی (L) را به منحنی‌های تقسیم اضافه‌کنیم. مجموع‌های نظیر، تنها درجمله‌هایی باهم فرق خواهند داشت‌که متناظر با حوزه‌های جزئی متقاطع با (L) هستند. ولی، بنا بر پیش‌قضیهٔ شمارهٔ ۵۹۰، مساحت این حوزه‌های جزئی، به‌ازای $\lambda \to 0$، به سمت صفر میل می‌کند و، دومجموع، دریك مقدار بی‌نهایت کوچك، باهم‌اختلاف پیدا می‌کنند. بنا براین،

شرط (۶)، به‌طورکامل، برقرار و تابع $f(x, y)$، در (P)، انتگرال‌پذیر می‌شود.

بالاخره، دستور موردنظر، با عبور به‌حد، به‌ازای $\lambda \to 0$، از برابری زیر به دست می‌آید:

$$\sum f(\xi_i, \eta_i)P_i = \sum f(\xi_i, \eta_i)P_{i'} + \sum f(\xi_i, \eta_i)P_{i''}$$

به همین ترتیب، با بررسی مجموع‌های انتگرالی، می‌توان به کمک عبور به سمت حد، سه ویژگی زیررا هم به دست‌آورد:

۳°. اگرتابع $f(x, y)$ انتگرال‌پذیر در (P)، را درثابت k ضرب‌کنیم، تابع‌حاصل نیز انتگرال‌پذیر می‌شود، ضمناً داریم:

$$\int\int_{(P)} kf(x, y)dP = k\int\int_{(P)} f(x, y)dP$$

۴°. اگر درحوزهٔ (P)، تابع‌های $f(x, y)$ و $g(x, y)$ انتگرال‌پذیر باشند، تابع‌های $f(x, y) \pm g(x, y)$ هم انتگرال‌پذیر می‌شوند، ضمناً

$$\int\int_{(P)} [f(x, y) \pm g(x, y)]dP = \int\int_{(P)} f(x, y)dP \pm \int\int_{(P)} g(x, y)dP$$

۵°. اگربرای تابع‌های انتگرال‌پذیر $f(x, y)$ و $g(x, y)$، در حوزهٔ (P)، نابرابری $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ برقرار باشد، خواهیم داشت:

$$\int\int_{(P)} f(x, y)dP \leqslant \int\int_{(P)} g(x, y)dP$$

سپس

۶°. وقتی که $f(x, y)$ انتگرال‌پذیر باشد، $|f(x, y)|$ هم انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\left|\int\int_{(P)} f(x, y)dP\right| \leqslant \int\int_{(P)} \left|f(x, y)\right|dP$$

انتگرال‌پذیری تابع $|f|$، از این نکتهٔ ساده نتیجه می‌شودکه نوسان $\bar{\omega}_i$ این تابع، درحوزهٔ دلخواه P_i، از نوسان نظیر تابع f تجاوز نمی‌کند. در حقیقت، دراین صورت

$$\sum \bar{\omega}_i P_i \leqslant \sum \omega_i P_i$$

و وقتی که مجموع دوم به‌سمت صفر میل کند، مجموع اولی هم به‌سمت صفر میل خواهد کرد.

نابرابری موردنظر هم، با عبور حدی، از نابرابری زیر نتیجه می‌شود:

$$|\sum f(\xi_i, \eta_i)P_i| \leqslant \sum |f(\xi_i, \eta_i)|P_i$$

۷°. اگر برای تابع $f(x, y)$ انتگرال‌پذیر در (P)، داشته باشیم:

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M$$

آن وقت، داریم:

$$mP \leqslant \int\int_{(P)} f(x, y)dP \leqslant MP \qquad (۷)$$

که با عبور حدی، از نابرابری واضح زیر حاصل می‌شود:

$$mP \leqslant \sum f(\xi_i, \eta_i)P_i \leqslant MP$$

اگر در نابرابری‌های (۷)، همهٔ طرف‌ها را بر P تقسیم کنیم:

$$m \leqslant \frac{\int\int_{(P)} f(x, y)dP}{P} \leqslant M$$

و نسبت وسطی را با μ نشان دهیم، بیان دیگری از نابرابری‌های (۷) به‌دست می‌آید:

$$\int\int_{(P)} f(x, y)dP = \mu P \quad (m \leqslant \mu \leqslant M) \qquad (۸)$$

که در واقع، معرف قضیهٔ مربوط به مقدارهای میانگین است.

اکنون فرض می‌کنیم، تابع $f(x, y)$ در (P) پیوسته باشد و، برای m و M، کمترین و بیشترین مقدار تابع را در نظر می‌گیریم (که بنابر قضیهٔ ویرشتراس ۱۷۳، وجود دارند)، آن وقت، بنابر قضیهٔ معلوم بولزانو ـ کوشی ۱۷۱، تابع پیوستهٔ $f(x, y)$ که مقدارهای m و M را قبول می‌کند، باید از هر مقدار بینابینی هم عبور کند. به این ترتیب، درهمهٔ حالت‌ها، درحوزهٔ (P)، نقطه‌ای مثل $(\bar{x}, \bar{y})$ پیدا می‌شود که داشته‌باشیم: $\mu = f(\bar{x}, \bar{y})$. دراین صورت، دستور (۸)، چنین می‌شود:

$$\int\int_{(P)} f(x, y)dP = f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot P \qquad (۹)$$

و این، همان صورت معمول قضیهٔ میانگین است

تعمیم قضیهٔ مربوط به‌مقدارهای میانگین [۳۰۴، ۱۰°] را هم، می‌توان به سادگی، دراین حالت به‌دست آورد. این مطلب را به‌خواننده وامی‌گذاریم.

۵۹۳. انتگرال، به‌عنوان تابع جمعی حوزه؛ مشتق‌گیری نسبت به حوزه. حوزهٔ مستوی (بستهٔ) (P) و حوزهٔ جزئی (بستهٔ) (p) واقع در آن را، در نظر می‌گیریم، همهٔ حوزه‌ها را، تربیع‌پذیر می‌گیریم (برحسب موقعیت، می‌توان محدودیت‌های دیگری هم، برای آن‌ها، در نظر گرفت). اگر هربخش (p) از حوزهٔ (P)، باعدد معینی مقایسه شود:

$$\Phi=\Phi((p))$$

دراین صورت، با «تابعی از حوزهٔ (p)»، برای pهای مذکور، سروکار خواهیم داشت. به عنوان نمونهٔ «تابع حوزه»، می‌توان از این تابع‌ها نام برد: مساحت حوزه، جرمی که به صورتی پیوسته درآن توزیع شده است، گشتاور ایستایی این‌جرم، بار یا به طور کلی هرنیرویی که به‌طور پیوسته برآن عمل می‌کند وغیره.

اگر در هر تقسیم دلخواه حوزهٔ (p) به بخش‌هائی که بریکدیگر واقع نیستند:

$$(p)=(p')+(p'')$$

همیشه داشته باشیم:

$$\Phi((p))=\Phi((p'))+\Phi((p''))$$

آن وقت، تابع $\Phi((p))$ از حوزه را، تابع جمعی گویند. همهٔ نمونه‌هایی که، در بالا، از تابع حوزه آوردیم دارای این ویژگی جمعی هستند. تابع‌های جمعی از حوزه‌ها، اهمیت خاصی دارند، زیرا، ضمن مطالعهٔ پدیده‌های طبیعت، اغلب، با این گونه تابع‌ها رو به رو می‌شویم.

اگر در حوزهٔ تربیع‌پذیر (P)، تابع نقطه‌ای انتگرال‌پذیر $f(M)=f(x, y)$ مفروض باشد، آن‌وقت، این تابع، در هربخش (p) از حوزهٔ (P)، انتگرال‌پذیر خواهد بود، به نحوی که انتگرال

$$\Phi((p))=\iint\limits_{(p)} f(x, y)dP \qquad (10)$$

تابعی از حوزهٔ (p) می‌شود؛ و به روشنی، باتوجه به **۵۹۲، ۲°**، تابعی جمعی است.

اکنون، به «مشتق تابع $\Phi((p))$ نسبت به حوزه» می‌پردازیم. فرض کنیم، M نقطهٔ ثابت شده‌ای از حوزهٔ (P) و (p) حوزهٔ جزئی دلخواه شامل این نقطه باشد. اگر نسبت

$$\frac{\Phi((p))}{p}$$

(p)، عبارت است از مساحت حوزهٔ (p))، وقتی‌که قطر حوزهٔ (p) به‌طور نامحدود نزول می‌کند، به سمت حد متناهی معین $f=f(M)$ میل‌کند، آن وقت، این حد را مشتق $\Phi((p))$ نسبت به حوزه در نقطهٔ M گویند. مثلاً، اگر $\Phi((p))$ را، جرمی درنظر بگیریم که به‌طور پیوسته نسبت به شکل مستوی (p) توزیع شده است، آن‌وقت، $f(M)$، همان چگالی جرم در نقطهٔ M خواهد بود؛ اگر $\Phi((p))$ به‌معنای نیروی مؤثر برشکل (p) باشد، آن وقت، $f(M)$ معرف فشار مخصوص در نقطهٔ M است وغیره.

حالتی که، تابع حوزه، با انتگرال به صورت (۱۰) بیان می‌شود، که در آن، $f(x, y)$ تابع پیوسته‌ای در حوزهٔ (P) است، به‌خصوص، حالت جالبی است. ثابت خواهیم کردکه، مشتق انتگرال نسبت به حوزه، در نقطهٔ M، عبارت است از همان تابع زیر انتگرال در این نقطه، یعنی

$$f(M)=f(x, y)$$

درواقع، با اختیار حوزهٔ (p)، که در تعریف مشتق دربارهٔ آن صحبت می‌شود، با توجه به قضیهٔ میانگین [(۹) را ببینید]، داریم:

$$\Phi((p))=f(\bar{x}, \bar{y})p$$

که درآن، $(\bar{x}, \bar{y})$ نقطه‌ای است از حوزهٔ (p). اگر قطر حوزهٔ (p) به سمت صفرمیل کند، نقطهٔ $(\bar{x}, \bar{y})$، بی‌نهایت به (x, y) نزدیك می‌شود و، بنا بر پیوستگی، داریم:

$$\frac{\Phi((p))}{p}=f(\bar{x}, \bar{y})\to f(x, y)$$

واین، همان چیزی است‌که می‌خواستیم ثابت‌کنیم.

به‌این ترتیب، انتگرال دوگانهٔ (۱۰) نسبت به حوزهٔ متغیر، در معنای خاص خود، عبارت است از «تابع اولیه‌ای» برای تابع نقطه‌ای زیر انتگرال: تابعی از حوزه را بنا می‌کندکه، برای آن، این تابع نقطه، عبارت است از مشتق نسبت به حوزه. به‌طورطبیعی، این پرسش پیش می‌آیدکه: باچه معیاری، «تابع اولیه»، به‌صورت یك ارزشی، به وسیلهٔ مشتق خود، معین‌می‌شود؟

برای این منظور، می‌توان گزارهٔ زیررا ثابت‌کرد: اگر دو تابع جمعی از حوزه، $\Phi_1((p))$ و $\Phi_2((p))$، در همهٔ نقطه‌های حوزهٔ اصلی (P) دارای یك مشتق باشند، آن

وقت، این دوتابع باهم متحدند.

اگر تفاضل $\Phi_1((p))-\Phi_2((p))$ را در نظر بگیریم، اثبات به‌این‌جا منجرمی‌شود که: اگر تابع جمعی حوزه، $\Phi((p))$، در همهٔ نقطه‌های حوزهٔ (P)، مشتقی برابر صفر داشته باشد، خود تابع هم، به‌طور اتحادی، برابر صفر می‌شود.

در واقع، بنابر تعریف مشتق، به ازای هرعدد $\varepsilon>0$ دلخواه، می‌توان هر نقطهٔ M از حوزهٔ (P) را، با چنان دایره‌ای محصورکردکه، برای بخش (p) این حوزه‌که شامل M است، داشته باشیم:

$$\left|\frac{\Phi((p))}{p}\right|<\varepsilon$$

اگر از پیش قضیهٔ بورل [۱۷۵]، در دستگاه این همسایگی‌ها استفاده‌کنیم و،سپس، حوزهٔ (P) را به تعدادی متناهی از حوزه‌های

$$(P)=(p_1)+(p_2)+\cdots+(p_k)$$

ـ که هیچ دوتای آن‌ها برهم قرار نگرفته‌اند ـ تقسیم‌کنیم، به نحوی‌که، برای هرکدام ازآن‌ها، داشته باشیم $(i=1, 2, \ldots, k)$:

$$\left|\frac{\Phi((p_i))}{p_i}\right|<\varepsilon \quad \text{یا} \quad \left|\Phi((p_i))\right|<p_i\varepsilon$$

با توجه به‌فرض جمعی بودن تابع $\Phi((p))$ خواهیم داشت:

$$\Phi((p))=\sum_i \Phi((p_i))$$

ازآن‌جا، با توجه به نابرابری قبلی، داریم:

$$|\Phi((p))|\leqslant\sum_i|\Phi((p_i))|<P\varepsilon$$

ولی دراین‌جا، ε اختیاری است، یعنی $\Phi((p))=0$. به‌این ترتیب، حکم موردنظر ثابت می‌شود، زیرا به‌جای (P) می‌توان هرحوزهٔ جزئی دلخواه (p) را انتخاب‌کرد.

باتوجه به همه‌آن چه‌گفته‌ایم، به این نتیجهٔ نهائی می‌رسیم: انتگرال دوگانهٔ(۱۰) نسبت به حوزهٔ متغیر، «تابع اولیهٔ» جمعی منحصری، برای تابع نقطه‌ای واقع در زیر علامت انتگرال است*.

---

*) این‌تابع، مثل‌قبل، پیوسته فرض می‌شود.

بنابراین، مثلا روشن است که می‌توان، بدون هیچ محاسبه‌ای، تمامی جرم توزیع شده در (P) را، از روی چگالی مفروض $\rho(M)=\rho(x, y)$ جرم در نقطهٔ M، با این انتگرال به‌دست آورد:

$$m=\int\limits_{(P)}\int \rho(x, y)dP$$

اگر $q(M)=q(x, y)$، فشار مخصوص نقطهٔ M باشد، در آن صورت، تمامی نیروی مؤثر برشکل (P)، برابر است با

$$F=\int\limits_{(P)}\int q(x, y)dP$$

وغیره.

یادداشت. قبلا، پیش آمده بود که دربارهٔ تابع جمعی از بازه هم صحبت کنیم [۳۴۸؛ ۵۸۴، ۸)]. ازآن‌جاکه، این تابع، همیشه برابر است با تفاضل دومقدار از یك تابع نقطه‌ای، بنابراین لزومی‌ندارد، نظریهٔ بالا را، که درحالت «مستوی» بود، برای‌حالت «خطی» هم بسط دهیم. با وجود این، خواننده می‌تواند شباهت بین قضیهٔ مربوط به مشتق‌گیری انتگرال معین نسبت به متغیر مرزبالا [۳۰۵، ۱۲°]، با قضیه‌ای راکه هم اکنون دربارهٔ مشتق‌گیری از انتگرال دوگانه نسبت به‌حوزه ثابت‌کردیم، به خوبی ببیند؛ ضمناً، بحث شمارهٔ ۳۴۸ را می‌توان، به عنوان اثبات این‌مطلب تفسیر کردکه: انتگرال عبارت است از تابع جمعی منحصری از بازه، که «تابع اولیه‌ای» است ازتابع مفروض نقطه‌ای.

§۲. محاسبهٔ انتگرال دوگانه

۵۹۴. تبدیل انتگرال دوگانه به انتگرال تکراری، درحالت حوزهٔ مستطیلی. قبلا در تفسیر هندسی، و ضمن برخی فرض‌ها [درشمارهٔ ۵۸۷]، باهمین مطلب سروکار داشته‌ایم.

اکنون، باشیوهٔ آنالیز وضمناً درحالت‌کلی، موضوع را مورد بررسی‌قرار می‌دهیم: ازحالت ساده‌ای آغاز می‌کنیم‌که حوزهٔ انتگرال‌گیری، مستطیل $[a, b; c, d]$ باشد.

قضیه. اگر برای تابع $f(x, y)$، که در مستطیل $(P)=[a, b; c, d]$ معین‌است، انتگرال دوگانه

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)dP \qquad (۱)$$

و برای هرمقدار ثابت x از $[a, b]$، انتگرال سادهٔ

$$I(x)=\int_c^d f(x, y)dy \quad (a\leqslant x\leqslant b) \qquad (۲)$$

وجود داشته باشد، آن وقت، انتگرال تکراری

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)dy \qquad (۳)$$

نیز وجود خواهد داشت و برابری زیر برقرار است:

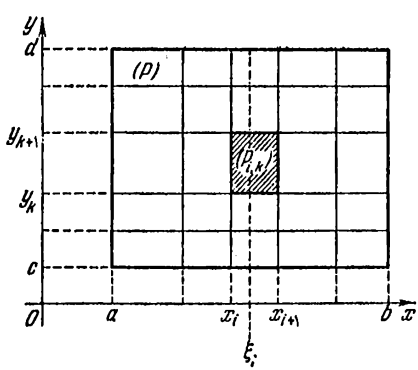
$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)dP=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)dy^* \qquad (۴)$$

اثبات. بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ را، که معرف مستطیل (P) هستند، به وسیلهٔ نقطه‌های

$$x_0=a<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b,$$
$$y_0=c<y_1<\cdots<y_k<y_{k+1}<\cdots<y_m=d$$

به بخش‌هایی تقسیم می‌کنیم. دراین‌صورت، مستطیل (P)، به مستطیل‌های جزئی زیر، تجزیه می‌شود (شکل ۳۸):

$$(P_{i,k})=[x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}]$$
$$(i=0,\ldots,n;\ k=0,\ldots,m)$$



شکل ۳۸

اگر مرزهای دقیق پایینی و بالایی تابع $f(x, y)$ در مستطیل $(P_{i,k})$ را، به ترتیب، $m_{i,k}$ و $M_{i,k}$ بنامیم، به نحوی که

---

*) خواننده می‌تواند به سادگی، دراین‌جا، تغییر شکل قضیه‌های مربوط به‌حدهای دوگانه و تکراری را تشخیص دهد [۱۶۸].

برای همهٔ نقطه‌های (x, y) این مستطیل، داشته باشیم:

$$m_{i,k} \leqslant f(x, y) \leqslant M_{i,k}$$

اگر x را در بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ به دلخواه تثبیت کنیم: $x = \xi_i$، و نسبت به y از y_k تا y_{k+1} انتگرال بگیریم، داریم [۳۰۴، ۸°]:

$$m_{i,k}\Delta y_k \leqslant \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)dy \leqslant M_{i,k}\Delta y_k$$

که در آن: $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$. انتگرال نسبت به y وجود دارد، زیرا طبق فرض، انتگرال (۲) در تمامی بازهٔ $[c, d]$ وجود دارد. با جمع کردن نابرابری‌های مشابه، نسبت به k (از ۰ تا $m-1$)، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta y_k \leqslant I(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)dy \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k}\Delta y_k$$

اگر همهٔ بخش‌های این نابرابری‌ها را در $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ضرب و، نسبت به اندیس i از ۰ تا $n-1$ جمع کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta y_k \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k}\Delta y_k$$

در وسط، مجموع انتگرالی برای تابع $I(x)$ به دست می‌آید. عبارت‌های دو طرف نابرابری‌ها هم، چیزی جز مجموع‌های s و S دار بو، برای انتگرال دوگانهٔ (۱)، نیستند. در واقع، چون $\Delta x_i \Delta y_k$ عبارت است از مساحت $P_{i,k}$ از مستطیل $(P_{i,k})$، بنابراین، مثلا داریم:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta y_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta x_i \Delta y_k = \sum_{i,k} m_{i,k}P_{i,k} = s$$

به این ترتیب، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$s \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} I(\xi_i)\Delta x_i \leqslant S$$

اکنون اگر همهٔ Δx_iها و Δy_kها، به‌طور هم زمان، به سمت صفر میل کنند، با توجه به وجود انتگرال دوگانهٔ (۱)، هر دو مجموع s و S، به عنوان حد خود، به سمت آن میل

خواهندکرد. دراین حالت

$$\text{حد}\sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i = \iint_{(P)} f(x, y)dP$$

یعنی انتگرال دوگانهٔ (۱)، درعین حال، انتگرال تابع $I(x)$ می‌شود:

$$\iint_{(P)} f(x, y)dP = \int_c^b I(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

واین، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

اگر نقش متغیرهای x و y را عوض کنیم، به‌موازات (۴)، می‌توان دستور زیر را هم ثابت کرد:

$$\iint_{(P)} f(x, y)dP = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \qquad (4^*)$$

البته، با این فرض که، برای $x = \text{const.}$، انتگرال زیر وجود داشته باشد:

$$\int_a^b f(x, y)dx$$

یادداشت. اگر همراه با انتگرال دوگانهٔ (۱)، هردو انتگرال سادهٔ

$$\int_c^d f(x, y)dy (x = \text{const.}) \quad \text{و} \quad \int_a^b f(x, y)dx (y = \text{const.})$$

وجود داشته باشند، در آن صورت، هردو دستور (۴) و (۴*)، به‌طور هم زمان، برقرارند. از آن‌جا

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \qquad (5)$$

این نتیجه را، قبلا هم [۵۲۸]، بدون استفاده از فرض مربوط به وجود انتگرال دوگانه، ثابت کرده بودیم.

کاربرد دستور (۴) یا (۴*)، مشروط به وجود انتگرال دوگانه و یکی از انتگرال‌های ساده‌است. اگر تابع $f(x, y)$ پیوسته باشد (حالتی که درعمل، معمولا، با آن برخورد می‌کنیم)، در آن صورت، وجود همهٔ انتگرال‌های نامبرده تضمین می‌شود (درمورد انتگرال

دوگانه، این مطلب، از ۵۹۰، I نتیجه می‌شود). دراین‌حالت، برای محاسبهٔ عملی انتگرال دوگانه، می‌توان به‌دلخواه، از هریك ازاین دو دستور استفاده کرد، زیرا محاسبهٔ انتگرال‌های ساده، به مراتب ساده‌تر است.

برای اثبات دستور (۴)، طبیعی‌تر این بودکه مستطیل (P) را به کمك خطهای راست موازی محورها، به بخش‌های مستطیلی با مساحت‌های $\Delta x_i \Delta y_k$ تقسیم کنیم. در واقع، اگر بخواهیم انتگرال دوگانه را براساس تقسیم حوزه، با خطهای راست موازی محورها، نشان دهیم، معمولا به‌جای $\iint_{(P)} f(x, y)dP$ می‌نویسیم:

$$\iint_{(P)} f(x, y)dxdy \quad \text{یا} \quad \iint_{(P)} f(x, y)dydx$$

علاوه بر آن، باتوجه به تبدیل انتگرال دوگانه، که بر مستطیل $(P)=[a; b; c, d]$ گسترده است، به انتگرال‌مکرر، خود انتگرال دوگانه را هم، اغلب، با نماد مشابه‌انتگرال مکرر می‌نویسیم:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy \quad \text{یا} \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx$$

ضمناً، در هردو نماد، «انتگرال بیرونی» متناظر است با «دیفرانسیل بیرونی»، به نحوی که تنها با گذاشتن پرانتز، می‌توان آن‌ها را از یکدیگر جداکرد:

$$\int_c^d \left\{\int_a^b f(x, y)dx\right\}dy \quad \text{یا} \quad \int_a^b \left\{\int_c^d f(x, y)dy\right\}dx$$

۵۹۵. مثال‌ها. ۱) انتگرال زیر را، که بر مستطیل $(P)=[۳, ۴; ۱, ۲]$ گسترده است، محاسبه کنید:

$$\iint_{(P)} \frac{dxdy}{(x+y)^۲} = \int_۱^۲ \int_۳^۴ \frac{dxdy}{(x+y)^۲}$$

حل. بنابردستور (۴*) می‌نویسیم:

$$\iint_{(P)} \frac{dxdy}{(x+y)^۲} = \int_۱^۲ dy \int_۳^۴ \frac{dx}{(x+y)^۲}$$

ابتدا، انتگرال درونی را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{۳}^{۴}\frac{dx}{(x+y)^{۲}}=\frac{۱}{y+۳}-\frac{۱}{y+۴}$$

از آن‌جا

$$\iint_{(P)}\frac{dxdy}{(x+y)^{۲}}=\int_{۱}^{۲}\left[\frac{۱}{y+۳}-\frac{۱}{y+۴}\right]dy=\ln\frac{۲۵}{۲۴}$$

۲) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال‌های

$$(a)I_{۱}=\int_{۱}^{۳}\int_{۲}^{۵}(۵x^{۲}y-۲y^{۳})dxdy;\quad (b)I_{۲}=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}\frac{x^{۲}dxdy}{۱+y^{۲}};$$

$$(c)I_{۳}=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}\frac{ydxdy}{(۱+x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

حل.

$$(a)\quad I_{۱}=\int_{۱}^{۳}dy\int_{۲}^{۵}(۵x^{۲}y-۲y^{۳})dx=\int_{۱}^{۳}(۱۹۵y-۶y^{۳})dy=۶۰۰;$$

$$(b)\quad I_{۲}=\int_{۰}^{۱}x^{۲}dx\int_{۰}^{۱}\frac{dy}{۱+y^{۲}}=\frac{\pi}{۱۲};$$

(c) بهتر است $I_{۳}$ را با توجه به دستور (۴) محاسبه کنیم:

$$I_{۳}=\int_{۰}^{۱}dx\int_{۰}^{۱}\frac{ydy}{(۱+x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

زیرا بلافاصله به دست می‌آید:

$$\int_{۰}^{۱}\frac{ydy}{(۱+x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}-\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۲}}$$

به نحوی که

$$I_{۳}=\int_{۰}^{۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}-\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۲}}\right)dx=$$

$$= \ln \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+2}}\Bigg|_0^1 = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$$

اگر از انتگرال مکرر دیگر استفاده می‌کردیم، کار کمی بغرنج‌تر می‌شد:

$$I_3 = \int_0^1 y\,dy \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}; \quad \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}};$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{y\,dy}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2+y^2}-1}{\sqrt{2+y^2}+1}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

که به سادگی، به‌صورت جواب قبلی در می‌آید.

۳) مطلوب است محاسبهٔ حجم V، جسمی که از پایین به صفحهٔ xy، از کنار به صفحه‌های $x=0$، $x=a$، $y=0$، $y=b$ و از بالا به سهموی بیضی‌وار زیر محدود باشد:

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

حل. قبل از همه، از روی دستور (*۲) داریم:

$$V = \int\int_{[0,a;0,b]} \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right) dP$$

خود محاسبهٔ انتگرال را بادستور (*۴) می‌دهیم:

$$V = \int_0^b dy \int_0^a \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right) dx = \int_0^b \left(\frac{a^3}{6p} + \frac{ay^2}{2q}\right) dy = \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q}\right)$$

۴) همین مساله را، برای جسم محدود به صفحهٔ xy، سطح $x^2+z^2=R^2$ $(z>0)$ و صفحه‌های $y=0$ و $y=H$ حل کنید.

حل. اگر قاعدهٔ جسم را مستطیل $[-R, R; 0, H]$ بر صفحهٔ xy بگیریم، داریم:

$$V=\int_{0}^{H}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx\,dy=2H\int_{0}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{\pi R^2 H}{2}$$

[البته، اگر جسم را با قاعدهٔ نیم‌دایره‌ای برصفحهٔ xy می‌گرفتیم، کار ساده‌تر می‌شد.]

۵) همین‌مسأله را، برای جسم محدود به‌صفحه‌های $z=0$، $x=a$، $x=b$، $y=c$، $y=d$ $(b>a>0,\ d>c>0)$ وسطحی هذلولی‌وار $z=\frac{xy}{m}$ $(m>0)$ حل کنید.

پاسخ: $V=\frac{(d^2-c^2)(b^2-a^2)}{4m}$.

۶) ثابت کنید:

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(xy)^{xy}\,dx\,dy=\int_{0}^{1}y^y\,dy$$

اگرمقدار تابع زیرعلامت انتگرال، درانتگرال دوگانه را، به‌ازای $xy=0$، برابر واحد بگیریم، این تابع درتمامی مربع $[0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1]$ پیوسته می‌شود.

داریم:

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(xy)^{xy}\,dx\,dy=\int_{0}^{1}dy\int_{0}^{1}(xy)^{xy}\,dx$$

با فرض $xy=t$ (به ازای $y=\text{const}>0$)، در انتگرال درونی و، سپس، با انتگرال‌گیری جزء به جزء، برای انتگرال دوگانه، به ترتیب به دست می‌آید:

$$\int_{0}^{1}\frac{dy}{y}\int_{0}^{y}t^t\,dt=\ln y\cdot\int_{0}^{y}t^t\,dt\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}y^y\ln y\,dy$$

جملهٔ اول سمت راست برابری، برابر صفر می‌شود، زیرا انتگرال $\int_{0}^{y}t^t\,dt$، به‌ازای $y\to 0$ بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ اول است*. واما دربارهٔ انتگرال دوم، باتوجه به اتحاد

---

*) زیرا داریم:

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\int_{0}^{y}t^t\,dt=\lim_{t\to 0}t^t=1$$

$$(y^x)' = y^x \ln y + y^x$$

به انتگرال $\int_0^1 y^x dy$ منجر می‌شود.

۷) ثابت کنید، برای هر $z = \text{const}$، داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z\sin\varphi\sin\theta)\,d\varphi d\theta = \left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\lambda)\,d\lambda\right\}^2$$

برای این منظور، هریك از انتگرال‌ها را، برحسب توان‌های z، بسط می‌دهیم. دربارهٔ انتگرال ساده، در ۴۴۰، ۱۳)، این بسط را دیده‌ایم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\lambda)\,d\lambda = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\right.$$

تابع زیر انتگرال در انتگرال دوگانه، به رشتهٔ

$$\cos(2z\sin\varphi\sin\theta) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{(2z)^{2i}}{(2i)!}\sin^{2i}\varphi\sin^{2i}\theta$$

که برای‌همهٔ مقدارهای φ و θ درمربع $[0, \frac{\pi}{2}; 0, \frac{\pi}{2}]$ متقارب یکنواخت است، بسط داده می‌شود. اگر از این رشته، در مربع مفروض، جمله بـه جمله انتگرال بگیریم، به دست می‌آید*:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z\sin\varphi\sin\theta)\,d\varphi d\theta =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{(2z)^{2i}}{(2i)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i}\varphi\sin^{2i}\theta\,d\varphi d\theta$$

---

*) بدون این که به توضیح بیشتری نیاز باشد، خواننده می‌تـواند، مفهوم تقارب یکنواخت رشته‌ها و قضیهٔ مربوط به انتگرال‌گیری جمله به جمله ازآن را، برای حالتی‌هم‌که جمله‌های رشته به دو متغیر بستگی دارند، گسترش دهد.

ولی [۳۱۲، (۸) را ببینید].

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2i}\varphi sin^{2i}\theta d\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2i}\varphi sin^{2i}\theta d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2i}\theta d\theta . \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2i}\varphi d\varphi = \left[\frac{\pi}{2} - \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}\right]^2$$

به نحوی که بعد از تبدیل‌های ساده

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2z sin\varphi sin\theta) d\varphi d\theta = \frac{\pi}{4}\left\{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i z^{2i}(2i)!}{2^{2i}[i!]^4}\right.$$

اکنون دیگر به سادگی تحقیق می‌شود [۳۹۰، ۳] را ببینید] که در واقع

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i z^{2i}(2i)!}{2^{2i}[i!]^4} = \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\right\}^2$$

به‌این ترتیب، مقدار انتگرال دوگانهٔ مفروض را، می‌توان برحسب تابع بسل با اندیس صفر، بیان کرد:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2z sin\varphi sin\theta) d\varphi d\theta = \frac{\pi}{4}[j_0(z)]^2$$

۸) ثابت کنید، به ازای هرمقدار دلخواه k $(0 < k < 1)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi d\theta}{1 + k^2 sin^2\varphi sin^2\theta} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\lambda}} = \frac{\pi}{2}F(k)$$

راهنمائی. هر دو انتگرال را، برحسب توان‌های k، بسط دهید. با بسط انتگرال سمت راست، قبلا هم برخورد کرده‌ایم [۴۴۰، ۱۳]].

۹) ثابت کنید، اگر تابع $f(x)$ دربازهٔ $[a, b]$ و تابع $g(y)$ در بازهٔ $[c, d]$ انتگرال‌پذیر باشند، آن وقت، تابع $f(x)\cdot g(y)$ (که تابعی از دو متغیر است) درمستطیل $(P) = [a, b; c, d]$ انتگرال‌پذیر است.

راهنمائی. مساله را می‌توان به انتگرال‌پذیری جداگانهٔ تابع‌های $f(x)$ و $g(y)$،

به عنوان تابع‌هایی از دو متغیر، در حوزهٔ (P)، منجر کرد*. برای این منظور، بهتر است از معیار انتگرال‌پذیری که در پایان شمارهٔ **۵۹۱** نشان دادیم، استفاده کنیم.

به‌این هم توجه کنیم که، ضمناً

$$\iint\limits_{(P)} f(x)g(y)dxdy = \int_c^d dy\left\{\int_a^b f(x)g(y)dx\right\} =$$

$$= \int_c^d g(y)\left\{\int_a^b f(x)dx\right\}dy = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_c^d g(y)dy$$

به نحوی که، انتگرال دوگانه، به حاصل ضرب دو انتگرال ساده تبدیل می‌شود.

یک‌بار دیگر معلوم می‌شود که تبدیل عکس، یعنی تبدیل حاصل‌ضرب دو انتگرال ساده به صورت انتگرال دوگانه، مفید است. در زیر چند مثال، در این مورد می‌آوریم.

۱۰) این نابرابری را ثابت کنید:

$$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geqslant (b-a)^2$$

که در آن، $f(x)$ تابعی است پیوسته و مثبت.

بدون این‌که به‌کلی بودن مساله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد: $a<b$. از آن‌جا که انتگرال، به‌نام متغیر انتگرال‌گیری بستگی ندارد، می‌توان در هر انتگرال، به جای حرف x، از حرف y استفاده کرد. بنابراین، سمت چپ نابرابری را می‌توان این طور نوشت:

$$I = \iint\limits_{(P)} \frac{f(x)}{f(y)}dxdy = \iint\limits_{(P)} \frac{f(y)}{f(x)}dxdy$$

که در آن: $(P) = [a, b; c, d]$. از آن‌جا

$$I = \frac{1}{2}\iint\limits_{(P)}\left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right]dxdy = \iint\limits_{(P)} \frac{f^2(x)+f^2(y)}{2f(x)f(y)}dxdy$$

بنابرنابرابری روشن $A^2+B^2 \geqslant 2AB$، تابع زیر انتگرال، بزرگتر یا برابر ۱ می‌شود، به‌نحوی که [۵۹۲، ۷°] را ببینید]:

---

*) به شرطی که قضیهٔ شمارهٔ **۲۹۹**. II را، برای تابع با دو متغیر، تعمیم دهیم.

$$I \geqslant (b-a)^2$$

۱۱) نابرابری بویناکوفسکی. قبلا هم، با این نابرابری سروکار داشته‌ایم [۳۲۱]. اکنون، همان نابرابری‌را به‌عنوان تمرین و برای حالتی‌که $f(x)$ و $g(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ به معنای خاص انتگرال‌پذیر باشند، مطرح می‌کنیم.

این انتگرال را در نظر می‌گیریم:

$$B = \iint_{(P)} [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dx dy$$

که در آن، (P) عبارت است از مربع $[a, b; a, b]$. با بازکردن کروشه، به‌دست می‌آید [۹] را ببینید]:

$$B = \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(y)dy - 2\int_a^b f(x)g(x)dx \cdot \int_a^b f(y)g(y)dy +$$

$$+ \int_a^b f^2(y)dy \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

و سرانجام، با استفاده از بستگی نداشتن انتگرال به‌نام متغیر مستقل:

$$B = 2\left\{\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx - \left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\right\}$$

چون در انتگرال B، عبارت زیر انتگرال غیرمنفی است، پس $B \geqslant 0$. از آن‌جا، نابرابری مطلوب به دست می‌آید:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

یادداشت. ازاین نابرابری می‌توان نابرابری تمرین قبل را، به‌عنوان حالت خاص (با تبدیل f به $\sqrt{f}$ و g به $\frac{1}{\sqrt{f}}$) نتیجه گرفت.

۱۲) نابرابری چبیشف. با بحث مشابهی، می‌توان نابرابری زیر را هم ثابت‌کرد:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \cdot \int_a^b p(x)g(x)dx \leqslant \int_a^b p(x)dx \cdot \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$$

که به پ. ل. چبیشف تعلق دارد. دراین‌جا، تابع $p(x)$، انتگرال‌پذیر مثبت و تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$، صعودی یکنوا هستند.

فرض می‌کنیم $a<b$. تفاضل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Delta=\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\cdot\int_a^b p(x)dx-\int_a^b p(x)f(x)dx\cdot\int_a^b p(x)g(x)dx$$

در عامل‌های دوم هردو جمله، x را به y تبدیل می‌کنیم و تفاضل‌را به این صورت در می‌آوریم:

$$\Delta=\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)f(x)[g(x)-g(y)]dxdy$$

اکنون، نقش x و y را باهم عوض می‌کنیم:

$$\Delta=\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)f(y)[g(y)-g(x)]dxdy$$

بالاخره، اگر نصف مجموع هر دو عبارت را در نظربگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\Delta=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]dxdy$$

چون هردو تابع f و g صعودی یکنوا هستند، علامت هر دوکروشه یکی می‌شود، یعنی عبارت زیر انتگرال همواره غیرمنفی‌است: $\Delta\geqslant 0$. به‌این ترتیب، درستی نابرابری مطلوب ثابت می‌شود.

به سادگی دیده می‌شودکه، نابرابری، برای حالت نزولی بودن هردوتابع f و g هم، به قوت خود باقی است. در حالتی‌که یکی ازآن‌ها صعودی و دیگری نزولی باشد، نابرابری معنای خود را ازدست می‌دهد.

۱۳) تابع $f(x,y)$ را، در مستطیل $(P)=[a\,b;\,c\,d]$ پیوسته فرض می‌کنیم؛ اگر (x,y)، نقطهٔ دلخواهی از تابع دراین مستطیل باشد، تابعی را در نظر می‌گیریم‌که با انتگرال دوگانهٔ زیربیان می‌شود:

$$F(x,y)=\int_a^x\int_c^y f(u,v)dvdu$$

این تابع را، می‌توان به‌صورت انتگرال تکراری زیر نشان داد:

$$F(x,y)=\int_a^x du\int_c^y f(u,v)dv$$

آن وقت، اگر ابتدا نسبت به x و سپس نسبت به y مشتق بگیریم، به ترتیب، به دست می‌آید*:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_c^y f(x, v)dv, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=f(x, y)$$

به رابطه‌ای رسیدیم که، مضمون آن، شبیه قضیه‌ای است که دربارهٔ مشتق‌گیری انتگرال ساده نسبت به مرز بالای متغیر داشتیم. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}=f(x, y)$$

۱۴) تابع $f(x, y)$ را، در مستطیل $(P)=[a, b; c, d]$، انتگرال‌پذیر می‌گیریم. اگر برای این تابع، که آن را در این‌جا پیوسته فرض می‌کنیم، تابع اولیهٔ $\Phi(x, y)$، به این‌معنا، وجود داشته باشدکه

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y}=f(x, y)$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$\iint_{(P)} f(x, y)dxdy=\Phi(b, d)-\Phi(b, c)-\Phi(a, d)+\Phi(a, c)$$

این دستور، شبیه دستوری است که انتگرال معین معمولی را، برحسب تابع اولیه، بیان می‌کرد.

به اثبات می‌پردازیم. مستطیل $[a, b; c, d]$ را، شبیه شمارهٔ **۵۹۴**، به مستطیل‌های جزئی تقسیم می‌کنیم:

$$[x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}] \quad (i=0, 1, \dots, n-1;\ k=0, 1, \dots, m-1)$$

اگر دستور نموهای محدود**را، دوبار، دربارهٔ عبارت

---

*) باید تابع زیر انتگرال $\int_c^y f(u, v)dv$ را برای انتگرال بیرونی، تابع پیوسته‌ای از u به حساب آورد [**۵۰۶**].

) با تبدیل عبارت W، ضمن اثبات قضیهٔ مربوط به تبدیل دو تابع مشتق‌پذیر، در شمارهٔ **۱۹۰، مقایسه کنید.

$$\Phi(x_{i+1}, y_{k+1})-\Phi(x_{i+1}, y_k)-\Phi(x_i, y_{k+1})+\Phi(x_i, y_k)$$

به‌کار بریم، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\Phi''_{xy}(\xi_{ik}, \eta_{ik})\Delta x_i \Delta y_k = f(\xi_{ik}, \eta_{ik})\Delta x_i \Delta y_k$$

که در آن: $x_i \leqslant \xi_{ik} \leqslant x_{i+1}$ و $y_k \leqslant \eta_{ik} \leqslant y_{k+1}$؛ که اگر نسبت به i و k با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{i,k} f(\xi_{ik}, \eta_{ik})\Delta x_i \Delta y_k = \Phi(b, d)-\Phi(b, c)-\Phi(a, d)+\Phi(a, c)$$

و بالاخره، به سمت حد عبور می‌کنیم.

همان‌طور که می‌بینیم، طرح بحث همان است که برای اثبات دستور اصلی محاسبهٔ انتگرالی ــ برای بیان انتگرال معین ساده برحسب تابع اولیه ــ به‌کار می‌بردیم[۳۱۰].

در پایان، دومثال آموزنده می‌آوریم که، استقلال متقابل شرط‌های قضیهٔ شمارهٔ **۵۹۴** را نشان می‌دهند.

۱۵) x را عددی گویا می‌گیریم؛ در این‌صورت، می‌توان آن را به صورت کسری تحویل‌پذیر بامخرج مثبت q_x نشان‌داد. تابع $f(x, y)$ را، درمربع $(P)=[0, 1; 0, 1]$ به‌این ترتیب تعریف می‌کنیم:

اگر x و y هردو گویا باشند: $f(x, y)=\frac{1}{q_x}+\frac{1}{q_y}$

درسایر حالت‌ها: $f(x, y)=0$

تابع، در همهٔ نقطه‌هایی از مربع که مختصاتی گویا دارند، ناپیوسته و در سایر نقطه‌ها پیوسته است.

از آن‌جاکه، برای $\varepsilon>0$، تنها درتعداد محدودی نقطه‌ها داریم: $f>\varepsilon$، بنابراین، شرط انتگرال‌پذیری ــ که در شمارهٔ **۵۸۹** ثابت‌کردیم، برقرار است و، درنتیجه، انتگرال دوگانهٔ

$$\iint_{(P)} f(x, y)dP$$

وجود دارد و برابر صفراست.

به ازای مقدارهای گنگ y، تابع $f(x, y)$، برای همهٔ xها، برابر صفر می‌شود، به نحوی که

$$\int_0^1 f(x, y)dx = 0$$

در حالتی هم که y گویا باشد، برای مقدارهای گنگ x داریم: $f(x, y) = 0$، و برای مقدارهای گویای x: $f(x, y) = \frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y}$. این تابع نسبت به متغیر x، در هر بازه‌ای از حوزهٔ تغییرخود، دارای نوسانی بزرگتراز $\frac{1}{q_y}$ است و، در نتیجه، انتگرال نسبت به x، برای آن، وجود ندارد، یعنی دربارهٔ انتگرال مکرر زیر، نمی‌توان صحبت کرد:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)dx$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود که انتگرال زیرهم وجود ندارد:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)dy$$

۱۶) اکنون فرض می‌کنیم، درهمهٔ نقطه‌های مربع که برای آن‌ها، هر دو مختص x و y گویا هستند، داشته باشیم: $f(x, y) = 1$ و ضمناً: $q_x = q_y$؛ و برای سایر نقطه‌ها:

$$f(x, y) = 0$$

چون درهربخش دلخواه مربع، نوسان تابع f برابر است با ۱، بنابراین، انتگرال دوگانهٔ

$$\iint_{(P)} f(x, y)dP$$

دراین‌جا، وجود ندارد.

در حالتی که y را ثابت بگیریم، تابع $f(x, y)$ یا به طور اتحادی برابر صفر است (اگر y گنگ باشد) و یا تنها برای تعداد محدودی از مقدارهای x (اگر y گویا باشد)، مخالف صفراست. در هردو حالت

$$\int_0^1 f(x, y)dx = 0$$

یعنی انتگرال تکراری زیرهم وجود دارد:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)dx = 0$$

و به همین ترتیب، انتگرال تکراری

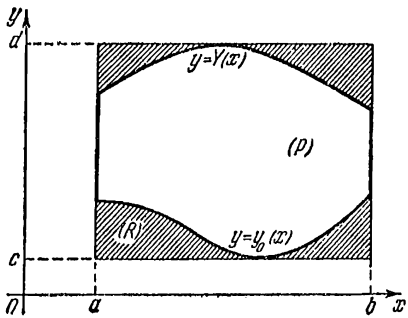
$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)dy = 0$$

[با ۵۲۸ مقایسه کنید].

۵۹۶. تبدیل انتگرال دوگانه، به انتگرال تکراری، درحالت حوزهٔ منحنی‌الخط. حوزهٔ (P) را، که از پایین و بالا به وسیلهٔ دو منحنی پیوستهٔ

$$y = y_0(x), \quad y = Y(x)$$
$$(a \leqslant x \leqslant b)$$

و از پهلوها به وسیلهٔ $x = a$ و $x = b$ محدود شده است، در نظر می‌گیریم (شکل ۳۹)؛ در این صورت، شبیه قضیهٔ شمارهٔ ۵۹۴، قضیهٔ زیر درست است:



شکل ۳۹

قضیه. اگر برای تابع $f(x, y)$، که در حوزهٔ (P) معین است، انتگرال دوگانهٔ

$$\iint_{(P)} f(x, y)dP$$

و برای هر مقدار ثابت x از $[a, b]$، انتگرال سادهٔ

$$I(x) = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)dy$$

وجود داشته باشد، آن وقت، انتگرال تکراری

$$\int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)dy$$

وجود دارد و برابری زیر برقرار است:

$$\iint_{(P)} f(x, y)dP = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)dy \qquad (۶)$$

برای **اثبات**، این حالت را به‌حالتی منجر می‌کنیم که درشمارهٔ **۵۹۴** مورد بررسی قرار دادیم. حوزهٔ (P) را در مستطیل

$$(R) = [a, b; c, d]$$

بافرض $c = \min y_0(x)$ و $d = \max Y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ محصور می‌کنیم (شکل ۳۹ را ببینید)، و دراین مستطیل، تابع $f^*(x, y)$ را، به‌ترتیب زیر، تعریف می‌کنیم:

$$f^*(x, y)\begin{cases} f(x, y) & \text{(اگر نقطهٔ } (x, y) \text{ به حوزهٔ } (P) \text{ تعلق داشته باشد)} \\ 0 & \text{(اگر نقطهٔ } (x, y) \text{ درسایر نقطه‌های حوزهٔ } (R) \text{ باشد)} \end{cases}$$

ثابت می‌کنیم که، این تابع، باشرطهای قضیهٔ شمارهٔ **۵۹۴** سازگار است.

این تابع، درحوزهٔ (P)، انتگرال‌پذیر است، زیرا دراین حوزه، باتابع انتگرال‌پذیر $f(x, y)$، انطباق حاصل می‌کند؛ بنابراین روشن است که

$$\iint_{(P)} f^*(x, y)dP = \iint_{(P)} f(x, y)dP$$

از طرف دیگر، دربیرون (P) داریم: $f^*(x, y) = 0$ و، در نتیجه، دربخش باقی‌ماندهٔ $(Q) = (R) - (P)$، از مستطیل (R) هم، انتگرال‌پذیر است*، ضمناً

$$\iint_{(Q)} f^*(x, y)dQ = 0$$

دراین صورت، بنابر **۵۹۲**، ۲°، تابع f^* در تمامی مستطیل (R) انتگرال‌پذیر است و

$$\iint_{(R)} f^*(x, y)dR = \iint_{(P)} f(x, y)dP \qquad (۷)$$

به ازای مقدارهای ثابت x در $[a, b]$، انتگرال زیرهم وجود دارد:

---

*) مقدار آن، در مرزهای این‌حوزه، نقشی ندارند. **۵۹۲**، ۱° را ببینید.

$$\int_c^d f^*(x, y)dy=\int_c^{y_0(x)} f^*dy+\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*dy+\int_{Y(x)}^d f^*dy$$

زیرا، هر یك از انتگرال‌های سمت راست، وجود دارند. در واقع، چون در بازه‌های $(c, y_0(x))$ و $(Y(x), d)$ از تغییر y، داریم: $f^*(x, y)=0$، بنابراین، انتگرال‌های اول وسوم وجود دارند و برابر صفرند. انتگرال دوم سمت راست هم، چون برای y از $[y_0(x), Y(x)]$ داریم: $f^*(x, y)=f(x, y)$، بر انتگرال تابع $f(x, y)$ منطبق می‌شود:

$$\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x, y)dy=\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)dy$$

و بالاخره

$$\int_c^d f^*(x, y)dy=\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)dy \qquad (۸)$$

بنابر قضیهٔ مذکور، برای تابع f^*، انتگرال تکراری هم وجود دارد که برابر با انتگرال دوگانه است [۵۹۴، (۴) را ببینید]:

$$\iint_{(R)} f^*(x, y)dR=\int_a^b dx\int_c^d f^*(x, y)dy$$

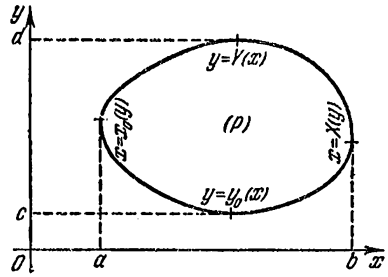
باتوجه به دستورهای (۷) و (۸)، می‌بینیم که، این دستور، با دستور (۶) هم ارز است.

اگر حوزهٔ (P)، ذوزنقهٔ منحنی‌الخط از نوع دیگر و محدود به منحنی‌های $x=x_0(y)$ و $x=X(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$ و خطهای راست $y=c$ و $y=d$ باشد، در آن صورت، به‌جای (۶)، به دستور زیر می‌رسیم:

$$\iint_{(P)} f(x, y)dP=\int_c^{X(y)} dy\int_{x_0(y)}^b f(x, y)dx \qquad (۶^*)$$

بااین فرض‌که، همراه باانتگرال دوگانه (به‌ازای $y=\text{const.}$)، انتگرال ساده نسبت به x هم وجود داشته‌باشد.

یادداشت. اگر دورهٔ حوزهٔ (P)، چه با خطهای موازی محور عرض و چه با خطهای موازی محور طول، تنها در دونقطه برخورد داشته باشد (مثل‌حالت شکل ۴۰)،



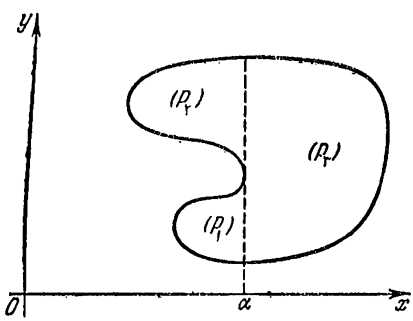
شکل ۴۰

آن‌وقت، هردودستور مذکورقابل‌استفاده‌اند که، از مقایسهٔ آن‌ها، دستور زیر به دست می‌آید:

$$\int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y)dx \qquad (۹)$$

که به خودی خود، دستور جالبی است: این دستور، شبیه دستور (۵) شمارهٔ **۵۹۴** است.

اگر تابع $f(x, y)$ در حوزهٔ (P) پیوسته باشد، درآن صورت انتگرال‌های دوگانه و ساده وجود دارند ویکی‌از دستورهای (۶) یا (*۶) را، بسته به‌نوع حوزهٔ (P)، می‌توان برای محاسبهٔ انتگرال دوگانه به‌کار برد.



شکل ۴۱

درحالت دورهٔ مرکب‌تر، معمولا می‌توان‌حوزهٔ (P)، را به‌تعداد محدودی‌بخش از نوع موردنظر تقسیم کرد (مثلا، شکل (P) درشکل ۴۱، به وسیلهٔ خط $x = \alpha$، به سه بخش (P_1)، (P_2) و (P_3) تقسیم می‌شود). آن وقت، انتگرال‌مطلوب، بنابر **۵۹۲**، ۲° به‌صورت‌مجموع‌انتگرال‌های‌جداگانه‌ای در می‌آیدکه، هرکدام از آن‌ها، همان‌طور که دیدیم، قابل محاسبه‌اند.

درحالت‌کلی نیز، برای منجرکردن مطلب به قضیهٔ شمارهٔ **۵۹۴**، اساس‌کار برتقسیم شکل مفروض به مستطیل‌ها قرار دارد. در این‌جا هم، برای نشان دادن انتگرال دوگانه، اغلب ازنماد زیر استفاده می‌شود:

$$\iint_{(P)} f(x, y)dxdy$$

حاصل‌ضرب $dxdy$، یادآور مساحت مربوط به مستطیل جزئی است.

نمادهای زیرهم، به خودی خود، مفهوم است:

$$\int_a^b \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f\,dy\,dx \quad \text{یا} \quad \int_c^d \int_{x_0(y)}^{X(y)} f\,dx\,dy$$

۵۹۷. مثال‌ها. ۱) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال دوگانهٔ

$$I=\iint_{(P)} y^2\sqrt{R^2-x^2}\,dP$$

که در آن، (P) عبارت است از دایرهٔ به شعاع R ومرکز مبداء مختصات (شکل۴۲).

حل. معادلهٔ دورهٔ حوزهٔ (P)، عبارت است از $x^2+y^2=R^2$؛ از آن جا $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$. روشن است که $y=+\sqrt{R^2-x^2}$، معادلهٔ نیم دایرهٔ بالایی و $y=-\sqrt{R^2-x^2}$، معادلهٔ نیم دایرهٔ پایینی است. به این ترتیب، برای x ثابت از بازهٔ $[-R, R]$، متغیر y از $-\sqrt{R^2-x^2}$ تا $+\sqrt{R^2-x^2}$ تغییر می‌کند. از روی دستور (۶) (با به‌حساب آوردن زوج بودن تابع زیرانتگرال نسبت به y)

$$I=\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} y^2\sqrt{R^2-x^2}\,dy = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2\,dy$$

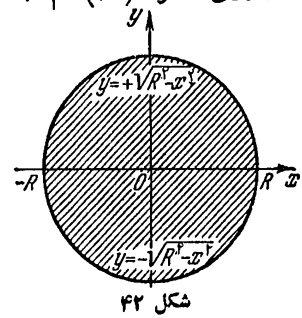
انتگرال درونی‌را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2\,dy=\frac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

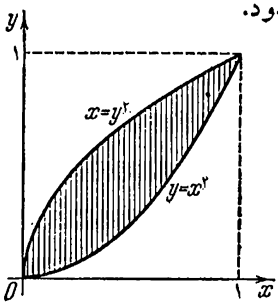
سپس (و دوباره، با به حساب‌آوردن زوج بودن)

$$I=\frac{2}{3}\int_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\int_0^R (R^2-x^2)^2\,dx=\frac{32}{45}R^5$$

محاسبه از روی دستور (*۶) هم، به‌همین‌جا منجر می‌شود.



شکل ۴۲



شکل ۴۳

۲) مطلوب است محاسبهٔ

$$K=\int_{(A)}(x^2+y)dxdy$$

که در آن، حوزهٔ (A) به وسیلهٔ دو سهمی $y=x^2$ و $y^2=x$ محدود شده است.

حل. بهتر است که شکل را، ولو به‌صورت تقریبی، رسم کنیم تا تصور کلی دربارهٔ حوزه به دست آید. اگر معادله‌های دو سهمی را، مثل دو معادلهٔ دو مجهولی، حل کنیم، نقطه‌های برخورد $(۰،۰)$ و $(۱،۱)$ به دست می‌آید (شکل ۴۳).

اگر انتگرال‌گیری بیرونی را نسبت به y انجام دهیم، روشن است که بازهٔ تغییر y، $[۰،۱]$ است. با اختیار مقدار نامشخص y از این بازه، از روی شکل می‌بینیم که x، از $x=y^2$ تا $x=\sqrt{y}$ تغییر می‌کند. از روی دستور (*۶)

$$K=\int_{۰}^{۱}dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(x^2+y)\,dx$$

انتگرال درونی را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(x^2+y)dx=\frac{x^3}{۳}+yx\Big|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}}=\frac{۴}{۳}y^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۱}{۳}y^6-y^3$$

وسپس، انتگرال بیرونی:

$$K=\int_{۰}^{۱}(\frac{۴}{۳}y^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۱}{۲}y^6-y^3)dy=\frac{۳۳}{۱۴۰}$$

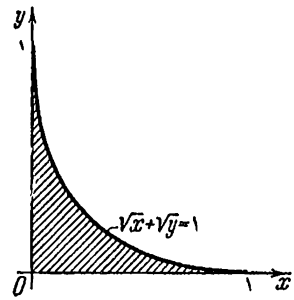
۳) محاسبه کنید:

$$J=\iint_{(D)}xydxdy$$

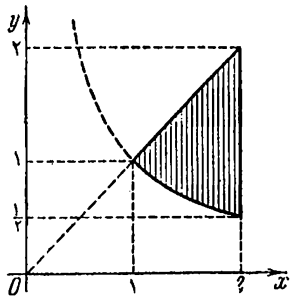
که در آن، (D) عبارت است از حوزهٔ محدود به محورهای مختصات و سهمی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$ (شکل ۴۴).

حل. داریم:

$$J=\int_{۰}^{۱}xdx\int_{۰}^{(۱-\sqrt{x})^2}ydy=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱}x(۱-\sqrt{x})^4dx=\frac{۱}{۲۸۰}$$



شکل ۴۴



شکل ۴۵

۴) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $I=\iint\limits_{(C)}\frac{x^2}{y^2}dxdy$، که در آن، (C) حوزه‌ای است محدود به خطهای راست $x=2$ و $y=x$ و هذلولی $xy=1$.

حل. مرزهای حوزه را رسم می‌کنیم (شکل ۴۵). خط $x=2$، خط $y=x$ را در نقطهٔ $(2,2)$ و هذلولی $xy=1$ را در نقطهٔ $(2,\frac{1}{2})$ قطع می‌کند؛ نقطهٔ برخورد خط $y=x$ با هذلولی، در ربع اول (که حوزهٔ مفروض در آن جا قرار دارد)، نقطهٔ $(1,1)$ است.

اگر برای محاسبهٔ انتگرال I، به دستور (۶) توجه کنیم و انتگرال بیرونی را نسبت به x، در بازهٔ $[1,2]$ انجام دهیم، وقتی که x را در این بازه ثابت بگیریم، y از $y=\frac{1}{x}$ تا $y=x$ تغییر می‌کند. بنابراین

$$I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy$$

ولی

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=-\frac{x^2}{y}\Big|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x}=x^3-x$$

به نحوی که

$$I=\int_1^2(x^3-x)dx=\frac{9}{4}$$

درمثال‌های قبلی، می‌توانستیم محاسبه را از روی هردو دستور (۶) یا (*۶) به‌طور یکسان و به سادگی انجام دهیم، ولی درحالت اخیر، وضع به‌صورت دیگری است: محاسبه از روی دستور (*۶) پیچیده می‌شود. با این همه، ما از همین دستور استفاده می‌کنیم تا بتوانیم با موقعیتی که اشاره کردیم، بیشتر آشنا شویم.

خط راست موازی محور x، دورهٔ حوزه را در دونقطه قطع می‌کند، به نحوی که می‌توان از دستور (*۶) استفاده کرد، ولی خمی که حوزه را از سمت چپ محدود می‌کند. ــ این خم نظیر $x=x_0(y)$ درحالت کلی است ــ از دوبخش تشکیل شده است: یك قطعه خط راست و یك قطعه هذلولی، که با معادله‌های مختلف بیان می‌شوند. به زبان دیگر، تابع $x_0(y)$، در بخش‌های مختلف بازهٔ $[\frac{1}{2}, 2]$ از تغییر y، با دستورهای مختلف بیان می‌شود:

$$x_0(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & (\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1)\\ y & (1\leqslant y\leqslant 2)\end{cases}$$

حوزه، از سمت راست، به خط راست $x=2$ محدود است.

به‌این ترتیب، بهتر است انتگرال‌گیری نسبت به y را تجزیه کنیم و I را به‌صورت

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}\frac{x^2}{y^2}dx+\int_{1}^{2}dy\int_{y}^{2}\frac{x^2}{y^2}dx$$

درآوریم. چون داریم:

$$\int_{\frac{1}{y}}^{2}\frac{x^2}{y^2}dx=\frac{8}{3y^2}-\frac{1}{3y^5},\quad \int_{y}^{2}\frac{x^2}{y^2}dx=\frac{8}{3y^2}-\frac{y}{3}$$

بنابراین

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{1}{3y^5}\right)dy+\int_{1}^{2}\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{y}{3}\right)dy=\frac{17}{12}+\frac{5}{6}=\frac{9}{4}$$

البته، منطقی است که از روش ممکن محاسبهٔ انتگرال دوگانه، ساده‌ترین آن‌ها انتخاب شود.

۵) این انتگرال‌ها را محاسبه کنید:

$$\text{(a) } I_1=\iint\limits_{(Q_1)}\cos(x+y)dxdy, \quad \text{(b) } I_2=\iint\limits_{(Q_2)}(2x+y)dxdy,$$

$$\text{(c) } I_3=\iint\limits_{(Q_3)}(x+6y)dxdy$$

که در آن‌ها، (Q_1) عبارت است از مثلثی محدود به خط‌های راست

$$x=0,\ y=x,\ y=\pi$$

(Q_2)، مثلثی که محدود به محورهای مختصات و خط راست $x+y=3$ باشد، و (Q_3)، مثلث محدود به خط‌های راست

$$y=x,\ y=5x,\ x=1$$

راهنمائی: درحالت‌های (a) و (b)، می‌توان ازهرکدام ازدستورهای (۶) یا (۶*)، بدون هیچ تفاوتی، استفاده کرد، ولی درحالت (c)، بهتر است از دستور (۶) استفاده شود (چرا؟ شکل را رسم کنید).

پاسخ: (a) $I_1=-2$؛ (b) $I_2=\frac{27}{2}$؛ (c) $I_3=25\frac{1}{3}$.

۶) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$I=\iint\sqrt{4x^2-y^2}dxdy$$

گسترده برمثلثی که از خط‌های راست $y=0$، $x=1$ و $y=x$ تشکیل شده است.

حل. از روی دستور (۶) داریم:

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}dy.$$

انتگرال دومی را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}dy=\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+2x^2\arcsin\frac{y}{2x}\Bigg|_{y=0}^{y=x}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)x^2$$

وسرانجام: $I=\frac{۱}{۳}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\pi}{۳}\right)$.

می‌توانستیم از دستور (*۶) استفاده کنیم، ولی در آن صورت، با دشواری بیشتری روبرو می‌شدیم. برای مسیر محاسبه هم، باید به‌چنین موقعیتی توجه کنیم.

در ارتباط با دشواری‌هایی که درحالت حوزهٔ انتگرال‌گیری منحنی‌الخط پیش‌می‌آید، تمرین‌های زیر مفید است.

۷) با توجه به دستور (۹)، ترتیب انتگرال‌گیری را، در هریك از انتگرال‌های مکرر زیر، عوض کنید:

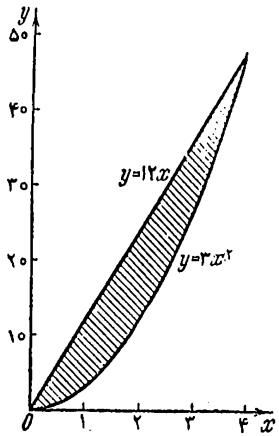
$$\text{(a)}\ \int_{۰}^{۴}dx\int_{۳x^۲}^{۱۲x}f(x,y)dy;\quad \text{(b)}\ \int_{-۷}^{۱}dy\int_{۲-\sqrt{۷-۶y-y^۲}}^{۲+\sqrt{۷-۶y-y^۲}}f(x,y)dx;$$

$$\text{(c)}\ \int_{۰}^{۱}dx\int_{۲x}^{۳x}f(x,y)dy;\quad \text{(d)}\ \int_{۰}^{۱}dy\int_{\frac{۱}{۲}y^۲}^{\sqrt{۳-y^۲}}f(x,y)dx$$

به شرطی که $f(x,y)$، تابعی پیوسته باشد.

(a) حل. حوزهٔ انتگرال‌گیری ازنابرابری‌های زیر تعیین می‌شود:

$$۰\leqslant x\leqslant ۴,\quad ۳x^۲\leqslant y\leqslant ۱۲x$$



شکل ۴۶

از این‌جا، قبل از هرچیز، روشن می‌شود که مقدارهای مرزی y عبارتند از ۰ و ۴۸. اگرنابرابری‌های دوم را نسبت به x حل کنیم، برای y ثابت، معلوم می‌شود که x از $\frac{۱}{۱۲}y$ تا $\sqrt{\frac{y}{۳}}$ تغییرمی‌کند*.

بهتر است، این نتیجه را، روی شکل منتقل کنیم؛ در شکل ۴۶، حوزهٔ مفروض به وسیلهٔ خط راست $y=۱۲x$ وسهمی $y=۳x^۲$، که درنقطه‌های به‌طول ۰و۴ یکدیگر را قطع‌می‌کنند، محدود شده است. توجه کنیم که مقیاس محور x را با

*) هردو این‌مقدارها، از محدودهٔ بازهٔ $[۰, ۴]$ تجاوز نمی‌کنند.

مقیاس محور y، متفاوت گرفته‌ایم.

پاسخ: $\int_{0}^{۴۸} dy \int_{\frac{۱}{۱۲}y}^{\sqrt{\frac{y}{۳}}} f\,dx$

(b) راهنمائی: حوزهٔ انتگرال‌گیری محدوداست به دایرهٔ

$$(x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۴^۲$$

پاسخ: $\int_{-۲}^{۶} dx \int_{-۳-\sqrt{۱۲+۴x-x^۲}}^{-۳+\sqrt{۱۲+۴x-x^۲}} f\,dy$

(c) حل. حوزهٔ انتگرال‌گیری، از نابرابری‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$۰\leqslant x\leqslant ۱,\quad ۲x\leqslant y\leqslant ۳x$$

از این‌جا، مقدارهای مرزی y برابر با ۰ و ۳ در می‌آید.

با حل نابرابری‌های دوم، به دست می‌آید: $\frac{y}{۲}\leqslant x\leqslant \frac{y}{۳}$. ولی به ازای $y>۲$، مقدار $\frac{y}{۲}$ از بازهٔ $[۰\ ,۱]$، که در هرحال مقدارهای x را محدود می‌کند، خارج می‌شود.

در نتیجه، به‌ازای $۰\leqslant y\leqslant ۲$، مقدار x از $\frac{y}{۳}$ تا $\frac{y}{۲}$ و به ازای $۲\leqslant y\leqslant ۳$، از $\frac{y}{۳}$ تا ۱ تغییر می‌کند.

این نتیجه را، به‌طریق هندسی، ساده‌تر می‌توان به‌دست آورد، زیرا حوزهٔ انتگرال‌گیری عبارت است از مثلث محدود به خطهای راست $y=۳x$، $y=۲x$ و $x=۱$ (شکل را رسم کنید).

پاسخ: به‌مجموع دو انتگرال تکراری می‌رسیم (با ۴) و ۵)، (c) مقایسه کنید):

$$\int_{۰}^{۲} dy \int_{\frac{۱}{۳}y}^{\frac{۱}{۲}y} f\,dx+\int_{۲}^{۳} dy \int_{\frac{۱}{۳}y}^{۱} f\,dx$$

(d) پاسخ: مجموع سه انتگرال تکراری به دست می‌آید:

$$\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} dx \int_{۰}^{\sqrt{۲x}} f\,dy+\int_{\frac{۱}{۲}}^{\sqrt{۲}} dx \int_{۰}^{۱} f\,dy+\int_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۳}} dx \int_{۰}^{\sqrt{۳-x^۲}} f\,dy$$

۸) هریك از عبارت‌های زیررا، به‌صورت یك انتگرال تکراری بنویسید:

$$\text{(a)}\ \int_{0}^{1} dy \int_{\frac{1}{9}y^2}^{y} f(x, y)dx + \int_{1}^{3} dy \int_{\frac{1}{9}y^2}^{1} f(x, y)dx;$$

$$\text{(b)}\ \int_{3}^{7} dy \int_{\frac{9}{y}}^{3} f(x, y)dx + \int_{7}^{9} dy \int_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x, y)dx$$

پاسخ. (a) $\int_{0}^{1} dx \int_{x}^{3\sqrt{x}} f\,dy$؛ (b) $\int_{1}^{3} dx \int_{\frac{9}{x}}^{10-x} f\,dy$. (توصیه‌می‌کنیم که، در همهٔ حالت‌ها، شکل‌را رسم‌کنید.)

۹) ثابت‌کنید، دستور معمول محاسبهٔ انتگرالی

$$P = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

که معرف مساحت ذوزنقهٔ منحنی‌الخطی است که به محور x، عرض‌های $x = a$ و $x = b$ و منحنی $y = f(x)$ $(f \geqslant 0)$ محدود شده است، نتیجه‌ای است از برابری روشن

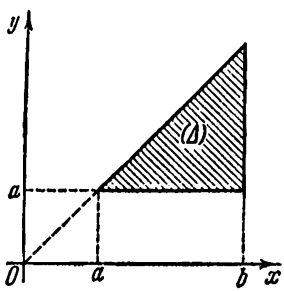
$$P = \iint_{(P)} dxdy$$

راهنمائی: از دستور (۶) استفاده‌کنید.

۱۰) دستور زیررا ثابت‌کنید:

$$\int_{a}^{b} dx \int_{a}^{x} f(x, y)dy = \int_{a}^{b} dy \int_{y}^{b} f(x, y)dx \quad (10)$$

که درآن، $f(x, y)$، تابع پیوستهٔ دلخواهی است درمثلث (Δ)، محدود به خط‌هـای راست $y = a$، $x = b$ و $y = x$.



شکل ۴۷

راهنمـائی. شکل ۴۷ را ببینید؛ از دستور (۹) استفـاده کنید، یعنـی در انتگرال تکـراری را، که انتگرال دوگانهٔ نسبت به‌حوزهٔ (Δ) به آن‌ها منجر می‌شود، باهم برابر قراردهید.

این دستور را، معمولا دستور دیریکله می‌نامند و کاربردهای زیادی، به خصوص در نظریهٔ معادله‌های انتگرالی ولترا (G. Volterra)، دارد.

۱۱) به کمك دستور (۱۰) می‌توان ثابت کرد:

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} (t_1-t)^{n-2} f(t)dt = \frac{1}{n-1}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

استفادهٔ متوالی از این دستور، به نتیجهٔ زیر می‌رسد:

$$\underbrace{\int_a^x dt_{n-1}\int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2}\cdots\int_a^{t_1}}_{n} f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

که قبلا [۵۱۱، ۱۳)] هم، از طریق دیگری ثابت شده بود.

۱۲) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$I = \iint\limits_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}dxdy$$

که در آن: $p\geqslant 1$ و $q\geqslant 1$*.

با توجه به دستور (۵) داریم:

$$I = \int_0^1 x^{p-1}dx\int_0^{1-x} y^{q-1}dy = \frac{1}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx = \frac{1}{q}B(p, q+1)$$

و سرانجام

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}dxdy = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$$

این دستور، به دیریکله تعلق دارد.

---

*) این محدودیت را، به‌این مناسبت قایل می‌شویم که از بی‌نهایت شدن مقدار زیر انتگرال پرهیز کرده باشیم؛ بعداً [در ۶۱۷، ۱۴)]، این محدودیت را کمتر خواهیم کرد.

۱۳) انتگرال کلی‌تر

$$J=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}dxdy$$

را هم، می‌توان به ترتیب مشابهی محاسبه کرد، به شرطی که داشته باشیم*:

$$p\geqslant 1,\ q\geqslant 1,\ r\geqslant 1$$

شبیه حالت قبل داریم:

$$J=\int_0^1 x^{p-1}dx\int_0^{1-x} y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}dy$$

سپس، در انتگرال درونی فرض می‌کنیم $y=(1-x)t$، و به‌این نتیجه می‌رسیم:

$$J=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+r-1}dx\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{r-1}dt=$$

$$=B(p,q+r)\cdot B(q,r)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)\cdot\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}$$

۱۴) این انتگرال را، که تعمیم بعدی انتگرال قبلی است، محاسبه کنید:

$$K=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}}\frac{x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}dxdy}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^{p+q+r}}$$

که در آن: $\alpha,\beta\geqslant 0$ و $\gamma>0$؛ علاوه بر آن: $p\geqslant 1$، $q\geqslant 1$، $r\geqslant 1$*.

باعبور به انتگرال تکراری به دست می‌آید:

$$K=\int_0^1 x^{p-1}dx\int_0^{1-x}\frac{y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^{p+q+r}}dy$$

سپس، بعد از فرض $y=(1-x)t$، ردیف انتگرال‌گیری را تغییر می‌دهیم:

---

*) پاورقی قبل‌را ببینید.

$$K=\int_{0}^{1} t^{q-1}(1-t)^{r-1}dt \int_{0}^{1} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q+r-1}}{[\alpha x+\beta t(1-x)+\gamma]^{p+q+r}}\,dx$$

برای محاسبهٔ انتگرال درونی، از نتیجهٔ معلوم قبلی [۵۳۴، ۲)] استفاده می‌کنیم. آن وقت:

$$K=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q+r)}{\Gamma(p+q+r)}\cdot\frac{1}{(\alpha+\gamma)^{p}}\int_{0}^{1}\frac{t^{q-1}(1-t)^{r-1}}{(\beta t+\gamma)^{q+r}}dt$$

و با استناد مجدد به‌همان نتیجه، بالاخره

$$K=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q+r)}{\Gamma(p+q+r)}\cdot\frac{1}{(\alpha+\gamma)^{p}}\cdot\frac{\Gamma(q)\cdot\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}\cdot\frac{1}{(\beta+\gamma)^{q}\gamma^{r}}=$$

$$=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)\cdot\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}\cdot\frac{1}{(\alpha+\gamma)^{p}(\beta+\gamma)^{q}\gamma^{r}}$$

۱۵) تابع‌های $f(x, y)$ و $g(x, y)$ را در بازهٔ محدود بستهٔ (D) پیوسته می‌گیریم و، ضمناً، کمترین و بیشترین مقدارهای تابع g را m و M فرض می‌کنیم؛ $\varphi(u)$ را تابعی در نظر می‌گیریم که، برای $m\leqslant u\leqslant M$ پیوسته باشد.

اگر انتگرال

$$\iint_{m\leqslant g\leqslant u} f(x, y)dxdy$$

را، که در بخشی از حوزهٔ D گسترده است که با نابرابری‌های پایین انتگرال مشخص شده است، با $\psi(u)$ نشان دهیم*، آن وقت دستور کاتالان (E. Catalan) برقرار است:

$$\iint_{m\leqslant g\leqslant M} f(x, y)\varphi(g(x, y))dxdy=\int_{m}^{M}\varphi(u)d\psi(u)$$

که در آن، انتگرال سمت راست، به معنای ستیلتیس فهمیده می‌شود.

چون تابع پیوستهٔ f را همیشه می‌توان همچون تفاضل دو تابع پیوستهٔ مثبت در نظر گرفت، برای اثبات دستور، کافی است به‌حالتی بپردازیم که تابع f مثبت است.

---

*) فرض می‌کنیم، معادلهٔ $g(x, y)=u$، معرف منحنی بسته‌ای باشد که بخش حوزهٔ مذکور، به وسیلهٔ دو منحنی از این گونه، محدود شود.

بازهٔ $[m, M]$را، به دلخواه به بخش‌هایی تقسیم می‌کنیم:

$$m=u_0<u_1<\ldots<u_i<u_{i+1}<\cdots<u_n=M$$

انتگرال مفروض هم (که آن را I می‌نامیم)، طبق این تقسیم، چنین می‌شود:

$$I=\sum_{i=0}^{n-1}\int\int_{u_i\leqslant g\leqslant u_{i+1}} f\cdot\varphi(g)dxdy=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(g(\xi_i^*,\eta_i^*))\int\int_{u_i\leqslant g\leqslant u_{i+1}} f(x,y)dxdy$$

در این‌جا، از قضیهٔ تعمیم یافتهٔ مربوط به مقدارهای میانگین استفاده کردیم. (ξ_i^*,η_i^*) نقطه‌ای از حوزه است که در آن، $u_i\leqslant g\leqslant u_{i+1}$، به نحوی که با فرض $g(\xi_i^*,\eta_i^*)=u_i^*$ خواهیم داشت: $u_i\leqslant u_i^*\leqslant u_{i+1}$. بنابراین، بالاخره

$$I=\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(u_i^*)[\psi(u_{i+1})-\psi(u_i)]$$

در سمت راست، مجموع ستیلتیس شناخته می‌شود. اگر به ازای $\max\Delta u_i\to 0$، به سمت حد عبور کنیم، به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم:

$$I=(s)\int_m^M\varphi(u)d\psi(u)$$

اگر برای $\psi(u)$، مشتق پیوسته (یا دست‌کم، به‌طورمطلق انتگرال‌پذیر)$\psi'(u)$ وجود داشته باشد، آن وقت، انتگرال ستیلتیس به انتگرال معمولی تبدیل می‌شود:

$$I=\int_m^M\varphi(u)\psi'(u)du$$

۱۶) به عنوان مثال نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با روش کاتالان، از دستور مقدماتی دیریکله [۱۲] را ببینید]، دستور کلی‌تر متعلق به لیوویل (J. Liouville) را به‌دست آورد.

درحالت خاص فرض می‌کنیم:

$$f(x,y)=x^{p-1}y^{q-1},\quad g(x,y)=x+y$$

و برای حوزهٔ (D)، مثلث $x\geqslant 0$، $y\geqslant 0$، $x+y\leqslant 1$را انتخاب می‌کنیم. در این صورت، با توجه به دستور دیریکله، به‌ازای $u\leqslant 1>0$ داریم:

$$\psi(u)=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant u}} x^{p-1}y^{q-1}dxdy=u^{p+q}\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}dxdy=$$

$$=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}u^{p+q}$$

با استفاده از تبدیل کاتالان، خواهیم داشت:

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}\varphi(x+y)dxdy=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\int_0^1\varphi(u)du^{p+q}=$$

$$=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\int_0^1\varphi(u)u^{p+q-1}du$$

واین، دستور لیوویل است.

۱۷) مطلوب است محاسبهٔ حجم جسم محدود به

(a) صفحه‌های $x=0$، $y=0$، $z=0$، استوانهٔ $x^2+y^2=R^2$ و سهموی هذلولی‌وار $z=xy$ (در ربع اول)؛

(b) صفحه‌های $x=0$، $y=0$، $z=0$، $x+2y=1$ و سطح $z=x^2+y+1$؛

(c) صفحه‌های $y=1$، $z=0$، استوانهٔ‌سهمی‌وار $y=x^2$ وسهموی $z=x^2+y^2$؛

(d) صفحه‌های $y=0$، $z=0$، $y=\frac{b}{a}x$ و استوانهٔ بیضی‌وار $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

پاسخ.(a) $V=\int_0^R xdx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}ydy=\frac{1}{8}R^4$؛

(b) $V=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_0^{1-2y}(x^2+y+1)dx=\frac{1}{3}$؛

(c) $V=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1(x^2+y^2)dy=\frac{88}{105}$؛

$$V=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}x}\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dy=\frac{abc}{3}. \qquad \text{(d)}$$

۱۸) مطلوب است حجم جسم محدود به

(a) استوانهٔ بیضی‌وار $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و صفحه‌های $z=0$ و

$$z=\lambda x+\mu y+h \quad (h>0)$$

(b) استوانه‌های $az=y^2$ و $x^2+y^2=r^2$ و صفحهٔ $z=0$؛

(c) بخشی‌ازسطح $xyz=a^3$ که به‌وسیلهٔ صفحه‌های $z=p$، $z=q$ $(0<p<q)$ و $x=r$ و $x=s$ $(0<r<s)$ جدا شده است، تصویر این‌بخش برصفحهٔ xy و استوانهٔ تصویر.

پاسخ. (a) $V=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}(\lambda x+\mu y+h)dy=\pi abh=Ph$؛

(P را، مساحت بیضی گرفته‌ایم؛ نتیجه از نظر هندسی روشن است).

$$V=\frac{4}{a}\int_0^r dy\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}}y^2dx=\frac{4}{a}\int_0^r y^2\sqrt{r^2-y^2}\,dy=\frac{\pi r^4}{4a} \qquad \text{(b)}$$

$$V=\int_r^s dx\int_{\frac{a^3}{qx}}^{\frac{a^3}{px}}\frac{a^3}{xy}dy=a^3\ln\frac{q}{p}\ln\frac{s}{r} \qquad \text{(c)}$$

۱۹) مطلوب است محاسبهٔ حجم جسمی که به وسیلهٔ استوانهٔ $x^2+y^2=2ax$ از سهموی دوار $y^2+z^2=4ah$ جدا شده است.

حل. داریم:

$$V=4\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\sqrt{4ax-y^2}\,dy$$

با فرض $b^2=4ax$ در دستور معلوم

$$\int \sqrt{b^2-y^2}\,dy = \frac{b^2}{2}\arcsin\frac{y}{b} + \frac{y}{2}\sqrt{b^2-y^2}$$

تابع اولیهٔ تابع $\int \sqrt{4ax-y^2}\,dy$ را محاسبه می‌کنیم و، به‌کمک آن، انتگرال درونی را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{4ax-y^2}\,dy = 2ax\cdot\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{4a}} + \frac{x}{2}\sqrt{4a^2-x^2}$$

سپس، باروش انتگرال‌گیری جزء به جزء، به‌دست می‌آید:

$$2a\int_0^{2a} x\cdot\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{4a}}\,dx = \frac{a}{2}\int_0^{2a}\frac{x^2}{\sqrt{4a^2-x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{a}{2}\left(2a^2\arcsin\frac{x}{2a} - \frac{x}{2}\sqrt{4a^2-x^2}\right)\Bigg|_0^{2a} = \frac{\pi a^3}{3}$$

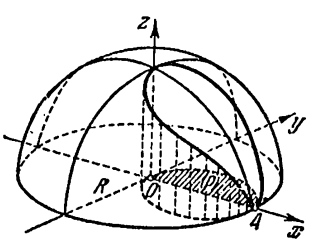
بالاخره

$$\frac{1}{2}\int_0^{2a} x\sqrt{4a^2-x^2}\,dx = \frac{4}{3}a^3$$

و

$$V = 4\left(\frac{\pi a^3}{2}+\frac{4}{3}a^3\right) - a^3\left(2\pi+\frac{16}{3}\right)$$

۲۰) مطلوب است محاسبه حجم V، جسمی که به وسیلهٔ استوانهٔ $x^2+y^2=Rx$ از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=R^2$ جدا شده است (شکل ۴۸)*.



شکل ۴۸

حل. داریم:

*) این جسم را، برای نخستین‌بار، وی‌ویانی (Viviani) ریاضی‌دان ایتالیایی سدهٔ هفدهم مورد بررسی قرارداد، به‌همین مناسبت، اغلب آن را، جسم وی‌ویانی می‌نامند.

$$V=۴\iint_{(P)}\sqrt{R^۲-x^۲-y^۲}\,dxdy$$

که در آن، (P) عبارت است از نیم‌دایرهٔ واقع در ربع اول صفحهٔ xy، محدود به‌خط‌های $x=۰$ و $x^۲+y^۲=Rx$؛ یا

$$V=۴\int_۰^R dx\int_۰^{\sqrt{Rx-R^۲}}\sqrt{R^۲-x^۲-y^۲}\,dy$$

ولی

$$\int_۰^{\sqrt{Rx-R^۲}}\sqrt{R^۲-x^۲-y^۲}\,dy=$$

$$=\frac{R^۲-x^۲}{۲}\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^۲-x^۲}}+\frac{y}{۲}\sqrt{R^۲-x^۲-y^۲}\Big|_{y=۰}^{y=\sqrt{Rx-x^۲}}=$$

$$=\frac{R^۲-x^۲}{۲}\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}+\frac{۱}{۲}\sqrt{R}(R-x)\sqrt{x}$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء، به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}\int_۰^R(R^۲-x^۲)\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}\,dx=\frac{\pi R^۳}{۱۲}-\frac{\sqrt{R}}{۱۲}\int_۰^R\frac{۳R^۲x^{\frac{۱}{۲}}-x^{\frac{۵}{۲}}}{R+x}\,dx$$

که مثلا، با فرض $x=Rt^۲$، مقدار انتگرال آخری، به سادگی به‌دست می‌آید:

$$\frac{\sqrt{R}}{۱۲}\cdot۲R^۲\sqrt{R}\cdot\left(\frac{۳۲}{۱۵}-\frac{\pi}{۲}\right)=\left(\frac{۱۶}{۴۵}-\frac{\pi}{۱۲}\right)R^۳$$

به طوری که

$$\frac{۱}{۲}\int_۰^R(R^۲-x^۲)\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}\,dx=\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{۱۶}{۴۵}\right)R^۳$$

و بعد، بدون هیچ زحمتی، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{R}\int_۰^R(R-x)\sqrt{x}\,dx=\frac{۲}{۱۵}R^۳$$

به نحوی که سرانجام

$$V=۴(\frac{\pi}{۶}-\frac{۲}{۹})R^۳=\frac{۲}{۳}\pi R^۳-\frac{۸}{۹}R^{۳}*$$

یادداشت. از آن‌جا که حجم نیم‌کره، برابر است با $\frac{۲}{۳}\pi R^۳$، بنابراین، حجم بخشی از آن که پس از جداکردن حجم ویویانی به دست می‌آید، برابر $\frac{۸}{۹}R^۳$ می‌شود و جالب است که، این حجم، نسبت به شعاع R، مقداری گویاست.

۲۱) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال‌های

$$I_۱=\int\int_{(A)} ydxdy, \quad I_۲=\int\int_{(A)} xdxdy$$

که در آن‌ها، حوزهٔ (A) محدود است به محور x و کمان سیکلوئید

$$x=a(t-sint), \quad y=a(۱-cost) \quad (۰\leqslant t\leqslant ۲\pi)$$

حل. ویژگی این مسأله در آن است که دورهٔ حوزه، بامعادله‌های پارامتری داده‌شده است. ولی عرض y نقطه‌ای از سیکلوئید، تابعی پیوسته و یك ارزشی ازطول x آن‌است: $y=y(x)$، به نحوی که ضمن عبور به‌انتگرال تکراری، از روی دستور کلی داریم:

$$I_۱=\int_۰^{۲\pi R} dx\int_۰^{y(x)} ydy=\frac{۱}{۲}\int_۰^{۲\pi R} y^۲(x)dx$$

برای رهائی از تابع نامعلوم $y(x)$ و رسیدن به تابع‌های معلـوم، فرض می‌کنیم: $x=a(t-sint)$. در این صورت، $y(x)$ به‌ناچـار به $a(۱-cost)$ تبدیل می‌شود و به دست می‌آید:

$$I_۱=\frac{۱}{۲}\int_۰^{۲\pi} a^۲(۱-cost)^۲da(t-sint)=\frac{a^۳}{۲}\int_۰^{۲\pi}(۱-cost)^۳dt=\frac{۵}{۲}\pi a^۳$$

و به همین ترتیب

$$I_۲=۳\pi^۲a^۳$$

---

*) بعداً [در ۶۱۱، ۶)]، باروش به مراتب ساده‌تری، این‌حجم را دوباره محاسبه خواهیم کرد.

۲۱) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$K=\int\int_{(B)} xydxdy$$

که در آن، حوزهٔ (B) محدود است به محورهای مختصات و بخشی از آستروئید

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t\quad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

پاسخ: $K=\frac{1}{80}R^4$.

۵۹۸. کاربرد در مکانیک. هرکمیت هندسی و مکانیکی که با توزیع پیوسته ومسطح جرم در امتداد شکلی‌مثل (P) سروکار داشته باشد، اساساً با انتگرال دوگانهٔ روی این شکل بیان می‌شود. درشمارهٔ **۵۹۳** هم، به‌تفصیل در این‌باره صحبت کردیم. به خصوص دیدیم که کمیت، برحسب توزیع چگالی مفروض $\rho(M)=\rho(x, y)$، این طور بیان می‌شود:

$$m=\int\int_{(P)}\rho dP \qquad (11)$$

در این‌جا می‌خواهیم راهنمائی‌های مختصری در این‌باره بدهیم که، چنین دستورهایی را، چگونه می‌توان به دست آورد. دراین‌جا هم ازهمان ردیف اندیشه‌هایی استفاده می‌کنیم که، ضمن استفاده از انتگرال معین ساده، به‌کار می‌بردیم [**۳۴۸** را ببینید].

بخش جزئی (dP) را ازشکل (P) جدا می‌کنیم وحالت ساده‌ای را در نظر می‌گیریم که، مثلا، جرم تمامی جزء دریك نقطه متمرکز ویا چگالی توزیع جرم در محدودهٔ بخش جزئی‌ثابت باشد. این فرض به‌ما امکان می‌دهد، برای عنصر dQ ازکمیت Q، مقدار تقریبی به‌صورت

$$dQ=q(M)dP$$

را، که تا مرتبهٔ بی‌نهایت کوچکی بالاتراز dP درست است، بیاوریم. در این صورت، مقداردقیق Q، با دستور زیر بیان می‌شود:

$$Q=\int\int_{(P)} q(M)dP$$

استدلال را می‌توان شبیه ۳۴۸ انجام داد.

باجمع‌کردن مقدارهای تقریبی برای جزءهای dQ، به مقدار تقریبی Q به صورت مجموع انتگرالی می‌رسیم و، سپس، با عبور به سمت حد، مقدار دقیق Q را به‌صورت‌حد مجموع، یعنی انتگرال، به‌دست می‌آوریم.

از طرف دیگر، خود مقدار dQ امکان می‌دهدنتیجه بگیریم‌که $q(M)$ عبارت‌است از «مشتق نسبت به حوزهٔ» مقدار Q (در نقطهٔ M). از این‌جا، بنا بر آن‌چه در شمارهٔ ۵۹۳ دیدیم، دوباره همان نتیجه حاصل می‌شود.

مثلا، به سادگی می‌فهمیم‌که، گشتاورهای استاتیك جزئی و گشتاورهای ماند (ممان اینرسی) نسبت به محورهای مختصات، چنین‌اند:

$$dM_x = y\rho dP, \quad dM_y = x\rho dP,$$
$$dI_x = y^2\rho dP, \quad dI_y = x^2\rho dP$$

ازاین‌جا، برای خود گشتاورها، به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} M_x = \int\limits_{(P)}\int y\rho dP, & M_y = \int\limits_{(P)}\int x\rho dP \\ I_x = \int\limits_{(P)}\int y^2\rho dP, & I_y = \int\limits_{(P)}\int x^2\rho dP \end{cases} \tag{۱۲}$$

اکنون، به ترتیب معمول، مختصات گرانیکاه شکل‌ها به‌دست می‌آید:

$$\xi = \frac{\int\limits_{(P)}\int x\rho dP}{m}, \quad \eta = \frac{\int\limits_{(P)}\int y\rho dP}{m} \tag{۱۳}$$

درحالت شکل‌های همگن ($\rho = \text{const.}$)، این دستورها ساده می‌شوند:

$$\xi = \frac{\int\limits_{(P)}\int x dP}{P}, \quad \eta = \frac{\int\limits_{(P)}\int y dP}{P} \tag{۱۴}$$

درحالت‌های سادهٔ جداگانه، می‌توان به‌کمك انتگرال‌های دوگانه، مسأله‌های مشابهی را دربارهٔ جسم‌ها، و به‌خصوص میله‌های استوانه‌ای، حل کرد.

فرض کنیم، میله‌ای محدود به‌سطح $z = z(x, y)$، تصویر آن (P) برصفحهٔ xy و

استوانهٔ تصویرکننده با مولدهای موازی محور z، داده شده باشد. اگر مثلا بخواهیم گشتاور ستاتیک M_{xy} میلهٔ همگن را معین‌کنیم (برای سادگی‌کار، چگالی حجمی‌را برابر واحد می‌گیریم)، میله را به‌صورت ردیفی از ستون‌های جزئی با قاعده‌های dP وارتفاع z در نظر می‌گیریم. گشتاور ستاتیک هر یك از این ستون‌های جزئی نسبت به صفحهٔ xy، برابراست با جرم‌آن ویا (درحالت مفروض) حجم zdP، ضرب در فاصلهٔ‌گرانیگاه آن تااین‌صفحه (یعنی $\frac{1}{2}z$). بنابراین، گشتاور ستاتیك جزئی، عبارت است از

$$dM_{xy}=\frac{1}{2}z^2dP$$

ازآن‌جا، اگر همهٔ ستون‌های جزئی را درنظر بگیریم، به دست می‌آید:

$$M_{xy}=\frac{1}{2}\int\int_{(P)} z^2dP \qquad (۱۵)$$

به‌همین ترتیب، دستورهای زیرهم ثابت می‌شوند:

$$M_{zx}=\int\int_{(P)} yzdP,\quad M_{yz}=\int\int_{(P)} xzdP \qquad (۱۵a)$$

ازاین‌جا، می‌توان به‌سادگی، عبارت‌هایی برای مختصات ξ، η و ζ مرکز گرانیگاه میله به دست آورد:

$$\xi=\frac{M_{yz}}{V}=\frac{\int\int_{(P)} xzdP}{V},\ \ldots$$

به‌همین ترتیب، گشتاور ماند I_z میله نسبت به محور Oz، وگشتاورهای ماند I_{yz} و I_{zx} نسبت به صفحه‌های مختصات، پیدا می‌شود:

$$I_z=\int\int_{(P)}(y^2+x^2)zdP, I_{zx}=\int\int_{(P)} y^2zdP,\ I_{yz}=\int\int_{(P)} x^2zdP \qquad (۱۶)$$

ضمناً روشن است‌که: $I_z=I_{zx}+I_{yz}$.

اگرگسترش چگالی ρ جرم توزیع شده، مقدار ثابتی‌نبود و به x و y بستگی‌داشت

(یعنی، به هرحال، درطول هرستون جزئی، مقداری ثابت بود)، باز هم مثل حالت قبل، می‌توانستیم به‌انتگرال‌های دوگانه متوسل‌شویم؛ ولی درحالت کلی، وقتی‌که ρ به‌z بستگی داشته باشد، ناچاریم از انتگرال سه‌گانه استفاده‌کنیم.

۵۹۹. مثال‌ها. ۱) فرض می‌کنیم، شکل (P)، ذوزنقهٔ منحنی‌الخطی محدود به منحنی $y=f(x)$، قطعه‌ای از محور x و عرض‌های $x=a$ و $x=b$ باشد؛ ضمناً فرض می‌کنیم چگالی جرم توزیع شده نسبت به‌این‌شکل، برابرواحد باشد. مطلوب است‌محاسبهٔ گشتاورهای ستاتیك M_x و M_y.

اگر دردستورهای (۱۲)، به‌سمت انتگرال‌های تکراری عبورکنیم، خواهیم‌داشت:

$$M_x=\iint\limits_{(P)} y\,dP=\int_a^b dx\int_0^{f(x)} y\,dy=\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

$$M_y=\iint\limits_{(P)} x\,dP=\int_a^b x\,dx\int_0^{f(x)} dy=\int_a^b xf(x)\,dx$$

ویا به‌صورتی کوتاه‌تر

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx,\qquad M_y=\int_a^b xy\,dx$$

همان‌طورکه می‌بینیم، همان عبارت‌هایی را برای گشتاورهای ستاتیك به‌دست می‌آوریم که قبلا [در ۳۵۱] داشتیم.

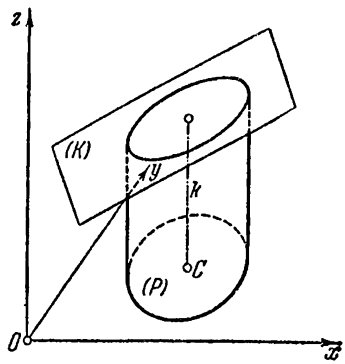
از خواننده می‌خواهیم، همین‌نتیجه را درمورد گشتاورهای مانند I_x و I_y هم‌دوباره به دست‌آورد.

۲) میلهٔ استوانه‌ای (V)، در قاعدهٔ پایین به‌شکل مسطح (P) و در بالا به صفحهٔ دلخواه (K) محدود است. ثابت‌کنید، حجم V جسم، برابر است با حاصل‌ضرب‌مساحت P قاعده، در طول k، پاره خطی‌که برقاعده عمود است، از گرانیگاه جسم می‌گذرد و به قاعده وصفحهٔ (K) محدود می‌شود.

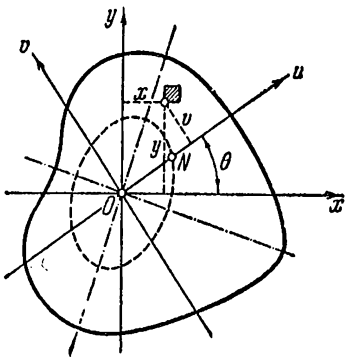
اگر محورها، به ترتیب معمول باشند (شکل۴۹) ومعادلهٔ صفحهٔ (K) را به‌صورت

$$z=ax+by+c$$

بگیریم، درآن صورت، بنا به‌دستور (*۲) شمارهٔ ۵۸۶



شکل ۴۹



شکل ۵۰

$$V=\int\limits_{(P)}\int (ax+by+c)dP=a\int\limits_{(P)}\int xdP+b\int\limits_{(P)}\int ydP+c\int\limits_{(P)}\int dP=$$

$$=(a\xi+b\eta+c)P=Pk$$

۳) ثابت کنید، اگر درصفحهٔ شکل (P)، دو محور موازی x و x' به‌فاصله h از یکدیگر انتخاب شوند و، ضمناً، محور اول از گرانیگاه شکل بگذرد، آن وقت، گشتاور ماند شکل نسبت به‌این محورها، با رابطهٔ

$$I_{x'}=I_x+h^2m$$

به هم مربوط‌اند (m، جرم شکل است).

اگر محور x را به‌عنوان محور طول انتخاب کنیم، داریم:

$$I_{x'}=\int\limits_{(P)}\int (y-h)^2\rho dP=I_x-2hM_x+h^2m$$

که چون بنا برفرض: $M_x=0$، به برابری مطلوب می‌رسیم.

۴) گشتاور ماند قطبی نقطهٔ مادی، عبارت است از حاصل‌ضرب جرم نقطه در مجذور فاصلهٔ تا قطب. به سادگی می‌توان فهمیدکه منظور از گشتاور ماند قطبی یك شکل مسطحه چیست.

اگر قطب را در مبداء مختصات O قراردهیم، ثابت کنیدکه برای گشتاور قطبی آن داریم:

$$I_O = I_x + I_y$$

۵) شکل غیرمشخص (P) را در صفحهٔ xy درنظر می‌گیریم. گشتاور ماند این شکل را نسبت به محور دلخواه Ou، درحالت کلی پیدا کنید، به شرطی که Ou با محور Ox، زاویه‌ای برابر θ بسازد (شکل ۵۰).

اگر محور Ou ومحور عمود بر آن Ov را به‌عنوان محورهای مختصات جدید انتخاب کنیم، روشن است که مختصات جدید u و v، برحسب مختصات قدیم x و y، این طور بیان می‌شوند:

$$u = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad y = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

بنابراین

$$I_u = \iint_{(P)} v^2 \rho dP = \cos^2\theta \cdot \iint_{(P)} y^2 \rho dP - 2\sin\theta\cos\theta \cdot \iint_{(P)} xy\rho dP +$$

$$+ \sin^2\theta \cdot \iint_{(P)} x^2 \rho dP$$

همان‌طور که می‌بینیم، ضریب‌های $\cos^2\theta$ و $\sin^2\theta$ عبارتند از گشتاورهای ماند I_x و I_y نسبت به محورهای مختصات؛ ولی در این‌جا، علاوه بر آن‌ها، به مقدار

$$K_{xy} = \iint_{(P)} xy\rho dP$$

هم برخورد می‌کنیم، که آن را، گشتاور گریز از مرکز [مسأله ۷) را، در پایین، ببینید] یا حاصل‌ضرب ماندها می‌نامند؛ بنابراین

$$I_u = I_x\cos^2\theta - 2K_{xy}\sin\theta\cos\theta + I_y\sin^2\theta \qquad (۱۷)$$

برای توضیح عینی تغییر گشتاور ماند، ضمن دوران محور Ou، به‌این ترتیب عمل می‌کنند. پاره خط

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I_u}}$$

را برمحور Ou جدا می‌کنیم (شکل ۵۰) ومکان هندسی نقطهٔ N را، که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، درنظر می‌گیریم. اگر مختصات نقطهٔ N را x و y بنامیم، داریم:

$$x=ON\cos\theta=\frac{\cos\theta}{\sqrt{I_u}},\qquad y=ON\sin\theta=\frac{\sin\theta}{\sqrt{I_u}}$$

اگر دوطرف رابطهٔ (۱۷) را بر I_u تقسیم کنیم، معادلهٔ مکان هندسی N به‌دست می‌آید:

$$I_x x^2-2K_{xy}xy+I_y y^2=1 \qquad (18)$$

اگر نابرابری بونیاکووسکی را، درحالت انتگرال دوگانه، به‌کار بریم، به‌سادگی دیده می‌شود که

$$I_xI_y-K_{xy}>0$$

به نحوی که منحنی (۱۸)، یك بیضی‌است، که آن را بیضی ماند گویند.

درحالتی که داشته باشیم: $K_{xy}=0$، معادلهٔ (۱۸) به‌صورت

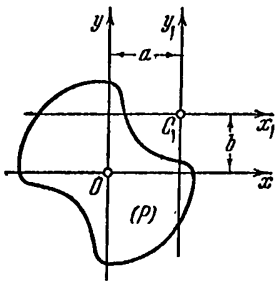
$$I_x x^2+I_y y^2=1$$

در می‌آید و محورهای بیضی‌ماند (محورهای اصلی ماند) منطبق بر محورهای مختصات می‌شوند.

۶) برای گشتاور گریز از مرکز K_{xy}، ثابت کنید:

a) اگر یکی از محورها، ومثلا محور y، محور تقارن برای خودشکل (P) و برای جرم توزیع‌شده بر آن، باشد*، درآن‌صورت داریم: $K_{xy}=0$.

b) اگر مبداء مختصات در گرانیگاه شکل باشد ومحورهای Ox_1 و Oy_1، ازنقطه $O_1(a,b)$، موازی محورهای قبلی‌رسم شوند (شکل ۵۱)، آن وقت



شکل ۵۱

$$K_{x_1y_1}=K_{xy}+ab\cdot P$$

و به خصوص، درحالتی که $K_{xy}=0$ باشد، دستور فوق به‌صورت سادهٔ زیردر می‌آید:

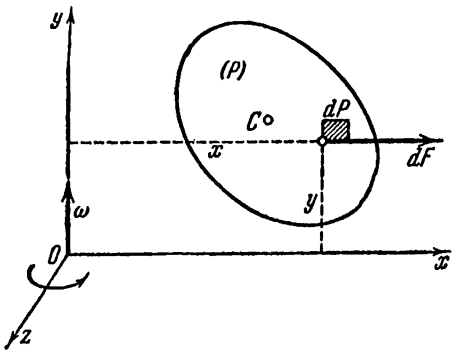
$$K_{x_1y_1}=ab\cdot P \qquad (19)$$

۷) فرض کنیم، شکل مستوی (P) (شکل ۵۲)، که درروی آن، جرم به‌طور پیوسته‌ای

---

*) به نحوی که $\rho(-x,y)=\rho(x,y)$.

پخش شده است، با سرعت زاویه‌ای ω دورمحور y دوران کند. مقدار کلی نیروی گریز از مرکز، و گشتاور آن نسبت به محور z را تعیین کنید*.



شکل ۵۲

نیروی گریز ازمرکز، برای جزء ρdP، برابر است با

$$dF=\omega^2 x\rho dP$$

(به ازای $x>0$ متوجه به‌یك طرف و به ازای $x<0$، متوجه به‌طرف دیگر)؛ وگشتاور آن نسبت به z، چنین می‌شود:

$$d\mathrm{M}=\omega^2 xy\rho dP$$

ازآن‌جا، با جمع‌کردن

$$F=\omega^2\int\limits_{(P)}\int x\rho dP=\omega^2\mathrm{M}_y,$$

$$\mathrm{M}=\omega^2\int\limits_{(P)}\int xy\rho dP=\omega^2 K_{xy}$$

به‌این ترتیب، به‌ازای $\omega=1$، مقدار K_{xy} عبارت است ازگشتاور نیروی گریز ازمرکز. دلیل نام‌گذاری «گشتاورگریز از مرکز» هم، از همین‌جاست.

برای‌آن‌که، عمل نیروی گریز از مرکز برمحور دوران، برابر صفر باشد، لازم و کافی است‌که برابری‌های زیر برقرار باشند:

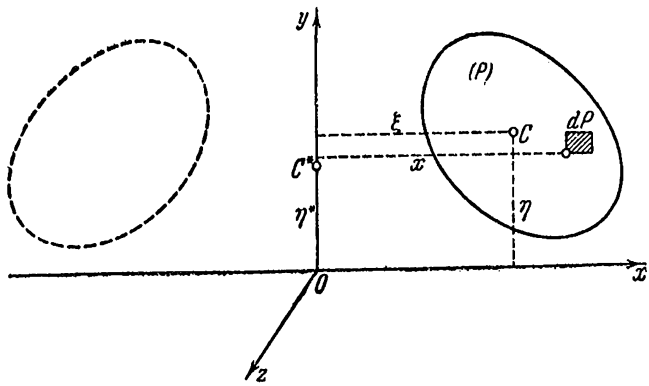
$$M_y=0,\quad K_{xy}=0$$

اولی به‌این معناست‌که، گرانیگاه شکل، برمحور y قرار دارد و برابری دوم به معنای‌آن است‌که، این محور، محور اصلی ماند است. به‌این ترتیب، نیروی‌گریز از مرکز، تنها با این شرط‌که محور دوران یکی‌از محورهای اصلی مرکزی اینرسی شکل باشد، هیچ اثری بر محور دوران نخواهد داشت.

۸) جسمی را در نظر می‌گیریم‌که از دوران شکل مستوی (P) (شکل ۵۳)، دور

---

*) گشتاورها، نسبت به‌سایر محورها، به‌روشنی برابرصفرند.



شکل ۵۳

محور y به دست آید؛ شکل (P) با محور y متقاطع نیست. مطلوب است تعیین حجم V و موضع گرانیگاه آن C^*.

حل. ابتدا حلقهٔ جزئی را در نظر می‌گیریم که به وسیلهٔ جزء dP از شکل پیموده می‌شود؛ حجم آن را می‌توان برابر حجم استوانه‌ای گرفت که ارتفاع آن برابر $2\pi x$ و قاعدهٔ آن برابر dP باشد، یعنی

$$dV = 2\pi x \cdot dP$$

$$V = 2\pi \int_{(P)} \int x dP = 2\pi M_y = 2\pi \xi \cdot P$$

که در آن، M_y، گشتاور ستاتیك شکل نسبت به‌محور y و ξ، فاصلهٔ گرانیگاه تا این محور است. به‌این ترتیب دوباره به قضیهٔ گولدن [۳۵۱] می‌رسیم، منتهی این بار برای شکلی که به دوره‌ای دلخواه محدود شده است.

گشتاور ستاتیك همین حلقهٔ جزئی، نسبت به‌صفحهٔ xz، برابراست با

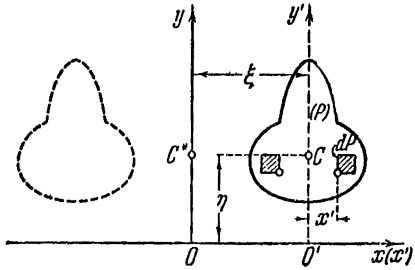
$$d\mathrm{M} = y dV = 2\pi x y dP$$

به‌نحوی که

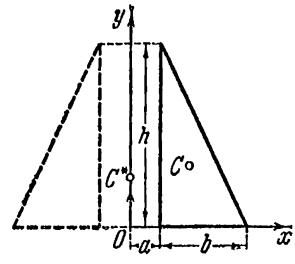
$$\mathrm{M} = 2\pi \int_{(P)} \int xy \cdot dP = 2\pi K_{xy}$$

درنتیجه، مختص $y = \eta^*$ از گرانیگاه C^* چنین است:

$$\eta^* = \frac{\mathrm{M}}{V} = \frac{K_{xy}}{M_y} \qquad (۲۰)$$



شکل ۵۵



شکل ۵۴

۹) این دستور را برای حالتی به‌کار برید که، شکل (P)، یك مثلث قائم‌الزاویه باشد (شکل ۵۴).

با توجه به نام‌گذاری‌های شکل، داریم:

$$M_y=\frac{bh}{۲}\left(a+\frac{۱}{۳}b\right)=\frac{bh(۳a+b)}{۶}$$

(زیرا، جای گرانیگاه مثلث معلوم است). با توجه به معادلهٔ ضلع مایل مثلث، یعنی

$$y=\frac{h}{b}(a+b-x)$$

به‌دست می‌آید:

$$K_{xy}=\frac{bh^{۲}(۴a+b)}{۲۴}$$

واز آن‌جا، با توجه به (۲۰)، خواهیم داشت:

$$\eta^*=\frac{h}{۴}\cdot\frac{۴a+b}{۳a+b}$$

همان طور که می‌بینیم، این مختص، بامختص $\eta=\frac{h}{۳}$ گرانیگاه خودمثلث، فرق دارد.

۱۰) ثابت کنید، اگر شکل دوار دارای محور تقارنی موازی محور دوران باشد (شکل ۵۵)، داریم:

$$\eta^*=\eta$$

یعنی گرانیگاه جسم و گرانیگاه شکل مستوی، دریك ارتفاع قرار دارند.

راهنمائی. این حکم، از (۲۰) و (۱۹)، با به‌حساب آوردن $K_{xy}=۰$، به دست می‌آید [(۶)، a) را ببینید].

۱۱) ثابت کنید که، با همان فرض‌ها، گشتاور ماند I درجسم حاصل از دوران شکل، نسبت به محور دوران، با این دستور بیان می‌شود:

$$I=2\pi\xi(\xi^2P+3I_{y'})$$

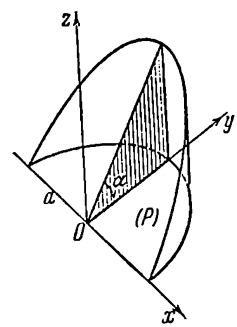
۱۲) دستورهای (۱۵) و (۱۵a) را درمورد حالت خاص زیر به‌کار ببرید: میله‌ای را در نظر بگیرید که قاعدهٔ آن، مستطیل $[0\le a;\ 0\le b]$ وازبالا به سهمی‌وار بیضی‌وار زیر محدود باشد:

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$$

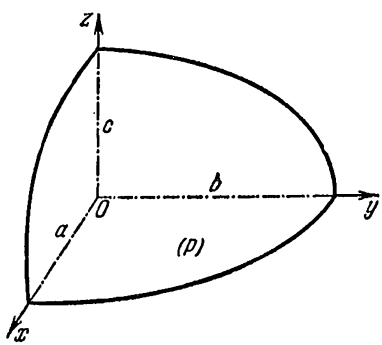
پاسخ. $\xi=\frac{3a^2q+2b^2p}{a^2q+b^2p}\cdot\frac{a}{4}$، $\eta=\frac{2a^2q+3b^2p}{a^2q+b^2p}\cdot\frac{b}{4}$،

$$\zeta=\frac{9a^4q^2+10a^2b^2pq+9b^4p^2}{a^2q+b^2p}\cdot\frac{1}{60pq}.$$

۱۳) مطلوب است گرانیگاه قطعه‌ای استوانه‌ای [۳۳۴، ۸)؛ شکل ۵۶].



شکل ۵۶



شکل ۵۷

حل. با توجه به نام‌گذاری‌های روی شکل، معادلهٔ صفحهٔ قاطع عبارت است از $z=ky$، که در آن $k=tg\alpha$. در این‌جا، نقش (P) به عهدهٔ نیم‌دایرهٔ به شعاع a است؛ معادلهٔ این نیم‌دایره عبارت است از $x^2+y^2=a^2$. داریم:

$$M_{zx}=\iint\limits_{(P)}yzdP=k\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}y^2dxdy=$$

$$=\frac{2k}{3}\int_0^a(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{\pi}{8}ka^4,$$

$$M_{yz}=0, \quad M_{xy}=\frac{1}{2}\iint_{(P)} z^2 dP=\frac{k}{2}\iint_{(P)} yz dP=\frac{\pi}{16}k^2a^4$$

از آن‌جا که برای حجم داریم:

$$V=\frac{2}{3}ka^3$$

بنا بر این

$$\xi=0, \quad \eta=\frac{3}{16}\pi a, \quad \zeta=\frac{3}{32}\pi ka$$

۱۴) همین مسأله را، برای بخشی از بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$$

که در یك هشتم اول دستگاه مختصات قرار داد، حل کنید (شکل ۵۷).

حل. حوزهٔ (P) محدود است به محورهای مختصات و بیضی

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$(0\leqslant x\leqslant a)$؛ معادلهٔ سطح بیضوی، به صورت صریح، چنین است:

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

با توجه به دستور (۱۵) داریم:

$$M_{xy}=\frac{1}{2}c^2\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=$$

$$=\frac{bc^2}{3a^3}\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{\pi}{16}abc^2$$

و به همین ترتیب

$$M_{yz}=\frac{\pi}{16}a^2bc, \quad M_{zx}=\frac{\pi}{16}ab^2c$$

درضمن، برای حجم داریم:

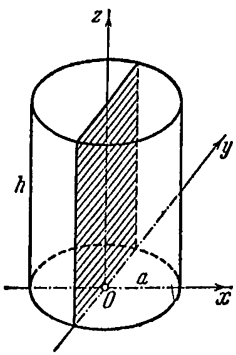
$$V=\frac{\pi}{۶}abc$$

به نحوی که

$$\xi=\frac{۳}{۸}a,\quad \eta=\frac{۳}{۸}b,\quad \zeta=\frac{۳}{۸}c$$

۱۵) برای استوانهٔ دوار به‌ارتفاع h و شعاع a، مطلوب است محاسبهٔ گشتاور ماند نسبت به صفحهٔ دلخواهی که از محور آن می‌گذرد (شکل ۵۸).

حل. محورهای مختصات را، آن طور که در شکل ۵۸ می‌بینید، انتخاب می‌کنیم. از روی دستور (۱۶) داریم:



شکل ۵۸

$$I_{xz}=\iint\limits_{(P)} y^۲z\,dP=h\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^۲-x^۲}}^{\sqrt{a^۲-x^۲}}y^۲dy=$$

$$=\frac{۴}{۳}h\int_{۰}^{a}(a^۲-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}dx=\frac{\pi}{۴}ha^۴$$

۱۶) مطلوب است گشتاور ماند I_z، برای بیضوی

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}\leqslant ۱$$

حل. می‌توان به‌یك هشتم بیضوی (شکل ۵۷) اکتفا کرد و، سپس، نتیجه را در ۸ ضرب کرد. در این‌حالت، حوزهٔ (P) عبارت است از ربع بیضی

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}\leqslant ۱$$

داریم:

$$I_{zx}=۸\iint\limits_{(P)} y^۲z\,dP=\frac{۸c}{a}\int_{۰}^{b}y^۲dy\int_{۰}^{a\sqrt{۱-\frac{y^۲}{b^۲}}}\sqrt{a^۲(۱-\frac{y^۲}{b^۲})-x^۲}\,dx=$$

$$=۲\pi ac\int_{۰}^{b}y^۲(۱-\frac{y^۲}{b^۲})dy=\frac{۴}{۱۵}\pi ab^۳c$$

و به همین ترتیب

$$I_{yz}=\frac{۴}{۱۵}\pi a^{۳}bc$$

و بالاخره

$$I_z=I_{zx}+I_{yz}=\frac{۴}{۱۵}\pi abc(a^{۲}+b^{۲})$$

§۳. دستور گرین

۶۰۰. به دست‌آوردن دستور گرین. در این شماره، به دستوری می‌پردازیم که انتگرال دوگانه را به انتگرال روی منحنی پیوند می‌دهد.

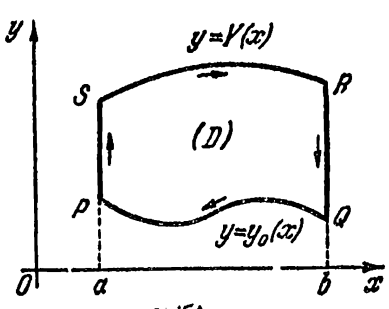
حوزهٔ (D) را ذوزنقهٔ منحنی‌الخطی می‌گیریم (شکل ۵۹) که به دورهٔ (L) شامل منحنی‌های

$$(PQ):\quad y=y_{۰}(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

و

$$(RS):\quad y=Y(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

و دوپاره خط PS و QR، موازی محور y، محدود شده است.



شکل ۵۹

فرض می‌کنیم، تابع $P(x, y)$، در حوزهٔ (D) داده شده باشد که همراه با مشتق خود $\frac{\partial P}{\partial y}$ پیوسته است.

اکنون انتگرال دوگانهٔ

$$\int\int_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

را، از روی دستور (۶) شمارهٔ **۵۹۶** محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\int\int_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_{a}^{b}dx\int_{y_{۰}(x)}^{Y(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy$$

انتگرال درونی، به‌سادگی و به‌کمك تابع اولیهٔ $P(x, y)$ محاسبه می‌شود:

$$\int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, y)\Big|_{y=y_0(x)}^{y=Y(x)} = P(x, Y(x)) - P(x, y_0(x))$$

بنابراین

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b P(x, Y(x)) dx - \int_a^b P(x, y_0(x)) dx$$

هرکدام از این دو انتگرال را می‌توان با انتگرال روی منحنی عوض کرد. در واقع، با توجه به دستور (۷) شمارهٔ ۵۴۷، می‌بینیم که

$$\int_a^b P(x, Y(x)) dx = \int_{(SR)} P(x, y) dx,$$

$$\int_a^b P(x, y_0(x)) dx = \int_{(PQ)} P(x, y) dx$$

ودر نتیجه

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{(SR)} P(x, y) dx - \int_{(PQ)} P(x, y) dx =$$

$$\int_{(SR)} P(x, y) dx + \int_{(QP)} P(x, y) dx$$

اگر بخواهیم تمامی دورهٔ (L) از حوزهٔ (D) را، در بررسی انتگرال، واردکنیم، می‌توانیم انتگرال‌های

$$\int_{(PS)} P(x, y) dx \quad \text{و} \quad \int_{(RQ)} P(x, y) dx$$

را ــ که به روشنی برابر صفرند ــ به سمت راست اضافه‌کنیم. دو انتگرال اخیر، به این جهت برابرصفرندکه پاره خطهای (PS) و (RQ) برمحور x عمودند [۵۴۷ را ببینید]. حاصل می‌شود:

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{(PS)} P dx + \int_{(SR)} P dx + \int_{(RQ)} P dx + \int_{(QP)} P dx$$

سمت راست این برابری، عبارت است از انتگرال برروی تمامی دورهٔ بستهٔ (L) که حوزهٔ (D) را محدود می‌کند، منتهی در جهت منفی. با توجه به آن چه که دربارهٔ انتگرال‌های منحنی‌الخط بر روی دورهٔ بسته می‌دانیم [۵۴۸،] سرانجام می‌توانیم دستور حاصل را به‌این ترتیب بنویسیم:

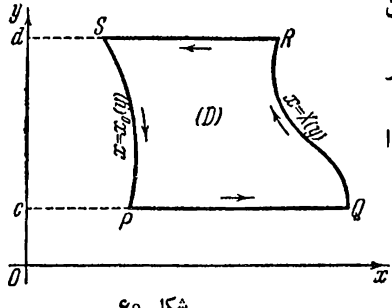
$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int_{(L)} P(x, y) dx dy \qquad (۱)$$

با وجودی‌که در این دستور، فرض‌را براین گرفته‌ایم‌که جهت محور به‌طرف راست‌باشد، ولی به سادگی می‌توان متوجه شدکه، درحالت جهت سمت چپ هم، همین دستور درست است (تنها جهت مثبت را درروی دوره، عوض می‌کنیم).

دستور، برای موردهای بغرنج‌تر حوزه‌هم درست است: کافی است حوزهٔ (D) را، به‌وسیلهٔ خطهای راست موازی محور y، به تعداد محدودی ذوزنقه‌های منحنی‌الخط، تجزیه کنیم. به اثبات این مطلب نمی‌پردازیم، زیراکاملاً شبیه تعمیم دستور مساحت با انتگرال‌های روی منحنی، درشمارهٔ **۵۵۱**، است.

به ترتیب مشابهی، دستور زیرهم به‌دست می‌آید:

$$\iint_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{(L)} Q(x, y) dy \qquad (۲)$$



شکل ۶۰

بااین فرض‌که تابع Q همراه بامشتق نسبی آن $\frac{\partial Q}{\partial x}$ درحوزهٔ (D) پیوسته‌باشد. برای این‌منظور ابتدا، طبق شکل ۶۰، ذوزنقهٔ منحنی‌الخطی را اختیار می‌کنیم‌که به‌منحنی‌های

$$(PS):\ x = x_0(y) \quad (c \leqslant y \leqslant d)$$

و

$$(QR):\ x = X(y) \quad (c \leqslant y \leqslant d)$$

و دو پاره خط (PQ) و (RS) موازی محور x محدود باشد و، سپس، دستور را شبیه حالت قبل برای حوزه‌ای تعمیم می‌دهیم‌که با خطهای راست موازی محور x، به تعداد محدودی ذوزنقه‌های منحنی‌الخط به‌این صورت، تقسیم شده باشد.

بالاخره، اگرحوزهٔ (D) باشرطهای هردو حالت سازگار باشد، یعنی‌هم به‌تعدادی

متناهی از ذوزنقه‌های نوع اول تقسیم شود وهم (بدون ارتباط با آن) به تعداد متناهی از ذوزنقه‌های نوع دوم، آن وقت روشن است که، با فرض پیوسته بودن تابع‌های P و Q و مشتق‌های آن‌ها $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$، هردو دستور (۱) و (۲)، برقرار خواهند بود. اگر دستور (۱) را ازدستور (۲) کم کنیم، به دست می‌آید:

$$\int_{(L)} P\,dx+Q\,dy=\int_{(D)}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy \qquad (۳)$$

واین، همان دستور گرین (G. Green) است*.

دستورهای شمارهٔ **۵۵۱**، که مساحت را به‌کمك انتگرال روی منحنی بیان می‌کردند، به‌عنوان حالت خاصی ازاین دستور به‌دست می‌آیند. مثلا، با فرض $P=-y$ و $Q=0$ وبا استفاده از برابری واضح $\int_{(D)}\int dx\,dy=D$، به‌دستور (۷) شمارهٔ **۵۵۱** می‌رسیم.

شبیه شمارهٔ **۵۵۱**، دراین‌جا هم می‌توان شرط‌هایی‌را عنوان کرد که، به‌ازای آن‌ها، درستی دستور (۳)، به صورت روشن‌تری تأیید شود. مثلا، می‌توان ثابت کرد که، دستور گرین، برای هرحوزهٔ دلخواه (D) که محدود به‌یك یاچند دورهٔ قطعه به‌قطعه هموار باشد، درست است.

فرض کنیم (L) دورهٔ کلی حوزه باشد. باتکرار بحث شمارهٔ **۵۵۱**، خط شکستهٔ (Λ) را (که دارای دو رأس از پیش تثبیت شده است) در (L) محاط می‌کنیم وحوزهٔ چندضلعی (Δ)، محدود به‌آن را، درنظر می‌گیریم. برای سادگی کار، فرض می‌کنیم، تابع P و Q دربیرون حوزهٔ (D) هم ــ مثلا در مستطیل (R) که (D) را در درون خود دارد ــ معین وپیوسته و دارای مشتق‌های پیوستهٔ $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ باشند**. می‌توان این‌طور درنظر گرفت که (D)، در واقع، در (R) است. چون هر حوزهٔ چندضلعی را می‌توان به ذوزنقه‌ها (از هرنوعی که بخواهیم) تبدیل کرد، بنابراین دستور گرین قابل استفاده است:

$$\int_{(\Lambda)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_{(\Lambda)}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy \qquad (۴)$$

---

*) که گاهی هم، آن را به‌نام گوس، یا ریمان می‌خوانند.

**) درعمل، نیازی به این فرض، برای درستی دستور، نیست.

وقتی که بزرگترین ضلع خط‌شکستهٔ (Λ) به سمت صفر میل کند، سمت چپ برابری (۴)، بنابر پیش‌قضیهٔ **۵۵۰** (ویادداشت مربوط به آن)، به‌سمت مقدار سمت چپ برابری (۳) میل می‌کند.

از طرف دیگر، همان‌طور که درشمارهٔ **۵۵۱** دیدیم، خط شکستهٔ (Λ) را می‌توان طوری انتخاب کرد که در بیرون حوزهٔ چندضلعی (A) ودر درون حوزهٔ چند ضلعی (B) ـ به ترتیب، محاط و محیط نسبت به D ـ قرار گیرد، به نحوی که اختلاف مساحت‌های آن‌ها، مقدار کوچکی باشد:

$$B-A<\varepsilon$$

می‌توان (A) و (B) را در مستطیل (R) ـ که قبلا از آن یادکردیم ـ در نظر گرفت. با فرض $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=f$، داریم:

$$\left|\iint\limits_{(D)} f\,dxdy-\iint\limits_{(\Delta)} f\,dxdy\right|=\left|\iint\limits_{(D)-(A)} f\,dxdy-\iint\limits_{(\Delta)-(A)} f\,dxdy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\iint\limits_{(D)-(A)}|f|\,dxdy+\iint\limits_{(\Delta)-(A)}|f|\,dxdy\leqslant 2\iint\limits_{(B)-(A)}|f|\,dxdy<2M\varepsilon$$

که در آن، M عبارت است از بزرگترین مقدار $|f|$ در (R). از این‌جا روشن است که سمت راست برابری (۴) هم، باتوجه به‌عبور به سمت حد، به سمت مقدار طرف راست دستور (۳) میل می‌کند. و به این ترتیب، درست‌بودن دستور ثابت می‌شود.

۶۰۱. کاربرد دستور گرین در بررسی انتگرال‌های روی منحنی. حوزهٔ باز و همبند سادهٔ [**۵۵۹**] را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، تابع‌های P و Q همراه با مشتق‌های $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ خود، دراین حوزه، پیوسته باشند. دوباره این مسأله [**۵۶۱**] را مطرح می‌کنیم:

تابع‌های P و Q چه شرطی داشته باشند تا انتگرال روی منحنی

$$\int\limits_{(L)} P\,dx+Q\,dy \qquad (۵)$$

روی هر دورهٔ ساده وبسته (L) واقع در (G)، برابر صفر شود؟

چون حوزهٔ اصلی (G) را همبند ساده فرض کردیم، بنابراین حوزهٔ (D) هم، که از بیرون به دورهٔ (L) محدود است، به G تعلق دارد، به نحوی که می‌توانیم دستور گرین را

دربارهٔ آن به کار بریم*؛ آن وقت انتگرال روی منحنی (۵)، به انتگرال دوگانهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\iint_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \qquad (۶)$$

و برای این‌که انتگرال دوگانه برابر صفر باشد، کافی‌است فرض کنیم:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (A)$$

لزوم شرط (A) را هم می‌توان، با فرض صفر بودن (۶) ومشتق‌گیری از آن نسبت به حوزه، ثابت کرد [**۵۹۳**]: تابع زیر انتگرال‌هم، به‌عنوان «مشتق» انتگرال (۶)، به‌طور اتحادی برابر صفر می‌شود.

به‌این ترتیب، با در نظرگرفتن پیش‌قضیهٔ شمارهٔ **۵۶۱**، اثبات تازه‌ای برای این حکم به دست می‌آید که: برای صفرشدن انتگرال‌های به‌صورت (۵) نسبت به دورهٔ بستهٔ دلخواه، لازم و کافی است که شرط (A) برقرار باشد، تنها بااین فرض‌که حوزهٔ اصلی G همبند ساده باشد [**۵۶۱**، قضیهٔ ۵]. بنابر قضیهٔ ۴ شمارهٔ **۵۶۱**، باهمان فرض برای‌حوزه، شرط (A) لازم و کافی است تا انتگرال روی منحنی

$$\int_{(AB)}Pdx+Qdy$$

بستگی به مسیر انتگرال‌گیری ـ که دو نقطهٔ A و B را به‌هم وصل می‌کند، نداشته باشد. [**۵۶۰**، قضیهٔ ۳].

دستور گرین، این امکان را به‌وجود آورد که بتوانیم این مطلب را، مستقیماً و بدون توجه به‌انتگرال‌گیری از دیفرانسیل‌های کامل، ثابت کنیم. ضمناً، یکبار دیگر، نقش‌همبندی سادهٔ حوزهٔ اصلی روشن شد.

اکنون دیگرمی‌توان، برعکس، کافی‌بودن شرط (A) را برای انتگرال‌پذیری‌عبارت $Pdx+Qdy$، به‌کمک شمارهٔ **۵۵۶** ثابت کرد (قضیهٔ ۲، شمارهٔ **۵۶۰**). لازم بودن شرط، مستقیماً روشن است.

---

*) دقت خواننده را به‌این نکته جلب می‌کنیم که، دراین‌جا، ازهمبندی سادهٔ حوزهٔ G استفاده کرده‌ایم.

۶۰۲. مثال‌ها و اضافه‌ها. ۱) دستور گرین را، دربارهٔ تابع‌های زیر مورد تحقیق قرار دهید:

$$\text{(a)}\quad P=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\text{(b)}\quad P=\frac{x}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{y}{x^2+y^2}$$

در دایرهٔ به شعاع واحد و مرکز مبداء مختصات.

راهنمائی. در هر دو حالت داریم: $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$، به‌طوری‌که انتگرال دوگانه برابر صفر می‌شود. انتگرال روی منحنی نسبت به دایرهٔ

$$x=\cos t,\quad y=\sin t\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

تنها درحالت (b) برابر صفر و درحالت (a) برابر 2π است.

مسأله دراین است که، دستور گرین، با فرض پیوستگی تابع‌های مفروض ومشتق‌های آن‌ها، قابل استفاده است، درحالی که دراین‌جا، در هردو حالت، این شرط برای مبداء مختصات وجود ندارد. درحالت (a) نمی‌توان از دستور گرین استفاده کرد، ولی جالب است که درحالت (b) قابل استفاده است [با **۵۶۵**، ۱۳) مقایسه کنید].

۲) دستور گرین را به‌صورت

$$\text{(a)}\quad \iint_{(D)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\int_{(L)}Pdy-Qdx,$$

و همچنین

$$\text{(b)}\quad \iint_{(D)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\int_{(L)}\Big[P\cos(x,\nu)+Q\sin(x,\nu)\Big]ds$$

درآورید (که درآن، ν عبارت است ازجهت بیرونی قائم).

راهنمائی. P را به $-Q$ و Q را به P تبدیل کنید؛ برای این که انتگرال روی منحنی نوع دوم را به انتگرال روی منحنی نوع اول تبدیل کنید، از دستور (۱۵) شمارهٔ **۵۵۳** استفاده کنید. به جهت قائم توجه کنید.

۳) به کمك دستور گرین، دستورهای زیررا ثابت کنید:

$$\text{(a)}\quad \iint_{(D)} \Delta u\,dx\,dy = \int_{(L)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds,$$

$$\text{(b)}\quad \iint_{(D)} v\Delta u\,dx\,dy = -\iint_{(D)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy + \int_{(L)} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds,$$

$$\text{(c)}\quad \iint_{(D)} (v\,du - u\,dv)\,dx\,dy = \int_{(L)} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) ds,$$

به شرطی که فرض کنیم:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\quad \frac{\partial f}{\partial \nu} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(x, \nu) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(x, \nu)$$

راهنمائی. (b) از ۲)، (b) به‌دست می‌آید، به شرطی که در آن فرض کنیم:

$$Q = v\frac{\partial u}{\partial y}\quad \text{و}\quad P = v\frac{\partial u}{\partial x};$$

(a) هم حالت خاصی از (b) به‌ازای $v = 1$ است. اگر در (b) نقش u و v را عوض کنیم و نتیجه را از (b) کم کنیم، (c) به‌دست می‌آید.

۴) اگر تابع u همراه با مشتق‌های خود پیوسته باشد ودر حوزهٔ موردنظر (G) در معادلهٔ $\Delta u = 0$ صدق کند، تابع توافقی دراین حوزه نامیده می‌شود.

بافرض این‌که تابع u درحوزهٔ (G) دارای مشتق‌های پیوستهٔ $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial u}{\partial y}$، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ باشد، حکم زیررا ثابت‌کنید: برای این‌که تابع $u = u(x, y)$ توافقی باشد، لازم وکافی است که، برای هر دورهٔ ساده و بستهٔ (L)، شرط زیر برقرار باشد:

$$\int_{(L)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds = 0$$

راهنمائی. از دستور ۳)، (a) استفاده کنید.

۵) اگر تابع $u = u(x, y)$ در حوزهٔ بستهٔ (D) توافقی باشد، درآن صورت، مقدارهای‌آن در درون حوزه، به طور یك ارزشی به وسیلهٔ مقدارهای آن بر دورهٔ (L) معین می‌شوند.

به زبان دیگر، اگر دوتابع توافقی u_1 و u_2 در حوزهٔ (D)، دارای یك مقدار بر دورهٔ (L) حوزه باشند، درآن صورت، در تمامی حوزه باهم متحد می‌شوند.

با واردکردن تفاضل $u=u_1-u_2$ در بررسی، مسأله را به‌اثبات این مطلب منجر می‌کنیم که تابع توافقی در حوزهٔ (D)، وقتی در دورهٔ (L) ازحوزه برابر صفر شود، درتمامی حوزه به‌طور اتحادی برابر صفر می‌شود.

در دستور ۳)، (b) فرض می‌کنیم $v=u$؛ باتوجه به شرط مربوط به u، به دست می‌آید:

$$\iint_{(D)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=0$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شودکه در تمامی حوزهٔ (D) داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

یعنی u به مقداری ثابت منجر می‌شود و، با صفرشدن روی (L)، در همه‌جا برابر صفر می‌شود.

۶) اگر u تابعی توافقی درحوزهٔ (G)، (x_0, y_0) نقطه‌ای درونی ازاین حوزه و (K_R) دایره‌ای به شعاع R و مرکز (x_0, y_0) باشد*، آن وقت، دستور مهم زیر برقرار است:

$$u(x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_{(K_R)}u(x, y)ds \qquad (۷)$$

به نحوی که مقدار تابع توافقی در مرکز، برابر است با «میانگین» مقدارهای آن در محیط دایره.

فرض کنیم $v=\ln r$، که در آن: $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. به‌سادگی تحقیق می‌شودکه، اگر نقطهٔ (x_0, y_0) را استثنا کنیم، v درحوزهٔ حاصل ازصفحه، یك تابع توافقی است. در نقطهٔ (x_0, y_0)، تابع برابر بی‌نهایت می‌شود.

نقطهٔ (x_0, y_0) را با دایرهٔ k_ρ به شعاع ρ $(\rho<R)$ احاطه می‌کنیم و دستور ۳)، (b) را درمورد حوزهٔ (D) بین دایره‌های (K_R) و (k_ρ) به‌کار می‌بریم. دورهٔ (L) شامل (K_R) و (k_ρ) هردوست. چون دراین حوزه، هردو تابع u و v توافقی هستند، بنابراین سمت چپ برابر صفر می‌شود. در سمت راست، انتگرال

---

*) شعاع R آن قدر کوچك فرض می‌شود تا دایرهٔ (K_R)، به‌طورکامل در حوزهٔ (G) واقع شود.

$$\int_{(L)} v\frac{\partial u}{\partial \nu}ds$$

از بین می‌رود، زیرا، مثلا، بردایرهٔ (K_R) داریم: $v=\ln R=\text{const}$. و [با توجه به ۴۸)]

$$\int_{(K_R)} \frac{\partial u}{\partial \nu}ds=0$$

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}=\frac{d\ln r}{dr}\Big|_{r=R}=\frac{1}{R} \qquad \left((K_R)\ \text{روی}\right)$$

و

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}=-\frac{d\ln r}{dr}\Big|_{r=\rho}=-\frac{1}{\rho} \qquad \left((k_\rho)\ \text{روی}\right)$$

به نحوی که، سرانجام، به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\rho}\int_{(k_\rho)} uds=\frac{1}{R}\int_{(K_R)} uds$$

اگر ρ را به‌قدر کافی کوچك بگیریم، مقدار تابع u بر دایرهٔ (k_ρ)، از مقدار $u(x_0, y_0)$ درمرکز اختلافی به‌قدر دلخواه کوچك خواهد داشت، به‌طوری که‌وقتی $\rho\to 0$، سمت چپ دارای حد $2\pi\cdot u(x_0, y_0)$ می‌شود و، درنتیجه، باعبور به‌سمت حد، برابری مطلوب به‌دست می‌آید.

۷) از آن چه که در ۶) ثابت کردیم، نتیجهٔ جالبی به‌دست می‌آید: اگرتابع $u(x, y)$ در حوزهٔ بستهٔ (D) محدود به دورهٔ (L) پیوسته، و در درون حوزه توافقی باشد، در آن صورت تابع نمی‌تواند به بزرگترین (کوچکترین) مقدار خود در درون حوزه برسد، به استثنای حالتی که به مقدار ثابت تبدیل شود.

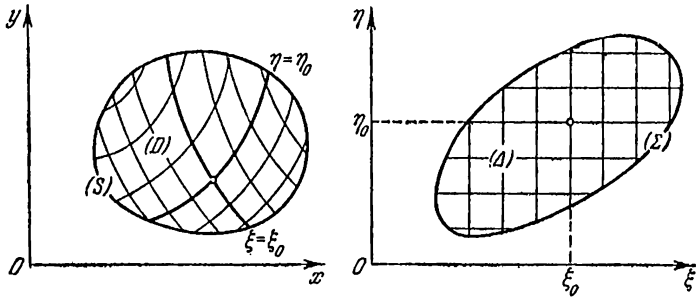
در واقع، اگرتابع مفروض $u(x, y)$، به شرطی که به مقدار ثابتی تبدیل نشود، مثلا درنقطهٔ درونی (x_0, y_0) به بزرگترین مقدار خود برسد، در آن صورت به سادگی با دستور (۷) ناسازگار می‌شود.

اکنون می‌توانیم نتیجه‌ای راکه در ۵) به‌دست آوردیم با این‌فرض تقویت کنیم که تابع u درحوزهٔ (D) پیوسته و تنها در درون حوزه توافقی باشد. دراین‌جا هم، کافی‌است ثابت کنیم که، اگرتابع u در روی دوره برابرصفر باشد، به‌طور اتحادی برابرصفرخواهد

شد، و این نتیجه هم از آن‌جا به‌دست می‌آید که، درغیر این‌صورت، باید به بزرگترین یا کوچکترین مقدار خود در درون حوزه برسد، که با توضیح قبلی متناقض است.

§۴. تغییرمتغیر در انتگرال دوگانه

۶۰۳. تبدیل حوزه‌های مستوی. دو صفحه را درنظر می‌گیریم که در یکی محورهای قائم x و y و در دیگری، محورهای قائم ξ و η وجود داشته باشند. دو حوزهٔ بستهٔ (D) و (Δ) را، به ترتیب، درصفحه‌های xy و $\xi\eta$ فرض می‌کنیم. هریك ازاین‌حوزه‌ها، ممکن است نامحدود باشد و، به خصوص، می‌تواند تمامی صفحه را اشغال کند. دورهٔ مرز حوزه را (اگر حوزه، تمامی صفحه را نگرفته باشد)، ساده و قطعه به قطعه هموار می‌گیریم و آن را برای حوزهٔ (D) بانماد (S) و برای حوزهٔ (Δ) بانماد $(\sum)$ می‌نمائیم (شکل ۶۱).



شکل ۶۱

فرض کنیم، در حوزهٔ (Δ)، دستگاه تابع‌های پیوستهٔ

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \qquad (۱)$$

داده شده باشد، به نحوی که به‌هر نقطهٔ (ξ, η) ازحوزهٔ (Δ)، نقطهٔ معین (x, y)ازحوزهٔ (D) متناظر باشد؛ ضمناً حتی یکی‌از نقطه‌های (x, y) از $(\dot{D})$، ازقلم نیفتد، به‌طوری که هر نقطه‌ای ازاین‌گونه، دست‌کم، متناظر بایك نقطهٔ (ξ, η) از (Δ) باشد. اگر نقطه‌های مختلف (ξ, η) نظیر نقطه‌های مختلف (x, y) باشند (وما ازقبل، به همین‌گونه فرض می‌کنیم)، به‌نحوی که هرنقطهٔ (x, y)، تنها بایك نقطهٔ (ξ, η) متناظر باشد، درآن‌صورت، دستورهای (۱)، نسبت به ξ و η، به‌طور یك ارزشی‌حل می‌شوند و، ضمناً، متغیرهای ξ و

η هم به‌نوبهٔ خود، تابع‌هایی یك ارزشی از x و y درحوزهٔ (D) می‌شوند:

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,\ y)\\ \eta=\eta(x,\ y)\end{cases} \qquad (1a)$$

به‌این ترتیب، بین حوزه‌های (D) و (Δ)، تناظر یك ارزشی متقابل یا تناظر یك به‌یك برقرار می‌شود. همچنین می‌گویندکه دستورهای (۱) حوزهٔ (Δ) را به حوزهٔ (D)، و دستورهای (1a)، حوزهٔ (D) را به‌حوزهٔ (Δ) تبدیل می‌کنند.

اگر حوزه‌های مفروض، صفحه‌های نظیر را پرکنند، آن وقت، باتبدیل یك صفحه به صفحهٔ دیگر سروکار داریم. بالاخره، اگر دوصفحه برهم منطبق باشند، یعنی نقطه‌های $(x,\ y)$ و$(\xi,\ \eta)$ همچون نقطه‌های یك‌صفحه درنظر گرفته شوند، درآن صورت، باتبدیل یك صفحه به‌خودش سروکار داریم.

ضمناً فرض می‌کنیم که تابع‌های (۱) و (1a)، همراه با مشتق‌های نسبی مرتبهٔ اول خود، پیوسته‌اند. آن وقت، همان‌طورکه معلوم است [شمارهٔ ۲۰۳، (۴)] داریم:

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\cdot\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,\ y)}=1$$

به‌طوری‌که هردو دترمینان، تابعی مخالف صفرند و، بنابرپیوستگی، دارای علامت ثابتی می‌باشند.

ازاین حقیقت‌که دترمینان

$$\frac{D(x,\ y)}{D(\xi,\ \eta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial x}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{vmatrix} \qquad (۲)$$

درحوزهٔ (Δ) مخالف صفراست، نتیجه می‌شودکه نقطهٔ درونی $(\xi_0,\ \eta_0)$، از حوزهٔ (Δ)، طبق دستورهای (۱)، نظیر نقطهٔ $(x_0,\ y_0)$ از حوزهٔ (D) است، زیرا از روی قضیهٔ مربوط به وجود تابع‌های ضمنی [شمارهٔ ۲۰۸]، به وسیلهٔ این دستورها در تمامی همسایگی‌نقطهٔ $(x_0,\ y_0)$، متغیرهای η و ξ همچون تابع‌های یك ارزشی از x و y معین می‌شوند. به‌همین ترتیب، نقطهٔ درونی حوزهٔ (D)، همیشه متناظر نقطهٔ درونی حوزهٔ(Δ) است. همچنین‌روشن است‌که نقطه‌های دورهٔ (Σ) نظیرنقطه‌های دورهٔ (S) و برعکس‌است.

اگر در حوزهٔ (Δ)، منحنی سادهٔ قطعه به قطعه هموار (Λ) را انتخاب‌کنیم، درآن

صورت، به‌کمك تبدیل (۱)، به منحنی مشابه (L) درحوزهٔ (D) تبدیل می‌شود. درواقع، معادله‌های منحنی (Λ) را

$$\xi=\xi(t),\quad \eta=\eta(t) \qquad (۳)$$
$$(\alpha\leqslant t\leqslant\beta \text{ یا } \alpha\geqslant t\geqslant\beta)$$

می‌گیریم که، ضمناً (با اکتفا به پاره منحنی هموار)، می‌توان تابع‌های $\xi(t)$ و $\eta(t)$ را دارای مشتق‌های پیوسته‌ای فرض کرد که، به‌طور هم زمان، برابر صفر نمی‌شوند. اگر این تابع‌ها را در دستورهای (۱) قراردهیم، معادله‌های پارامتری نظیر (L) به‌دست می‌آید:

$$x=x(\xi(t),\eta(t))=x(t),\quad y=y(\xi(t),\eta(t))=y(t) \qquad (۴)$$

به‌سادگی دیده می‌شود که این تابع‌ها هم، دارای مشتق‌های پیوسته‌اند:

$$x'(t)=\frac{\partial x}{\partial\xi}\xi'(t)+\frac{\partial x}{\partial\eta}\eta'(t),\ y'(t)=\frac{\partial y}{\partial\xi}\xi'(t)+\frac{\partial y}{\partial\eta}\eta'(t) \qquad (۵)$$

این مشتق‌ها هم، به‌دلیل آن‌که نقطهٔ خاصی برمنحنی (L) وجود ندارد، نمی‌توانند به طور همزمان برابرصفرشوند. درواقع درغیراین صورت، باتوجه به‌این‌که دترمینان $\dfrac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ مخالف صفر است، از (۵) نتیجه خواهد شد: $\xi'=0$ و $\eta'=0$، که ممکن‌نیست.

اگر نقطه (ξ,η) درصفحهٔ $\xi\eta$، دورهٔ بستهٔ (Λ) را، مثلا، درجهت مثبت بپیماید، درآن صورت، نقطهٔ‌نظیر (x,y)هم، دورهٔ بستهٔ (L) را درصفحهٔ xy خواهد پیمود؛ولی جهت‌آن، می‌تواند مثبت یا منفی‌باشد. این‌مطلب، همان طورکه خواهیم دید [۶۰۶،۱°]، به‌علامت ژاکوبین (۲) بستگی دارد.

مفروض‌بودن دو مقدار متغیر ξ و η ازحوزهٔ (Δ)، نقطه‌ای از حوزهٔ (D) واقع بر صفحهٔ xy را، به‌طور یك ارزشی، معین می‌کند و برعکس؛ و این، مبنای آن است‌که، عددهای ξوη را، مختصات نقطه‌های حوزهٔ (D)بنامیم. درواقع، معادله‌های (۱)*،عبارتند از نمایش پارامتری شکل مستوی (D) وحالت خاصی از نمایش پارامتری سطح هستندکه دربارهٔ‌آن صحبت کرده‌ایم [۲۲۸].

شبیه قبل، دراین‌جا هم، اگر منحنی ازنقطه‌های حوزهٔ (D) تشکیل شده باشد، که درآن یکی‌از مختصات مقدار ثابتی است، آن را منحنی مختصاتی می‌نامند. مثلا، اگردر (۱) فرض‌کنیم $\eta=\eta_0$، به‌نمایش پارامتری منحنی مختصاتی می‌رسیم:

---

*) به‌شرطی‌که معادلهٔ $z=0$ راهم به‌آن‌ها اضافه‌کنیم.

$$x=x(\xi,\eta_0),\quad y=y(\xi,\eta_0)$$

(دراین‌جا، ξ درنقش پارامتراست)؛ و اگر $\eta=\eta_0$ را درمعادلهٔ دوم از معادله‌های (1a) قرار دهیم، به معادلهٔ منحنی این‌منحنی مختصاتی می‌رسیم:

$$\eta(x,y)=\eta_0$$

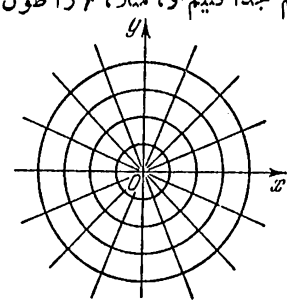
ازآن‌جاکه خط‌های مختصاتی، درحالت کلی، به صورت منحنی هستند، عددهای ξ و η را هم، که معرف وضع نقطه برصفحهٔ xy اند، مثل حالت منحنی واقع برسطح، مختصات منحنی‌الخط نقطه می‌نامند. اگر به η، مقدارهـای ثابت مختلف (وممکن) را نسبت دهیم، خانواده‌ای از منحنی‌های مختصاتی را برصفحهٔ xy به‌دست می‌آوریم. اگـر ξ را ثابت بگیریم، خانوادهٔ دیگری از منحنی‌های مختصاتی حاصل می‌شود. از آن‌جاکه بین حوزه‌های مورد نظر، تناظـر متقابل یك ارزشی وجود دارد، منحنی‌های هرخانواده یکدیگر را قطع نمی‌کنند واز هرنقطهٔ دلخواه حوزهٔ (D)، تنها یکی‌از منحنی‌های هرخـانواده عبور می‌کند.

هرشبکه از منحنی‌های مختصاتـی بر صفحهٔ xy، نمـایشی است از شبکهٔ خط‌های راست $\xi=\text{const.}$ و $\eta=\text{const.}$ برصفحهٔ $\xi\eta$ (شکل ۶۱).

۶۰۴. مثال‌ها. ۱) به‌عنوان نمونهٔ ساده ومهمی از مختصات منحنی‌الخط، می‌توان از مختصات قطبی r و θ نام برد، که تعبیرهندسی روشنی همچون شعاع حامل‌قطبی وزاویهٔ قطبی‌هستند ومی‌توان آن‌ها را، به‌کمك رابطه‌های معلوم هم، نشان داد:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad (r\geqslant 0)$$

اگر مقدارهای r و θ را، روی دومحور عمود برهم جداکنیم و، مثلا، r را طول و θ را عرض به‌حساب آوریم، آن وقت، هرنقطه از نیم صفحهٔ $r\geqslant 0$، به‌کمك دستورهای مفروض، با نقطهٔ معینی ازصفحهٔ xy متناظر می‌شود.



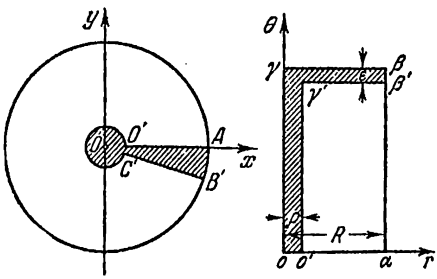
شکل ۶۲

بدون تردید، خواننده با چنین منحنی‌هـای مختصاتی‌سروکارداشته‌است: خط‌های $r=\text{const.}$ نظیر دایره‌های به‌شعاع r و مرکز مبداء مختصات و خط‌های $\theta=\text{const.}$، نظیر شعاع‌هـایی است که، تحت زاویهٔ θ بامحور x، از مبداء می‌گذرند (شکل ۶۲).

ولی دراین حالت، دستورهای تبدیل به‌طور یك ارزشی حل نمی‌شوند: تغییرمقدار زاویهٔ θ به اندازهٔ $2k\pi$ (k، عددی درست است)، تأثیری در مقدارهـای x و y ندارد. برای آن‌که همهٔ مقدارهای صفحهٔ xy را به‌دست آوریم، کافی است به‌مقدارهای

$$0 \leqslant \theta < 2\pi,\quad r \geqslant 0$$

اکتفا کنیم. هر نقطهٔ (x, y)، غیراز مبداء، نظیر یك مقدار $r > 0$ و یك مقدار θ از حوزهٔ مفروض است. ولـی دشواری مربـوط به یك ارزشی نبودن مبداء مختصات را نمی‌توان برطرف کرد: نقطهٔ $x = y = 0$، باهر محور θ الصفحهٔ $r\theta$ (ویا پاره‌ای ازآن، از $\theta = 0$ تا $\theta = 2\pi$) متناظراست.



شکل ۶۳

مستطیل بستهٔ $[0, R; 0, 2\pi]$ یا $O\alpha\beta\gamma$ را (شکل۶۳) برصفحهٔ $r\theta$ درنظرمی گیریم؛ به سادگی دیده می‌شود کـه، نظیر آن در صفحهٔ xy، دایرهٔ بسته‌ای است به مرکز O و شعاع $R = OA$. ولـی تمامی دورهٔ این دایره، تنها با یك طرف $\alpha\beta$ ازمستطیل‌مفروض متناظر است؛ طرف‌های $O\alpha$ و $\beta\gamma$، هر دو، متناظر با شعاع OA هستند؛ و بالاخره، تمامی طرف $O\gamma$ متناظراست با نقطهٔ O. دیده می‌شودکه شرط‌های شمارهٔ پیش، دراین‌جا رعایت نشده‌اند.

ولی اگرطرف $O\gamma$ را به اندازهٔ مقدارکـوچك $\rho = oo'$ و طرف $\gamma\beta$ را به اندازهٔ مقدار کوچك $\varepsilon = \beta\beta'$ حرکت دهیم، آن وقت، مستطیل جدید $o'\alpha\beta'\gamma'$ از صفحـهٔ xy، با شکل $O'AB'C'$ (که با درآوردن دایرهٔ‌کوچك به‌شعاع ρ وقطاع با زاویهٔ مرکـزی ε حاصل شده است)، متناظر خـواهد بود. وقتی کـه نقطه بر صفحهٔ $r\theta$ روی پاره خط‌های $\alpha\beta'$، $\beta'\gamma'$، $\gamma'o'$ و $o'\alpha$ تغییرمکان دهد، نقطهٔ متناظرآن در صفحهٔ xy، به ترتیب، دایرهٔ ناقص AB' (به‌شعاع R)، پاره خط $B'C'$، دایرهٔ ناقص $C'O'$ (به شعاع ρ) وپاره خط $O'A$ را خواهد پیمود. ضمناً توجـه کنیم‌که دورانی مثبت بر صفحهٔ $r\theta$، متناظر است با دورانی مثبت برصفحهٔ xy.

دراین حالت، ژاکوبین برابر است با

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

که، اگر مبداء را استثناکنیم، علامت مثبت را حفظ می‌کند.

۲) تبدیل صفحه به خودش را، با دستورهای زیر درنظر می‌گیریم:

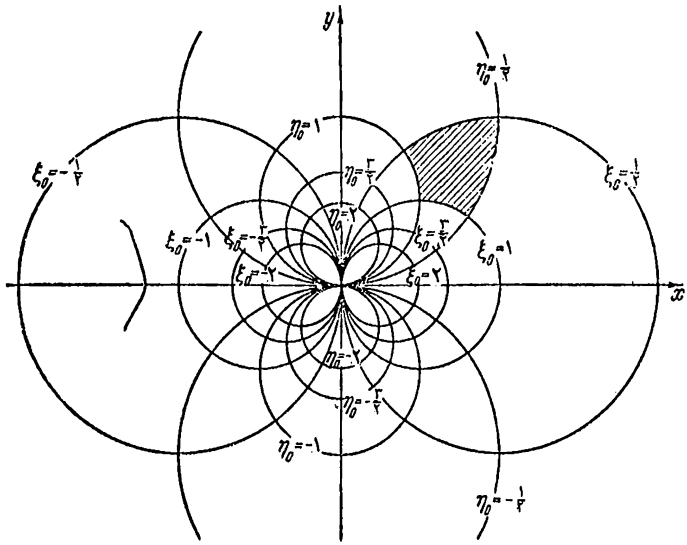
$$x=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2},\quad y=\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

(ξ و η، باهم برابر صفر نیستند).

اگر محورهای x و ξ، y و η را یکی کنیم، در آن صورت، این تبدیل دارای تعبیر هندسی آشکاری است. چون داریم:

$$x^2+y^2=\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\quad و\quad \frac{x}{\xi}=\frac{y}{\eta}$$

بنابراین، روشن است که نقطه‌های متناظر، همیشه بریکی‌از شعاع‌های ازمبداء قراردارند. ضمناً، حاصل‌ضرب فاصله‌های آن‌ها از مبداء برابر واحد است.



شکل ۶۴

این تبدیل، انعکاس نامیده می‌شود. این انعکاس، درجهت عکس‌هم، یك‌ارزشی است:

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \eta=\frac{y}{x^2+y^2}$$

(دراین‌جا هم، x و y، باهم، برابر صفر نیستند).

منحنی‌های مختصاتی، عبارتند از دایره‌هایی که ازمبداء می‌گذرند:

$$x^2+y^2-\frac{1}{\xi_0}x=0, \quad (\xi_0\neq 0) \qquad x^2+y^2-\frac{1}{\eta_0}y=0 \quad (\eta_0\neq 0)$$

که مرکزهای آن‌ها، به ترتیب، بر محورهای x و y قرار دارند (شکل ۶۴). به ازای $\xi_0=0$، محور y $(x=0)$ و به ازای $\eta_0=0$، محور x $(y=0)$ به‌دست می‌آید.

مثلا، مربع $[\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, 1]$ از صفحهٔ $\xi\eta$، متناظر است با حوزهٔ هاشورخورده بر شکل ۶۴. دراین‌جا، جهت‌های دورزدن در دوره‌ها، منطبق برهم نمی‌شوند.

ازآن‌جاکه داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=-\frac{\partial y}{\partial \eta}=\frac{\eta^2-\xi^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta}=\frac{\partial y}{\partial \xi}=-\frac{2\xi\eta}{(\xi^2+\eta^2)^2}$$

بنابراین، ژاکوبین

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}=-\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^2}<0$$

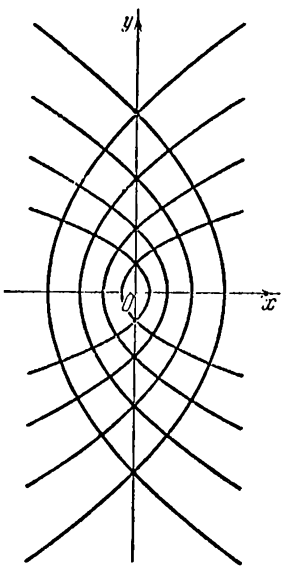
۳) اگر از دستورهای تبدیل

$$x=\xi^2-\eta^2, \quad y=2\xi\eta$$

آغازکنیم، آن وقت، به ازای ξ و η دلخواه، می‌توان x و y را به‌طور یك‌ارزشی به‌دست‌آورد. باحل‌این دستورها، نسبت به ξ و η، به دست می‌آید:

$$\xi=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}, \quad \eta=\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}$$

که در آن‌ها، علامت‌های ξ و η، بستگی به شرط $\xi\eta=\frac{1}{2}y$ دارد. به این‌ترتیب، به هرنقطهٔ (x, y)، به استثنای مبداء، دو نقطهٔ (η, ξ)، که نسبت به مبداء متقارن‌اند، نظیر می‌شود. برای این‌که به یك ارزشی‌بودن برسیم، می‌توان مثلا، به‌بخش بالایی صفحهٔ $\xi\eta$ (با واردکردن بخش مثبت محور ξ وکنار گذاشتن بخش منفی‌آن) اکتفاکرد.



شکل ۶۵

دراین‌جا، منحنی‌های مختصاتی عبارتند از سهمی‌های هم‌کانون (باکانون در مبداء) وهم محور:

$$y^2=4\xi_0^2(\xi_0^2-x) \quad (\xi_0\neq 0) \qquad \text{و} \qquad y^2=4\eta_0^2(x+\eta_0^2) \quad (\eta_0\neq 0)$$

(شکل ۶۵). مقدار $\xi_0=0$ نظیر بخش منفی محور x، ومقدار $\eta_0=0$ نظیر بخش مثبت آن است. ژاکوبین

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}=\begin{vmatrix} 2\xi & -2\eta \\ 2\eta & 2\xi \end{vmatrix}=4(\xi^2+\eta^2)>0$$

به شرطی‌که مبداء را استثنا کنیم.

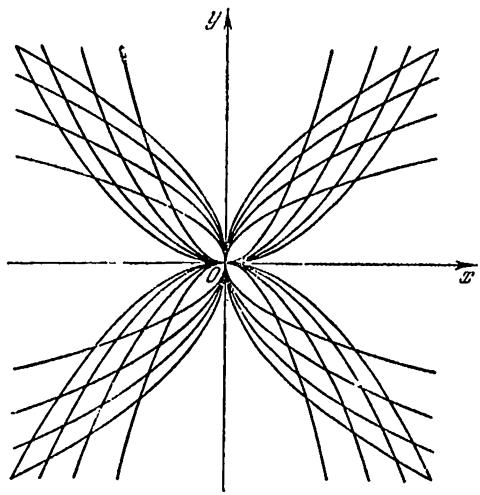
۴) گاهی راحت‌تر است، از قبل، شبکهٔ منحنی‌های مختصاتی داده شود و، از روی آن، دستگاه مختصات منحنی‌الخط را معین کرد.

مثلا، دوخانوادهٔ سهمی‌های (شکل ۶۶)

$$y^2=2px \qquad \text{و} \qquad x^2=2qy$$

را در نظر می‌گیریم که، هرکدام ازآن‌ها به‌طورجداگانه، تمامی صفحهٔ xy را پرمی‌کنند (اگر محورهای مختصات را استثنا کنیم).

طبیعی است که $\xi=2p$ و $\eta=2q$ را، به‌عنوان مختصات منحنی‌الخط واردکنیم. از برابری‌های $y^2=\xi x$ و $x^2=\eta y$ داریم:



شکل ۶۶

$$x=\sqrt[3]{\xi\eta^2},\quad y=\sqrt[3]{\xi^2\eta}\quad\text{و}\quad \xi=\frac{y^2}{x},\ \eta=\frac{x^2}{y}\quad (x,\ y\neq 0)$$

ژاکوبین دراین‌جا برابراست با

$$\frac{D(x,\ y)}{D(\xi,\ \eta)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}\eta^{-\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}\xi^{\frac{1}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}}\\ \frac{2}{3}\xi^{-\frac{1}{3}}\eta^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}\xi^{\frac{2}{3}}\eta^{-\frac{2}{3}}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

۵) از خانوادهٔ مقطع‌های مخروطی هم کانون و هم محور

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-c^2}=1 \qquad (۶)$$

(بیضی‌ها به ازای $\lambda>c$ و هذلولی‌ها به‌ازای $0<\lambda<c$؛ شکل۶۷) آغاز می‌کنیم.

از هرنقطهٔ $(x,\ y)$ صفحه، که بر محورها واقع نباشد، یك بیضی و یك هذلولی‌از این خانواده می‌گذرد. درواقع، سمت چپ معادلهٔ زیر،که از (۶) به‌دست می‌آید:

$$(\lambda^2)^2-\lambda^2(x^2+y^2+c^2)+c^2x^2=0$$

به ازای $\lambda=0$ دارای علامت $+$ و به ازای $\lambda=c$ دارای علامت $-$ و به ازای λهای بزرگتر بازهم دارای علامت $+$ است. درنتیجه، این معادله، دارای دوریشهٔ مثبت است: یکی $\lambda>c$ و دیگری $\mu<c$*، واین، حکم ما را ثابت می‌کند.

اگر معادلهٔ قبل‌را، به‌عنوان معادلهٔ درجه دومی‌نسبت به λ^2 درنظر بگیریم،آن‌وقت، از روی ویژگی معلوم ریشه‌ها، داریم:

$$\lambda^2+\mu^2=x^2+y^2+c^2,\quad \lambda^2\mu^2=c^2x^2$$

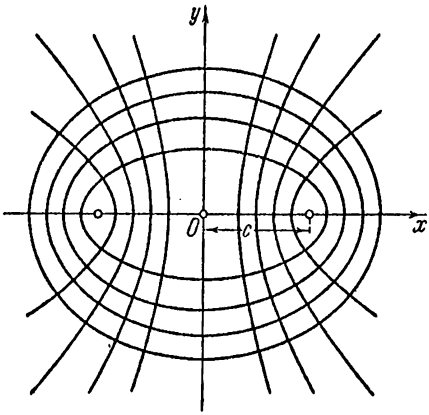
که ازآن‌جا، x و y به‌سادگی برحسب λ و μ به‌دست می‌آید:

$$x=\pm\frac{\lambda\mu}{c},\quad y=\pm\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}{c}$$

با اکتفا به زاویهٔ مختصاتی اول، تنها علامت‌های مثبت را نگه می‌داریم. عددهای

---

*) برای این‌که این ریشه‌ها را باهم اشتباه نکنیم، λ را ریشهٔ بزرگتر و μ را ریشهٔ کوچکتر می‌گیریم.



شکل ۶۷

λ و μ را می‌توان مانند مختصات منحنی‌الخط نقطه‌های این زاویه در نظر گرفت. آن‌ها را مختصات بیضوی می‌نامند. در این حالت، منحنی‌های مختصاتی، همان مقطع‌های مخروطی مطلوب هستند.

یادآوری می‌کنیم که λ از c تا $+\infty$ و μ از ۰ تا c تغییر می‌کند. برای مقدارهای حدی داریم:

به ازای $\lambda = c$، پاره خطی از محور x، از $x = 0$ تا $x = c$،

به ازای $\mu = c$، پاره خطی از محور x از $x = c$ تا $x = +\infty$،

به ازای $\mu = 0$، بخش مثبت محور y.

بالاخره، ژاکوبین، به سادگی محاسبه می‌شود:

$$\frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}} < 0$$

۶۰۵. بیان مساحت در مختصات منحنی‌الخط. فرض کنیم، بر صفحهٔ xy، حوزهٔ (D) محدود به دورهٔ قطعه به قطعه هموار (S)، بدون نقطهٔ تکراری داده شود. فرض کنیم، دستورهای (۱)، تناظر یك ارزشی متقابل را بین این حوزه و حوزهٔ (Δ) از صفحهٔ $\xi\eta$ محدود به دورهٔ مشابه $(\sum)$ برقرار کند.

همهٔ فرض‌های شمارهٔ **۶۰۳** را نسبت به‌این حوزه‌ها حفظ می‌کنیم و، علاوه بر آن، مشتق‌های مختلط مرتبهٔ دوم راهم، در حوزهٔ (Δ)، برای هرکدام از تابع‌های (۱) موجود می‌گیریم، یعنی

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi}$$

(که بنا بر پیوستگی، مقدارهای برابر خواهند داشت؛ **۱۹۰** را ببینید*).

با توجه به‌این فرض‌ها، مسألهٔ بیان مساحت D حوزهٔ مورد نظر بر صفحهٔ xy را، به

---

*) توجه کنیم که، این فرض‌های تکمیلی، برای درستی نتیجهٔ نهائی، اساسی نیستند و تنها برای آسان کردن اثبات آورده شده‌اند.

صورت انتگرال دوگانهٔ گسترده برحوزهٔ (Δ) ازصفحهٔ $\xi\eta$، مطرح می‌کنیم.

از دستوری آغاز می‌کنیم که به بیان مساحت (D) به وسیلهٔ انتگرال روی منحنی، که روی دورهٔ (S) حوزهٔ (D) گرفته می‌شود:

$$D=\int_{(S)} x\,dy \qquad (۷)$$

[۵۵۱، (۱۰) را ببینید].

طرح تبدیل بعدی چنین است: ابتدا بااستفاده از معادلهٔ پارامتری دوره، ازانتگرال روی منحنی (۷)، به‌انتگرال معین معمولی می‌رویم. بعد، انتگرال اخیر را، دوباره به انتگرال‌روی منحنی، منتهی‌این‌بار روی دورهٔ $(\sum)$ ازحوزهٔ (Δ) تبدیل‌می‌کنیم.سرانجام، بااستفاده از دستور گرین، انتگرال روی منحنی حاصل‌را با انتگرال دوگانه، روی حوزهٔ (Δ)، عوض می‌کنیم.

برای اجرای این طرح، معادله‌های پارامتری دورهٔ (S)، مورد نیاز است. ازآن‌جا که می‌خواهیم، بعداً، به دورهٔ $(\sum)$ عبورکنیم، ترجیح می‌دهیم که، ازهم‌اکنون، ازمعادلهٔ این دوره آغاز کنیم. فرض‌کنیم (۳) نمایش پارامتری منحنی $(\sum)$ باشد؛ آن وقت (۴) نمایش پارامتری (S) است، زیرا [همان‌طورکه در شمارهٔ **۶۰۳** متذکر شدیم] (S) نظیر دورهٔ $(\sum)$ برصفحهٔ xy است. مرزهای α و β از تغییر t را چنان انتخاب می‌کنیم که،با عبور از α تا β، منحنی (S) درجهت مثبت پیموده شود.

اکنون، طبق دستور (۵) شمارهٔ **۵۴۷** داریم:

$$D=\int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt$$

ویا، اگربه (۴) و (۵) توجه داشته باشیم:

$$D=\int_{\alpha}^{\beta} x(\xi(t),\eta(t))\left[\frac{\partial y}{\partial \xi}\xi'(t)+\frac{\partial y}{\partial \eta}\eta'(t)\right]dt \qquad (۸)$$

این انتگرال را، با انتگرال روی منحنی

$$\int_{(\Sigma)} x(\xi,\eta)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right) \qquad (۹)$$

که روی دورهٔ $(\sum)$ و درجهت مثبت گرفته شده است، مقایسه می‌کنیم. اگر می‌خواستیم

انتگرال اخیر را، باتوجه به‌قاعدهٔ معمولی، به‌صورت انتگرال معین معمولی درآوریم، آن وقت لازم بود به‌جای ξ و η، مقدارهای $\xi(t)$ و $\eta(t)$ را از معادله‌ـای پارامتری منحنی $(\sum)$ قرار دهیم و به انتگرال (۸) برگردیم.

ضمناً، یك کیفیت را باید در نظرداشت. با تغییر t از α تا β، دورهٔ (S)ـ آن‌طور که این‌مرزها را انتخاب کردیم ـ درجهت مثبت پیموده می‌شود، ولی دورهٔ $(\sum)$ می‌تواند درجهت مثبت یا درجهت منفی پیموده شود. به‌این‌ترتیب، انتگرال‌های (۸) و (۹)، ممکن است درعمل اختلاف علامت داشته باشند. درهمهٔ حالت‌ها

$$D=\pm\int_{(\Sigma)} x\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + x\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta \qquad (۱۰)$$

ضمناً، بار دیگر تأکید کنیم که علامت مثبت مربوط به زمانی‌است که دورزدن مثبت بردورهٔ (S)، متناظر با دورزدن مثبت بردورهٔ $(\sum)$ وعلامت منفی، درحالت عکس برقرار است.

اکنون این باقی مانده است که انتگرال روی منحنی حاصل‌را، به انتگرال دوگانه تبدیل کنیم. برای این منظور، باید از دستور گرین استفاده کنیم:

$$\int_{(\Sigma)} P(\xi,\eta)d\xi+Q(\xi,\eta)d\eta=\iint_{(\Delta)}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}-\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)d\xi d\eta$$

که درآن، فرض می‌کنیم

$$P(\xi,\eta)=x\frac{\partial y}{\partial \xi},\quad Q(\xi,\eta)=x\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

چون

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}=\frac{\partial x}{\partial \xi}\ \frac{\partial y}{\partial \eta}+x\frac{\partial^2 y}{\partial \eta\partial \xi}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta}=\frac{\partial x}{\partial \eta}\ \frac{\partial y}{\partial \xi}+x\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\partial \eta}$$

و مشتق‌های مختلط مرتبهٔ دوم y باهم برابرند، پس

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}-\frac{\partial P}{\partial \eta}=\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$$

و به‌این دستور می‌رسیم:

$$D=\pm\iint_{(\Delta)}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}d\xi d\eta$$

درشمارهٔ **۶۰۳** دیدیم که، با فرض‌های داده شده، ژاکوبین

$$J(\xi,\eta)=\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$$

در حوزهٔ (Δ)، علامت مشخصی را حفظ می‌کند. انتگرال هم، همین علامت را دارد. ولی جلوآن، باز هم علامت دوگانه $\pm$ قرار دارد. از آن‌جاکه، در نتیجهٔ کار، بایدعدد مثبت D به دست آید، بنابراین روشن است که جلو انتگرال بـر علامت ژاکوبین منطبق است. اگر این علامت را به‌تابع زیر انتگرال وارد کنیم، در آن‌جا، به قدرمطلق ژاکوبین می‌رسیم، به‌نحوی که سرانجام، مقدار مساحت، چنین می‌شود:

$$D=\iint_{(\Delta)}\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta=\iint_{(\Delta)}\left|J(\xi,\eta)\right|d\xi d\eta \qquad (۱۱)$$

واین، همان دستوری است که می‌خواستیم به‌دست آوریم.

عبارت زیرانتگرال

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta=|J(\xi,\eta)|d\xi d\eta$$

را معمولا، مساحت جزئی در مختصات منحنی‌الخط می‌نامند. مثلا، در حـالت مختصات قطبی دیدیم که، ژاکوبین برابر است با r؛ در نتیجه، مساحت جـزئی در مختصات قطبی برابر $rdrd\theta$ می‌شود.

۶۰۶. ملاحظه‌های تکمیلی. ۱°. اگر قاعده‌ای راکه، به‌کمك آن، علامت مثبت یا منفی دستور (۱۰) انتخاب شد، با این واقعیت مقایسه‌کنیم که این عـلامت، الزاماً همان علامت ژاکوبین‌است، آن وقت، نتیجهٔ جالبی به‌دست می‌آید: اگر ژاکوبین، دارای علامت مثبت باشد، آن وقت، جهت دورزدن مثبت روی دوره‌های (S)و$(\sum)$، بنابه دستورهای تبدیل، برهم منطبق‌اند؛ در حالتی‌که ژاکوبین دارای علامت منفـی باشد، جهت مثبت بر یکی از دوره‌ها، متناظر است با جهت منفی بر دورهٔ دیگری.

روشن است که، همین حکم، دربارهٔ هردو دورهٔ بسته و دلخواه متقابلا متناظر (L) و (Λ) واقع برحوزه‌های (D) و (Δ) هم برقرار است. این‌نتیجه را می‌توان، به‌سادگی، روی مثال‌های شمارهٔ **۶۰۴** به‌آزمایش گذاشت.

۲°. اگر قضیهٔ میانگین [۵۹۲، (۹)] را دربارهٔ دستور (۱۱) به‌کار بریم، به رابطهٔ

$$D=|J(\bar{\xi},\bar{\eta})|\cdot\Delta \qquad (۱۲)$$

می‌رسیم، که در آن، $(\bar{\xi},\bar{\eta})$ نقطه‌ای از حوزهٔ (Δ)، و Δ مساحت این حوزه است.

این رابطه را، با دستور لاگرانژ

$$f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)(\beta-\alpha)\quad(\alpha<\xi<\beta)$$

مقایسه می‌کنیم. اگر $x=f(\xi)$ تابعی یکنوا باشد، در آن صورت، بازه‌های $\alpha\leqslant\xi\leqslant\beta$ و $f(\alpha)\leqslant x\leqslant f(\beta)$ یا $f(\beta)\leqslant x\leqslant f(\alpha)$ (اگر با تابع نزولی سروکار داشته باشیم)، به‌طور یك ارزشی و متقابلا، به‌هم مربوط می‌شوند. طول این حوزه‌ها را با δ و d نشان می‌دهیم. آن وقت، دستور لاگرانژ به برابری

$$d=|f'(\bar{\xi})|\cdot\delta \qquad (۱۳)$$

منجر می‌شود که مشابه برابری (۱۲) است.

اگر در دستور (۱۳)، بازهٔ (δ) را، در نقطهٔ ξ، «فشرده» کنیم، به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$f'(\xi)=\text{حد}\frac{d}{\delta}$$

به‌نحوی که، قدرمطلق مشتق، برابر می‌شود با ضریب تحریف (یا ضریب کشسانی) خط راست ξ در نقطهٔ مفروض آن، ضمن تبدیل آن به‌خط راست x.

به‌همین ترتیب، از دستور (۱۲) با «فشردن» حوزهٔ (s) در نقطهٔ (ξ,η)، به دست می‌آید:

$$|J(\xi,\eta)|=\text{حد}\frac{D^*}{\Delta}$$

یعنی، قدر مطلق ژاکوبین، در نقش ضریب تحریف (یا ضریب کش آمدن) صفحهٔ $\eta\xi$ (در نقطهٔ مفروض آن)، ضمن تبدیل آن به صفحهٔ xy، ظاهر می‌شود.

این نکته، تشابه بین مشتق و ژاکوبین را، به روشنی، نشان می‌دهد [با فصل ششم مقایسه کنید].

۳°. دستور (۱۱) نشان می‌دهد که، اگر مساحت Δ بی‌اندازه کوچك شود، مساحت

---

*) درواقع، از انتگرال (۱۱) نسبت به حوزه، در نقطهٔ (ξ,η)، مشتق می‌گیریم [۵۹۳].

D نظیر آن‌هم بی‌اندازه کوچك خواهد شد. ازاین‌جا، به سادگی معلوم می‌شودکه تبدیل حوزه‌ها ــ که در شمارهٔ ۶۰۳ بررسی کردیم ــ دارای ویژگی‌مهم زیراست: منحنی (Λ) با مساحت صفر در حوزهٔ (Δ)، منجر به منحنی (L) درحوزهٔ (D) می‌شودکه آن هم دارای مساحت صفر است.

۴°. دستور (۱۱) را با این فرض‌ها پیدا کردیم که بین حوزه‌های (D) و (Δ) تناظر یك ارزشی متقابل برقرار باشد و تابع‌های (۱) و (۲)، همـراه با مشتق‌های نسبی خود، پیوسته باشند. ولی‌درعمل، به‌حالت‌هایی برمی‌خوریم که، این فرض‌ها، در نقطه‌های‌جداگانه ویا درطول منحنی‌های جداگانه، به‌هم می‌خورند.

اگربتوان این نقطه‌ها و منحنی‌ها را، بر هردو صفحه، در حوزه‌های (d) و (δ) با مساحتی به دلخواه‌کوچك محصورکرد، در آن صورت، آن وقت، می‌توان از دستور زیر استفاده‌کرد:

$$D-d=\iint\limits_{(\Delta)-(\delta)}\left|J(\xi,\eta)\right|d\xi d\eta \qquad (11^*)$$

فرض‌کنید، در حوزهٔ (Δ)، ژاکوبین‌کران‌دار باشد:

$$|J(\xi,\eta)|\leqslant M$$

آن وقت، تفاوت انتگرال (*۱۱) از انتگرال (۱۱)، چنین می‌شود:

$$\iint\limits_{(\delta)}\left|J(\xi,\eta)\right|d\xi d\eta\leqslant M\delta$$

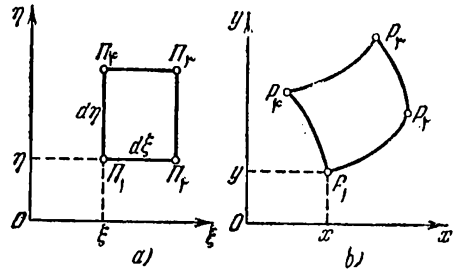
اگر در (*۱۱)، وقتی‌که d و δ به سمت صفر میل‌کنند، به‌سمت‌حد برویم، به دستور(۱۱) می‌رسیم.

برای روشن شدن موضوع، به‌مثال ۱) در شمارهٔ ۶۰۴ و به شکل ۶۳ برمی‌گردیم. دراین‌جا نمی‌توان در مورد مستطیل $(\Delta)=[0,R;\ 0,2\pi]$ و دایـرهٔ (D) به شعاع R و مرکز مبداء، مستقیماً دستور (۱۱) راکه به صورت

$$D=\iint\limits_{(\Delta)}r\,dr\,d\theta$$

در می‌آید، به‌کار برد. ولی اگر حوزهٔ هاشور خورده را (که مساحت‌آن همراه با ρ و ε به‌سمت صفر میل می‌کند) حذف‌کنیم، آن وقت، می‌توان از این‌دستور، برای حوزهٔ‌حاصل، استفاده‌کرد و، سپس به سمت حد عبورکرد.

۶۰۷. نتیجه‌گیری هندسی. اگرچه دستور (۱۱) با استدلالی ساده به دست آمد، ولی هیچ‌گونه جنبهٔ عینی نداشت. استدلال دیگری را برای این‌دستور مفید می‌دانیم که، اگرچه کاملا دقیق نیست، درعوض کاملا روشن است وصورتی هندسی‌دارد. این‌نتیجه‌گیری، به‌نام م. ب. اوستروگرادسکی ثبت شده‌است.



شکل ۶۸

دوباره تبدیل صفحهٔ ηξ را به‌صفحهٔ xy در نظر می‌گیریم که با دستور (۱) داده‌می‌شود. برصفحهٔ ηξ، مستطیل بی‌نهایت کوچك $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$ را با ضلع‌های $d\xi$ و $d\eta$ موازی محورهای ξ و η انتخاب می‌کنیم (شکل ۶۸–a). تبدیل شدهٔ این مستطیل بر صفحهٔ xy، چهارضلعی منحنی‌الخط $P_1P_2P_3P_4$ می‌شود (شکل ۶۸–b)؛ مساحت آن‌را تعیین‌می‌کنیم. مختصات رأس‌های مستطیل، چنین‌اند:

$$\pi_1(\xi, \eta),\ \pi_2(\xi+d\xi, \eta),\ \pi_3(\xi+d\xi, \eta+d\eta),\ \pi_4(\xi, \eta+d\eta)$$

و مختصات رأس‌های نظیر چهارضلعی منحنی‌الخط، دراین حالت، چنین می‌شود:

$$P_1(x(\xi, \eta),\ y(\xi,\eta)),$$

$$P_2(x(\xi+d\xi, \eta),\ y(\xi+d\xi, \eta)),$$

$$P_3(x(\xi+d\xi, \eta+d\eta),\ y(\xi+d\xi, \eta+d\eta))$$

$$P_4(x(\xi, \eta+d\eta),\ y(\xi, \eta+d\eta))$$

اگر به جمله‌های مرتبهٔ اول، نسبت به $d\xi$ و $d\eta$، اکتفا شود، درآن صورت، به‌طور تقریبی، می‌توان این نقطه‌ها را اختیار کرد:

$$P_1(x, y),\ P_2\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi,\ y+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi\right),$$

$$P_3\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta,\ y+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right),$$

$$P_4\left(x+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta,\ y+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right)$$

که در آن‌ها، $x=x(\xi,\eta)$، $y=y(\xi,\eta)$ و به طور کلی، همهٔ مشتق‌ها در نقطهٔ (ξ,η) محاسبه شده‌اند. از آن‌جا که تصویرهای دوپاره خط P_1P_2 و P_3P_4 برهریك از محورها، به تقریب، باهم برابرند، این پاره خطها برابر و موازی می‌شوند، به نحوی که (با تقریب بی‌نهایت کوچك‌های مرتبهٔ بالاتر)، چهارضلعی $P_1P_2P_3P_4$ متوازی‌الاضلاع است.

مساحت این متوازی‌الاضلاع، برابر است با دو برابر مساحت مثلث $P_1P_2P_3$. از هندسهٔ تحلیلی می‌دانیم که دوبرابر مساحت مثلثی که رأس‌های آن در نقطه‌های (x_1,y_1)، (x_2,y_2) و (x_3,y_3) باشند، از لحاظ قدر مطلق، برابر است با دترمینان

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_2 \\ y_2-y_1 & y_3-y_2 \end{vmatrix}$$

اگر از این دستور، درحالت موردنظرخود استفاده کنیم، نتیجه می‌گیریم که مساحت‌مطلوب (بازهم با تقریب تا بی‌نهایت کوچك‌های مرتبه‌های بالاتر)، از لحاظ قدر مطلق، برابراست با دترمینان

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta \end{vmatrix} = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}d\xi d\eta$$

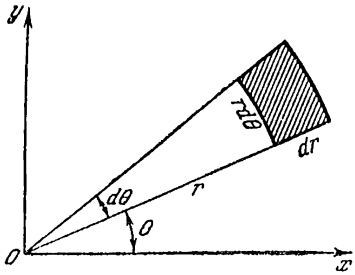
وبنابراین

$$P_1P_2P_3P_4 \text{ مساحت} = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}d\xi d\eta$$

اگرشکل (Δ) ازصفحهٔ $\xi\eta$ را باخطهای راست موازی محورها به مستطیل‌هایی بی‌نهایت کوچك تقسیم کنیم (و از جزءهای «نامنظمی» که درکنارهٔ دوره پدید می‌آید، صرف نظر کنیم) و، درهمان حال، شکل (D) ازصفحهٔ xy را هم، به‌چهار ضلعی‌های منحنی‌الخط متناظر تقسیم کنیم، با جمع کردن مقدارهای حاصل، برای مساحت‌های آن‌ها، دوباره به دستور (۱۱) می‌رسیم.

به‌این ترتیب، این بحث، براندیشهٔ هندسی مهمی تأکید می‌کند: ماهیت دستور(۱۱) این است که: برای تعیین مساحت شکل (D)، بایدآن را به‌کمك شبکه‌ای ازمنحنی‌های مختصاتی به‌جزءهای منحنی‌الخط (ونه به مستطیل‌ها) تقسیم کرد.

این اندیشه امکان می‌دهد تا در بعضی حالت‌های ساده، تقریباً بدون هیچ محاسبه‌ای،



شکل ۶۹

بتوانیم «عنصر مساحت» را در مختصات منحنی‌الخط به‌دست آوریم. مثلا، در حالت عبور به مختصات قطبی، می‌توان این‌طور بحث کرد. مستطیل جزئی با ضلع‌های dr و $d\theta$ در صفحهٔ $r\theta$، نظیر شکلی است که محدود به کمان‌های دایره‌های به‌شعاع‌های r و $r+dr$ و دو شعاع گذرنده بر مبداء تحت زاویه‌های θ و $\theta+d\theta$ با محور x در صفحهٔ xy باشد (شکل ۶۹). اگر این شکل را، به تقریب، مستطیلی به ضلع‌های dr و $rd\theta$ بگیریم، بلافاصله، مقدار $rdrd\theta$، یعنی «عنصر مساحت» به‌دست می‌آید.

۶۰۸. مثال‌ها. ۱) مطلوب است مساحت شکل‌های محدود به منحنی‌های زیر

(a) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (لمینسکات)

(b) $(x^2+y^2)^2=2ax^3$

(c) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^4+y^4)$

حل. وجود دوجمله‌ای x^2+y^2 در همهٔ حالت‌ها، به‌ما القا می‌کند که به مختصات قطبی برویم. با فرض

$$x=r\cos\theta \quad و \quad y=r\sin\theta$$

مساحت مطلوب را از روی دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

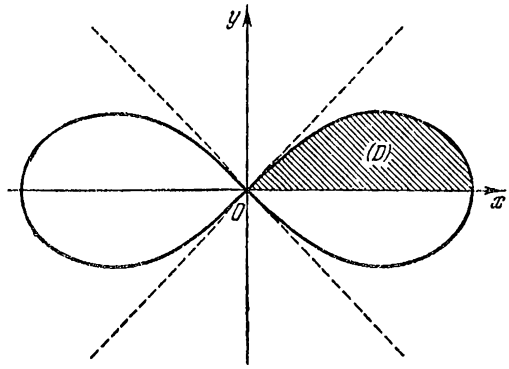
$$D=\iint_{(D)} rdrd\theta \qquad (۱۴)$$

(a) شکل لمینسکات را می‌شناسیم (شکل ۷۰). منحنی نسبت به محورهای مختصات متقارن است (به سادگی دیده می‌شود که، با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$، معادلهٔ منحنی لمینسکات تغییر نمی‌کند)، بنابراین کافی است مساحت بخش (D) از شکل را، که در ربع اول واقع است، پیدا و، سپس، آن را چهار برابر کنیم.

معادلهٔ قطبی لمینسکات، چنین است:

$$r^2=2a^2\cos 2\theta$$

ضمناً (اگر به ربع اول اکتفا کنیم)، چون باید $\cos 2\theta$ مثبت باشد، θ تنها از ۰ تا $\frac{\pi}{4}$ تغییر می‌کند. به‌این ترتیب، حوزهٔ (Δ) برصفحهٔ $r\theta$ نظیر (D)، محدود است به منحنی



شکل ۷۰

$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$$

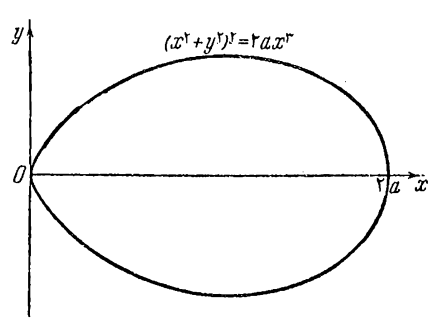
(تصویر لمینسکات)، پاره خط محور r (که نظیر پاره خط محور x است) و پاره‌خط‌محور θ از $\theta = 0$ تا $\theta = \frac{\pi}{4}$ (تنها در تصویر نقطهٔ اولیه، تناظر متقابل یك‌ارزشی از بین می‌رود)*.

داریم:

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}$$

به‌نحوی که تمامی مساحت مطلوب، برابر $2a^2$ می‌شود.

b) داشتن تصوری از نمودار کلی شکل منحنی مفید است؛ معادله نسبت به محور x متقارن است (با تبدیل y به $-y$، معادلهٔ منحنی تغییر نمی‌کند) و در سمت راست محور y قرار دارد (x نمی‌تواند منفی شود)؛ به ازای $x = 0$ و $x = 2a$، محور x را قطع می‌کند. از خود معادله روشن است که



شکل ۷۱

$$x^4 \leqslant 2ax^3$$

به‌نحوی که

---

*) در این‌باره، یادداشت ۴° شمارهٔ ۴۰۶ را ببینید.

$$x \leqslant ۲a$$

همچنین، چون $y^۴ \leqslant ۲ax^۳$، پس $|y| \leqslant ۲a$. طرح منحنی درشکل ۷۱ داده شده است.

معادلهٔ قطبی منحنی، چنین است: $r = ۲a\cos^۳\theta$، که در آن، θ از $-\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند. با توجه به تقارن شکل، می‌توان نوشت:

$$D = ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} d\theta \int_۰^{۲a\cos^۳\theta} r\,dr = ۴a^۲ \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \cos^۶\theta\, d\theta = \frac{۵}{۸}\pi a^۲$$

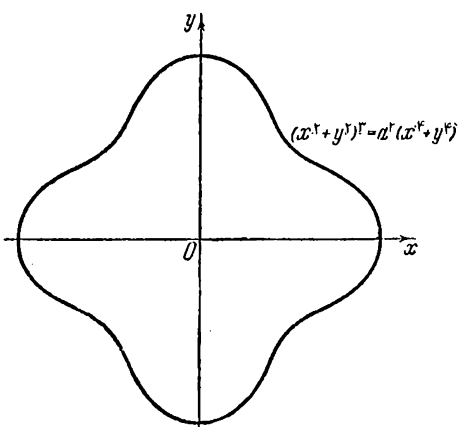
(c) منحنی نسبت به دومحور متقارن است. هرچند نقطهٔ مبداء $x = y = ۰$ به‌منحنی «تعلق دارد» (زیرا در معادله صدق می‌کند)، ولی یك نقطهٔ منفرد است؛ در واقع، به ازای $x \geqslant y > ۰$، از معادلهٔ منحنی، به سادگی به‌دست می‌آید:

$$(۲x^۲)^۳ \geqslant ۲a^۲x^۴ \Longrightarrow x \geqslant \frac{a}{۲}$$

به نحوی‌که، هیچ نقطه‌ای از منحنی، در نزدیکی مبداء وجود ندارد*. مبداء را در بررسی خود وارد نمی‌کنیم. به‌سادگی دیده می‌شود که منحنی محدود است؛ روشن است که به‌ازای $x \geqslant y$ داریم:

$$x^۲ \leqslant ۲a^۲, \quad x^۶ \leqslant ۲a^۲x^۴$$

وغیره. منحنی، شکلی شبیه شکل ۷۲ دارد.



شکل ۷۲

معادلهٔ قطبی منحنی چنین است:

$$r^۲ = a^۲(\cos^۴\theta + \sin^۴\theta)$$

که با توجه به تقارن، داریم:

$$D = ۴\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} d\theta \int_۰^{a\sqrt{\cos^۴\theta+\sin^۴\theta}} r\,dr = ۲a^۲ \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (\cos^۴\theta + \sin^۴\theta)\,d\theta =$$

---

*) به‌کمك معیار شمارهٔ **۲۳۶** هم، می‌توان به‌این مطلب قانع شد.

$$= ۴a^۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sin^۴\theta d\theta = \frac{۳}{۴}\pi a^۲$$

۲) ثابت کنید که می‌توان دستور (۱۴) را، مستقیماً، به دستوری تبدیل کرد که قبلاً دربارهٔ محاسبهٔ مساحت قطاع درمختصات قطبی داشتیم [۳۳۸]:

$$D = \frac{۱}{۲}\int_{\alpha}^{\beta} r^۲ d\theta$$

که درآن، منظور از r، تابعی از θ است که در معادلهٔ قطبی منحنی وجود دارد.
همهٔ مسأله‌های ۱) را می‌توانستیم، مستقیماً، از روی این دستور حل کنیم.
۳) مساحت شکل‌های محدود به منحنی‌های زیررا پیداکنید:

(a) $\left(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}\right)^۲ = \frac{xy}{c^۲}$, (b) $\left(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}\right)^۲ = x^۲+y^۲$,

(c) $\left(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}\right)^۲ = \frac{x^۲}{c^۲}$, (d) $\left(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}\right)^۲ = \frac{x^۲y}{c^۳}$

حل. در حالت‌هایی که در معادلهٔ منحنی، دوجمله‌ای $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}$ وجوددارد، بهتراست از «تعمیم» مختصات قطبی استفاده کنیم، که به‌کمك دستورهـای زیر، با مختصات دکارتی مربوط است*:

$$x = ar\cdot cos\theta, \quad y = br\cdot sin\theta$$

معنای هندسی این تبدیل، عبارت است از فشردن صفحه به‌طرف محـورهای مختصات و، سپس، عبور به مختصات قطبی.

ژاکوبین تبدیل برابراست با abr.

(a) منحنی محدود است ونسبت به مبداء متقارن است (زیرا معادلهٔ آن، با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ تغییر نمی‌کند). دوشاخهٔ متقارن، یکی‌در ربع‌اول ودیگری دربع سوم قرار دارد ($xy \geqslant ۰$). مبداء مختصات، تنها نقطهٔ برخورد منحنی بامحورهای‌مختصات است.

---

*) ضمن‌استفاده ازاین مختصات، تناظرمتقابل یك ارزشی، شبیه حالت مختصات قطبی، ازبین می‌رود، ۶۰۶، ۴° رابببینید.

معادلهٔ تصویر منحنی مفروض، برصفحهٔ $r\theta$ چنین‌است*:

$$r^2=\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta$$

با به حساب‌آوردن تقارن داریم:

$$D=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta}}abr\,dr=\frac{a^2b^2}{c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{a^2b^2}{2c^2}$$

(b) منحنی، محدود و، نسبت به‌محورها، متقارن است؛ مبداء تنها نقطهٔ منفرد آن‌است. داریم:

$$D=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}r\,dr=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{\pi}{2}a(a^2+b^2)$$

(c) منحنی، محدود و نسبت به محورها متقارن است؛ در مبداء با محـور y و در نقطهٔ $x=\pm\frac{a^2}{c}$ با محور x برخورد دارد. برای شاخه‌ای که در سمت راست محـور y قرار دارد، داریم: $r=\frac{a}{c}\cos\theta$، $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$، به‌نحوی‌که

$$D=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{a}{c}\cos\theta}r\,dr=\frac{2a^3b}{c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^3b}{c^2}$$

(d) منحنی، محدود ونسبت به محـور y متقارن است و در بالای محور x قـرار دارد؛ مبداء تنها نقطهٔ برخورد آن با محورهای مختصات است؛ به‌نحوی‌که منحنی، ازدو شاخهٔ واقع در ربع‌های اول و دوم تشکیل شده است.

معادلهٔ منحنی، در مختصات جدید، چنین است:

$$r=\frac{a^2b}{c^3}\cos^2\theta\sin\theta$$

---

*) به‌سادگی دیده می‌شودکه، منحنی، شبیه یك لمنیسکات فشرده است.

پاسخ: $D=\frac{\pi}{۳۲}\frac{a^۵b^۳}{c^۶}$.

۴) مساحت هر کدام از شکل‌های محدود به منحنی‌های مسدود زیر را پیدا کنید:

(a) $(x+y)^۴=ax^۲y$، (b) $(x+y)^۳=axy$، (c) $(x+y)^۵=ax^۲y^۲$

حل. اگر تنها بخشی از منحنی‌ها را درنظر بگیریم که در ربع اول قرار دارند (به نحوی که $x\geqslant ۰$، $y\geqslant ۰$)، آن وقت، همهٔ این منحنی‌ها محدود می‌شوند (با توجه به ۱)، (b)، می‌توان به‌این‌موضوع قانع شد). منحنی‌ها ازمبداء می گذرند و نقطه برخورددیگری با محورهای مختصات ندارند. از این‌جا روشن است که درست همین بخش‌ها، منحنی‌های مسدودی را نشان می‌دهندکه دربارهٔ آن‌ها صحبت کردیم.

در مثال‌های قبل، برای عبور از معادلهٔ بفرنج منحنی در مختصات دکارتی، به‌معادلهٔ ساده درمختصات منحنی‌الخط، اساساً از اتحاد $sin^۲\theta+cos^۲\theta=۱$ استفاده می کردیم. دو جمله‌ای $x+y$ نیز فکر استفاده ازاین اتحاد را به ما تلقین می‌کند: فرض می کنیم (تنها برای $x\geqslant ۰$ و $y\geqslant ۰$)

$$x=r\cos^۲\theta,\quad y=r\sin^۲\theta$$

ژاکوبین تبدیل عبارت است از*

$$J=\begin{vmatrix}\cos^۲\theta & -۲r\sin\theta\cos\theta\\ \sin^۲\theta & ۲r\sin\theta\cos\theta\end{vmatrix}=۲r\sin\theta\cos\theta$$

(a) معادلهٔ منحنی مسدود، درمختصات جدید:

$$r=a\cos^۴\theta\sin^۲\theta$$

و سپس

$$D=۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_۰^{a\cos^۴\theta\sin^۲\theta}r\,dr=a^۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۹\theta\sin^۵\theta\,d\theta=\frac{a^۲}{۲۱۰}$$

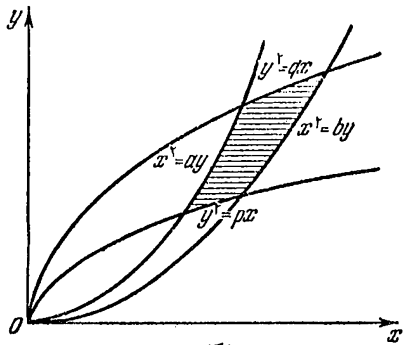
(b) $D=\frac{a^۲}{۶۰}$، (c) $D=\frac{a^۲}{۱۲۶۰}$.

۵) اکنون، به روش دیگری برای انتخاب دستگاه مختصات منحنی‌الخط اشاره

---

*) دراین‌جا هم، آن چه در §۶، ۴° گفتیم، کاربرد پیدا می کند.

می‌کنیم که اغلب، برای تعیین مساحت مستطیل منحنی‌الخط، سودمند است. اگر هردوجفت منحنی‌هایی که معرف ضلع‌های مقابل این چهار ضلعی هستند، در ترکیب خانوادهٔ منحنی‌های خود، صفحه را پر کنند (و بستگی به یک پارامتر داشته باشند)، آن وقت، طبیعی است که همین دوخانواده را، به‌عنوان شبکهٔ منحنی‌های مختصاتی، درنظر بگیریم. پارامتر آن‌ها هم، منجر به دستگاه منحنی‌الخط ساده‌ای، برای حالت مفروض، می‌شود.



شکل ۷۳

این روش را، به کمک مثالی، روشن می‌کنیم. فرض کنیم که بخواهیم مساحت شکل محدود به سهمی‌های زیررا پیداکنیم:

$$x^2=\eta y \quad (a\leqslant\eta\leqslant b) \qquad y^2=\xi x \quad (p\leqslant\xi\leqslant q)$$

که هرکدام ازآن‌ها، شکل ما را پرمی‌کنند وشبکهٔ منحنی‌های مختصاتی‌را تشکیل‌می‌دهند. واین، هم‌ارزآن است با این‌که، پارامترهای آن‌ها ξ و η، به‌عنوان مختصات منحنی‌الخط در نظرگرفته شوند. همهٔ‌این‌ها نیز، از شمارهٔ ۵۷۹، ۴)، برای ما آشناست. ازمعادله‌های مفروض، داریم: $x=\sqrt[3]{\xi\eta^2}$ و $y=\sqrt[3]{\xi^2\eta}$، به‌طوری‌که ژاکوبین

$$J=-\frac{1}{3}$$

ازاین‌جا، بلافاصله، به‌دست می‌آید:

$$D=\frac{1}{3}(q-p)(b-a)$$

۶) از همین روش، برای محاسبهٔ مساحت چهارضلعی محدود به منحنی‌های زیر، استفاده کنید:

(a) هذلولی‌های $xy=p$ و $xy=q$ وخط‌های راست $y=ax$ و $y=bx$؛

(b) هذلولی‌های $xy=p$ و $xy=q$ وسهمی‌های $y^2=ax$ و $y^2=bx$؛

(c) سهمی‌های $x^2=py$ و $x^2=qy$ و خط‌های راست $y=ax$ و $y=bx$؛

(d) خط‌های راست $x+y=p$، $x+y=q$، $y=ax$ و $y=bx$،

ضمناً، درهمهٔ حالت‌ها، فرض می‌شودکه $0<p<q$ و $0<a<b$.

(a) حل. شبکهٔ منحنی‌های مختصاتی

$$xy=\xi\ \ (p\leqslant\xi\leqslant q),\ y=\eta x\ \ (a\leqslant\eta\leqslant b)$$

از آن‌جا

$$x=\sqrt{\frac{\xi}{\eta}},\quad y=\sqrt{\xi\eta}$$

و

$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2\sqrt{\xi\eta}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta^3}}\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2\eta}$$

و بالاخره

$$D=\frac{1}{2}\int_p^q d\xi\int_a^b\frac{d\eta}{\eta}=\frac{1}{2}(q-p)\ln\frac{b}{a}$$

(b) راهنمائی. فرض کنید $xy=\xi$، $y^2=\eta x$ $(a\leqslant\eta\leqslant b$ و $p\leqslant\xi\leqslant q)$؛ ژاکوبین: $J=\frac{1}{3\eta}$. پاسخ: $D=\frac{1}{3}(q-p)\ln\frac{b}{a}$.

(c) پاسخ: $D=\frac{1}{6}(q^2-p^2)(b^3-a^3)$.

(d) پاسخ: $D=\frac{1}{2}\ \frac{(b-a)(q^2-p^2)}{(1+a)(1+b)}$.

۷) مساحت آستروئید $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ را پیدا کنید.

حل. معادله‌های پارامتری آستروئید، چنین‌اند:

$$x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

اگر در این‌جا، a را با r عوض کنیم $(0\leqslant r\leqslant a)$، آن‌گاه خانوادهٔ آستروئیدهای مشابه را به‌دست می‌آوریم که شکل ما را پر می‌کنند:

$$x=r\cos^3 t,\ \ y=r\sin^3 t$$

روشن است که به‌ازای t ثابت، این معادله‌ها، دسته نیم خطهای ازمبداء را می‌دهند. اگر

ازاین دستورها، به عنوان دستورهای تبدیل استفاده کنیم، روشن است که دراین‌جا هم، همان اندیشهٔ دو مسألهٔ قبل قرار دارد. ژاکوبین

$$J = ۳r\sin^۲t\cos^۲t$$

و بالاخره

$$D = ۶a^۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۲t\cos^۲t\,dt = \frac{۳}{۸}\pi a^۲$$

۸) تبدیلی را درنظر می‌گیریم که با دستورهای زیرمعین می‌شود:

$$x = \frac{u+v}{۲},\quad y = \sqrt{uv}\quad (u \geqslant ۰,\ v \geqslant ۰)$$

واضح است که همیشه $x \geqslant y \geqslant ۰$، به نحوی که نقطهٔ (x, y) در فضای زاویهٔ بین جهت مثبت محور x و نیمساز $y = x$ ربع اول قرار دارد. برعکس، هر نقطهٔ (x, y) از این فضای زاویه‌ای، به‌طور کلی، متناظر است با دو زوج مقدار غیر منفی u و v که معرف ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیرهستند:

$$z^۲ - ۲xz + y^۲ = ۰$$

تناظر یك ارزشی را وقتی می‌توان برقرار کرد که همیشه $u \geqslant v$ درنظر گرفته شود، یعنی نقطهٔ (u, v) را هم، در محدودهٔ مشابه فضای زاویه‌ای، برصفحهٔ uv انتخاب کنیم. آن وقت

$$u = x + \sqrt{x^۲ - y^۲},\quad v = x - \sqrt{x^۲ - y^۲}$$

ژاکوبین تبدیل، به سادگی محاسبه می‌شود:

$$J = \frac{۱}{۴}\left(\sqrt{\frac{u}{v}} - \sqrt{\frac{v}{u}}\right)$$

دراین‌جا، منحنی‌های مختصاتی، ویژگی جالبی دارند. به ازای $u = \text{const}$، به دست می‌آید:

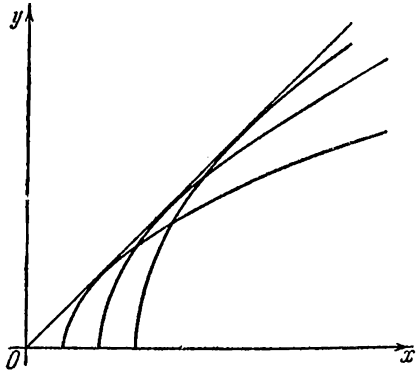
$$y^۲ = u(۲x - u) = ۲u\left(x - \frac{u}{۲}\right)$$

و به ترتیب مشابهی، به‌ازای $v = \text{const}$

$$y^۲ = v(۲x - v) = ۲v\left(x - \frac{v}{۲}\right)$$

به‌این ترتیب، در هردو حالت، به‌یك خانواده از سهمی‌ها می‌رسیم:

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right)$$



شکل ۷۴

که محور آن‌ها برمحور x وخط هادی آن‌ها بر محور y منطبق است. هرکدام از این سهمی‌ها، در نقطهٔ (p, p) بر خط راست $y = x$ مماس است.

معمای ظاهری به‌سادگی حل می‌شود: وقتی $u = p$ باشد و v از ۰ تا p تغییر کند، بخشی از سهمی، درفاصلهٔ رأس آن تا نقطهٔ تماس مذکور پیموده می‌شود ووقتی $v = p$ باشد و u از p تا $+\infty$ تغییر کند، بخش باقی‌ماندهٔ سهمی تا بی‌نهایت پیموده می‌شود (شکل ۷۴).

اگر شکل (D_1) را روی صفحه xy، محدود به‌محور x و دو سهمی

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right), \quad y^2 = 2q\left(x - \frac{q}{2}\right)$$

$$(0 < p < q)$$

را اختیارکنیم، نظیرآن بر صفحهٔ uv، مستطیل $(\Delta_1) = [p, q; 0, p]$ خواهد بود. ضمناً پاره خطهای $u = p$ و $v = p$ متناظرند با دوکمان از سهمی اول‌که در نقطهٔ تماس به‌هم می‌رسند. به همین ترتیب، شکل (D_1) (برصفحهٔ xy) که محدود است بـه سه سهمی: دو سهمی قبل و سهمی

$$y^2 = 2r\left(x - \frac{r}{2}\right) \quad (r > q)$$

متناظراست با مستطیل $(\Delta_2) = [q, r; p, q]$ ازصفحهٔ uv؛ بازهم پاره خطهای $u = q$ و $v = q$ متناظرند با دوکمان از همان سهمی.

اکنون می‌توانیم، به‌کمك تبدیل مذکور، مثلا، مساحت شکل (D_2) را محاسبه‌کنیم. داریم:

$$D_2 = \frac{1}{4}\int_p^q \int_q^r \left(\sqrt{\frac{u}{v}} - \sqrt{\frac{v}{u}}\right) du\,dv =$$

$$=\frac{1}{3}[(\sqrt{q}-\sqrt{p})(\sqrt{r^3}-\sqrt{q^3})-(\sqrt{r}-\sqrt{q})(\sqrt{q^3}-\sqrt{p^3})=$$

$$=\frac{1}{3}(\sqrt{q}-\sqrt{p})(\sqrt{r}-\sqrt{q})(\sqrt{r}-\sqrt{p})(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$$

به‌همین‌ترتیب، می‌توان محاسبهٔ D_1 را آزمایش کرد، ولی دراین‌حالت، باانتگرال دوگانهٔ غیرخاص برخورد می‌کنیم، که در آن، تابع زیرانتگرال درطول پاره خط محور u، برابر ∞ می‌شود.

دربارهٔ چنین انتگرال‌هایی، بازهم صحبت خواهیم کرد [۶۱۷، ۸] را ببینید].

۹) برای آن‌که مساحت شکل‌های (Δ) و (D)، که به‌کمك تبدیل (۱) از یکدیگر به‌دست می‌آیند، همیشه باهم برابر باشند، روشن است که شرط زیرلازم وکافی است:

$$\left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right|=1$$

این مسأله را طرح می‌کنیم: مطلوب است صورت کلی تبدیل صفحه، به نحوی که مقدار مساحت را حفظ کند.

ضمناً می‌توانیم در شرط قبلی، ازعلامت قدرمطلق چشم پوشی کنیم و آن را به‌صورت

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}=1 \qquad (۱۵)$$

بنویسیم، زیرا در صورت لزوم، با تبدیل نقش ξ و η به یکدیگر، همیشه می‌توان به این نتیجه رسید.

علاوه براین، برای سادگی‌کار، فرض می‌کنیم، یکی‌از چهار مشتق جزئی موجوددر ژاکوبین، مثلا $\frac{\partial y}{\partial \eta}$، درتمامی حوزهٔ مفروض، مخالف صفراست. آن وقت، درمعادله‌های (۱)، می‌توان دومی را نسبت به η حل‌کرد وبا گذاشتن مقدار حاصل در معادلهٔ اول(۱)، تبدیل موردنظر را به‌صورت، زیردرآورد:

$$\begin{cases}\eta=f(\xi, y)\\ x=x(\xi, f(\xi, y))=g(\xi, y)\end{cases} \qquad (۱۶)$$

ببینیم تابع‌های f و g، چه خصلتی دارند. ثابت می‌کنیم که شرط (۱۵) هم ارز است با

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial \xi} \qquad (۱۷)$$

بنا به قاعدهٔ مشتق‌گیری از تابع‌های ضمنی داریم:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial \xi}=0 \tag{۱۸}$$

اکنون، اگر ازتابع y به‌عنوان تابعی مرکب، مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}=\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial \xi}$$

ازاین‌جا وبا توجه برابری دوم (۱۸)، می‌توان $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ را حذف کرد:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial g}{\partial \xi}=\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}=\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$$

که اگر برابری اول (۱) را ازآن‌کم کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{D(x, y)}{D(\xi, \xi)}-1$$

که حکم را ثابت می‌کند.

اکنون، با توجه به‌قضیهٔ ۲ شمارهٔ **۵۶۰** می‌بینیم که صورت کلی تابع‌های f و g (که به‌ازای آن‌ها، تبدیل (۱۶) مساحت راحفظ می‌کند)، بادستورهای زیرمعین‌می‌شوند:

$$f(\xi, y)=\frac{\partial U(\xi, y)}{\partial \xi},\quad g(\xi, y)=\frac{\partial U(\xi, y)}{\partial y}$$

برای تابع دلخواه U.

۶۰۹. تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه. انتگرال دوگانهٔ

$$\iint_{(D)} f(x, y)dxdy \tag{۱۹}$$

را در نظر می‌گیریم، که درآن، حوزهٔ (D) محدود به دورهٔ قطعه به قطعه هموار (S) و تابع $f(x, y)$ پیوسته دراین حوزه باشد (ویا ناپیوستگی‌آن، در طول تعداد محدودی‌از منحنی‌های قطعه به‌قطعه هموار باشد).

اکنون فرض می‌کنیم که حوزهٔ (D)، بادستورهای (۱)

$$x=x(\xi, \eta),\quad y=y(\xi, \eta)$$

به حوزهٔ (Δ) ازصفحهٔ $\eta\xi$، با رعایت همهٔ شرط‌هائی‌که، به ازای آن‌ها، دستور (۱۱) را در شمارهٔ ۶۰۵ برای مساحت شکل (D) در مختصات منحنی‌الخط به‌دست آوردیم، مربوط باشد*. می‌خواهیم با تغییر متغیرها در انتگرال (۱۹)، آن را به‌صورت انتگرالی در آوریم که برحوزهٔ (Δ) گسترده باشد.

برای این‌منظور، حوزهٔ (Δ) را، به‌کمك شبکه‌ای از منحنی‌های قطعه به‌قطعه هموار، به بخش‌های Δ_i $(i = ۱, ۲, \dots, n)$ تقسیم می‌کنیم؛ دراین صورت، حوزهٔ (D) هم، به وسیلهٔ منحنی‌های (قطعه به قطعه هموار) متناظر، به بخش‌های (D_i) تقسیم می‌شود (شکل ۷۵، a و b). در هر بخش (D_i)، نقطهٔ دلخواه (x_i, y_i) را انتخاب می‌کنیم و مجموع انتگرالی را برای انتگرال (۱۹) تشکیل می‌دهیم:

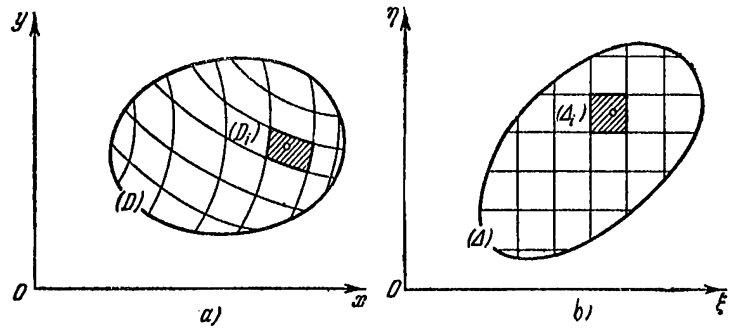
$$\sigma = \sum_{i=۱}^{n} f(x_i, y_i) D_i$$

وقتی‌که بزرگترین قطر ازحوزهٔ (D_i) به سمت صفر میل کند، این مجموع، دارای حدی خواهد بود.

اگر دستور (۱۲) شمارهٔ ۶۰۶ را برای هربخش (D_i) به‌کاربریم، خواهیم‌داشت:

$$D_i = |J(\xi_i^*, \eta_i^*)| \cdot \Delta_i \quad (i = ۱, ۲, \dots, n)$$

که درآن، (ξ_i^*, η_i^*) نقطهٔ معینی از حوزهٔ (Δ_i) است. اگر در مجموع σ، هر D_i را با این عبارت عوض کنیم، به‌دست می‌آید:



شکل ۷۵

---

*) به‌این ترتیب، وجود وپیوستگی مشتق‌های مختلط مرتبهٔ دوم $\frac{\partial^۲ y}{\partial \xi \partial \eta}$ و $\frac{\partial^۲ y}{\partial \eta \partial \xi}$ را مفروض می‌گیریم. با پاورقی صفحهٔ ۲۰۳۲ مقایسه کنید.

$$\sigma=\sum_i f(x_i, y_i)|J(\xi_i^*, \eta_i^*)|\cdot\Delta_i$$

چون نقطهٔ (ξ_i^*, η_i^*) به کمك قضیهٔ میانگین داده می‌شود و در انتخاب آن آزاد نیستیم، نقطهٔ (x_i, y_i) در حوزهٔ (D_i) کاملا غیرمشخص گرفته می‌شود. با استفاده ازاین نامشخص بودن، فرض می‌کنیم:

$$x_i=x(\xi_i^*, \eta_i^*), \quad y_i=y(\xi_i^*, \eta_i^*)$$

یعنی، به‌عنوان نقطهٔ (x_i, y_i)، نقطه‌ای از حوزهٔ (D_i) را انتخاب می‌کنیم که نظیر نقطهٔ (ξ_i^*, η_i^*) از حوزهٔ (Δ_i) باشد. آن‌وقت، مجموع σ به‌این صورت در می‌آید:

$$\sigma=\sum_i f(x(\xi_i^*, \eta_i^*), y(\xi_i^*, \eta_i^*))\cdot|J(\xi_i^*, \eta_i^*)|\Delta_i$$

و روشن است که، دراین صورت، عبارت است از مجموع انتگرالی برای انتگرال

$$\iint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\cdot|J(\xi, \eta)|d\xi d\eta \qquad (۲۰)$$

وجود این انتگرال ازاین‌جا ناشی می‌شودکه، تابع زیرعلامت انتگرال، یا پیوسته است ویا (با حفظ محدودیت خود) تنها درطول تعداد محدودی ازمنحنی‌های قطعه به‌قطعه هموار ناپیوسته است. که، برصفحهٔ $\xi\eta$، متناظر با منحنی‌های ناپیوستهٔ تابع $f(x, y)$ اند.

اکنون اگر قطرهای همهٔ حوزه‌های (Δ_i) را به‌سمت صفر میل‌دهیم، آن‌وقت با توجه به پیوستگی تابع (۱)، قطرهای همهٔ حوزه‌های (D_i) نیز به سمت صفر میل می‌کنند. در نتیجه، مجموع σ باید هم به‌سمت انتگرال (۱۹) وهم به سمت انتگرال (۲۰) میل کند، زیرا برای هردوی آن‌ها، مجموع انتگرالی است به این ترتیب

$$\iint_{(D)} f(x, y)dxdy=\iint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\cdot|J(\xi, \eta)|d\xi d\eta \qquad (۲۱)$$

این دستور، مسألهٔ تغییر متغیر را در انتگرال دوگانه، حل می‌کند. روشن است که دستور (۱۱)، حالت خاصی از دستور (۲۱)، به‌ازای $f(x, y)=1$، می‌شود.

به این ترتیب، برای این که تغییر متغیر را در انتگرال دوگانهٔ (۱۹) انجام دهیم، علاوه برآن که در تابع f به جای x و y، مقدار آن‌ها را از (۱) قرار می‌دهیم، ضمناً باید مساحت جزئی $dxdy$ را هم، با مقدار آن در مختصات منحنی‌الخط عوض کنیم.

شبیه ملاحظه‌هایی که در شمارهٔ ۶۰۶، ۴° داشتیم، دراین‌جا هم می‌توان ثابت کرد که، دستور (۲۱)، برای یك رشته از حالت‌هایی هم که، برای آن‌ها، شرط‌های مربوط به تبدیل (۱) درنقطه‌های منفرد یادرطول بعضی‌ازمنحنی‌ها ازبین می‌روند، بازهم درست است.

۶۱۰. شباهت با انتگرال‌های ساده. انتگرال برروی حوزه‌های جهت دار. دستور تغییر متغیر در انتگرال دو گانه، کاملا با دستور تغییر متغیر در انتگرال‌های معین معمولی، شباهت دارد:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(\xi))x'(\xi)dx \qquad (۲۲)$$

ولی، نبودن علامت قدرمطلق در دستور (۲۲)، تاحدی، این تشابه را خراب می‌کند. این اختلاف را می‌توان به سادگی توضیح داد. انتگرال معین معمولی، روی بازهٔ جهت‌دار گرفته می‌شود [۳۰۲]، و a می‌تواند کوچکتر یا بزرگتر از b باشد، درست همان‌طور که α هم می‌تواند کوچکتر یا بزرگتر از β شود؛ در حالی که انتگرال دوگانه را، تاکنون، تنها در حوزهٔ غیر منفی در نظر گرفتیم. درحالت انتگرال دوگانه هم، می‌توان با انتخاب جهت مثبت برروی دوره، حوزه را جهت‌دار کرد. [۵۴۸]؛ این جهت درعین‌حال به همهٔ منحنی‌های بستهٔ ساده‌ای هم که در محدودهٔ حوزه باشند، سرایت می‌کند. وقتی که جهت مثبت را روی دوره انتخاب کرده باشیم، می‌گویند که حوزه، به‌طورمثبت، ودرحالت‌عکس، به‌طور منفی جهت‌دار شده است.

طبیعی است که وقتی حوزه (D) جهت‌دار باشد، برای مساحت هم علامتی در نظر بگیریم: وقتی که حوزه به‌طور مثبت جهت‌دار شده است، مساحت را مثبت و، در حالت عکس، مساحت را منفی می‌گیریم. اگر حوزهٔ (D) را به بخش‌های (D_i) تقسیم کنیم، همان‌طور که قبلا گفتیم، حوزه‌های جزئی هم، همراه باحوزهٔ اصلی، جهت‌دار می‌شوند و مساحت‌های آن‌ها، دارای علامت خواهند بود.

اکنون برای جهت‌دار کردن حوزهٔ (D)، می‌توان ازروی نمونهٔ شمارهٔ ۵۸۸، مفهوم انتگرال دوگانه زیررا ساخت:

$$\iint_{(D)} f(x, y)dxdy$$

درضمن، اگر این‌حوزه دارای جهت مثبت باشد، این انتگرال بر انتگرال قبلی منطبق می‌شود ودرحالتی که حوزه دارای جهت منفی باشد، دریك علامت با آن فرق‌دارد.

این دیدگاه تازه در انتگرال دوگانه، قبل ازهمه، به‌ما امکان می‌دهد تا دستور (۱۱) شمارهٔ ۶۰۵ را ــ که معرف مساحت درمختصات منحنی‌الخط است ــ بدون علامت قدرمطلق برای ژاکوبین بنویسیم:

$$D=\iint_{(\Delta)}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}d\xi\,d\eta=\iint_{(\Delta)}J(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

تنها با این شرط که جهت حوزه‌های (D) و (Δ) باهم تطبیق کنند. این مطلب، مستقیماً، از یادداشت ۶۰۶، ۱° نتیجه می‌شود.

باهمان شرط، دستور(۱۲) شمارهٔ ۶۰۶ را نیزمی‌توان بدون‌علامت قدرمطلق‌نوشت:

$$D=J(\xi,\eta)\cdot\Delta$$

که در واقع، تعمیم طبیعی دستور لاگرانژ است.

بالاخره، دستورکلی (۲۱) راهم، برای حوزه‌های با جهت‌های متوافق (D)و(Δ)، می‌توان چنین نوشت:

$$\iint_{(D)}f(x,y)dxdy=\iint_{(\Delta)}f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))J(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

به‌این ترتیب، کافی‌است انتگرال‌های ساده و دوگانه را در شرایط یکسانی قرار دهیم، تا شباهت‌کامل شود.

باوجوداین، دربحث‌های آینده، دوباره به‌دیدگاه معمولی برخواهیم گشت وانتگرال دوگانه را نسبت به حوزه‌های بدون جهت درنظر خواهیم گرفت.

۶۱۱. چند مثال. ازآن‌جاکه تبدیل متغیرها در انتگرال دوگانه، اغلب به خاطر ساده‌ترکردن حوزهٔ انتگرال‌گیری انجام می‌شود، بنابراین، همهٔ اشاره‌هایی‌که در شمارهٔ ۶۰۸ داشتیم، مورد استفاده قرار می‌گیرند. علاوه بر آن، هدف طبیعی این‌تبدیل، ساده‌کردن عبارت زیر انتگرال هم می‌شود.

۱) درحالتی‌که، حوزه، دایره (به مرکز مبداء) ویا قطاعی ازآن باشد، بهتر است به مختصات قطبی عبور کنیم. به‌عنوان تمرین پیشنهاد می‌کنیم، مسأله‌های ۱)؛ ۱۷)، (a) و ۱۸)، (b) از شمارهٔ ۵۹۷ را، دوباره حل‌کنید.

به عنوان نمونه، برای دومی، داریم:

$$V=\iint_{(D)}xydxdy=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R}r^3\cos\theta\sin\theta\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\cdot\int_{0}^{R}r^3dr=\frac{R^4}{8}$$

ضمناً، درحالتی‌که در ترکیب عبارت زیر انتگرال، مجموع x^2+y^2 وارد شده

باشد، مبنای محکم‌تری برای استفاده از مختصات قطبی وجود دارد.

۲) حجم بخشی از کره (به شعاع R) را پیدا کنید که به‌وسیلهٔ استوانهٔ دایره‌ای قائم (به شعاع $r<R$). با محوری که از مرکز کره می‌گذرد، بریده شده باشد.

حل. اگر مرکز کره را مبداء مختصات و محور استوانه را، محور z انتخاب کنیم، داریم:

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r}\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=$$

$$=\frac{4\pi}{3}[R^3-(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}]$$

۳) مطلوب است حجم محدود به سهموی دوار $az=x^2+y^2$ و صفحهٔ $z=a$.

پاسخ: $V=\frac{\pi a^3}{2}$.

۴) موضع گرانیگاه (مرکز ثقل) قطاعی را پیدا کنید که از دایره‌ای به شعاع R با زاویهٔ مرکزی برابر 2α، جدا شده است.

حل. اگر نیمساز زاویهٔ مرکزی را برای محور قطبی (و محور x) انتخاب کنیم، داریم:

$$M_y=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\int\limits_0^{R}r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=\frac{2}{3}R^3\sin\alpha$$

اگر این مقدار را بر $P=R^2\alpha$ ــ مساحت قطاع ــ تقسیم کنیم، ξ، یعنی طول نقطهٔ گرانیگاه به دست می‌آید:

$$\xi=\frac{2}{3}R\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

از آن‌جا که نقطهٔ گرانیگاه، بر نیمساز قرار دارد (با توجه به‌تقارن)، موضع آن مشخص می‌شود.

۵) جرم دایره‌ای (به‌شعاع R) را پیدا کنید که چگالی آن در هر نقطه، برابر باشد با فاصلهٔ این نقطه ازمرکز دایره.

پاسخ: $m=\frac{\pi}{3}R^3$.

بازهم به‌چند مثال می‌پردازیم، که در آن‌ها، استفاده از مختصات قطبی، کار را ساده‌تر می‌کند.

۶) مطلوب است حجم «جسم ویویانی» [۵۹۷، ۲۰] را ببینید].

حل. قبلا داشتیم:

$$V=4\iint_{(P)}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

که در آن، (P) عبارت است از نیم دایره‌ای واقع در ربع اول صفحهٔ xy که روی شعاع R کره، به‌عنوان قطر نیم‌دایره، رسم شده است (شکل ۴۸). وجود عبارت x^2+y^2 در تابع زیر انتگرال، عبور به مختصات قطبی را به ما تلقین می‌کند.

معادلهٔ قطبی دورهٔ (P)، یعنی نیم‌دایره، عبارت است از $r=R\cos\theta$، به‌ازای تغییر θ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$. بنابراین

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,dr=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=$$

$$=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

و همان‌طور که می‌بینیم، محاسبه‌ها، خیلی ساده شده‌اند*.

۷) مطلوب است: (a) موضع گرانیگاه، (b) گشتاور ماند قطبی (ممان اینرسی قطبی) برگی از لمینسکات

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$$

حل. (a) معادلهٔ قطبی منحنی، چنین است:

$$r^2=2a^2\cos2\theta\quad\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$$

به ترتیب داریم:

---

*) باید توجه داشت که ساده کردن عبارت زیر انتگرال، مستلزم پیچیده‌ترشدن حوزهٔ انتگرال‌گیری است و این پیچیدگی به‌نحوی است که کار عبور به مختصات قطبی را دشوار و نامناسب می‌کند.

$$M_y=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\cdot(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}d\theta=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}a^3\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1-2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta\,d\theta$$

و سپس، با فرض $\sqrt{2}\sin\theta=\sin\omega$:

$$M_y=\frac{4}{3}a^3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\omega\,d\omega=\frac{\pi}{4}a^3$$

وچون مساحت یك برگ عبارت است از $P=a^2$ [۳۳۹، ۱۲)]، پس $\xi=\frac{\pi a}{4}$، که با آن، موضع گرانیگاه معین می‌شود.

(b) داریم:

$$I_0=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r^3\,dr\,d\theta=\frac{\pi a^4}{4}$$

۸) گشتاور ماند قطبی کاردیوئید $r=a(1+\cos\theta)$ را نسبت به‌قطب پیدا کنید.

پاسخ: $I_0=\frac{35}{16}\pi a^4$.

۹) موضع گرانیگاه «جسم ویویانی» را پیدا کنید [۶) را ببینید].

حل. از ملاحظه‌های تقارنی روشن است که گرانیگاه برمحور x قرار دارد. گشتاور استاتیك را محاسبه می‌کنیم:

$$M_{yz}=4\iint_{(P)}xz\,dx\,dy=4\iint_{(P)}x\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy=$$

$$=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_{0}^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\,.r^2\,dr$$

انتگرال درونی:

$$\int_{0}^{R\cos\theta} \sqrt{R^2-r^2}\cdot r^2\,dr = \frac{r}{8}(2r^2-R^2)\sqrt{R^2-r^2} +$$

$$+\frac{R^4}{8}\arcsin\frac{r}{R}\Big|_{r=0}^{r=R\cos\theta} = \frac{R^4}{8}[\cos\theta(2\cos^2\theta-1)\sin\theta+\frac{\pi}{2}-\theta]$$

به نحوی که

$$M_{yz} = \frac{R^4}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [(2\cos^4\theta-\cos^2\theta)\sin\theta+(\frac{\pi}{2}-\theta)\cos\theta]d\theta =$$

$$= \frac{R^4}{2}\left[-\frac{2}{5}\cos^5\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta+(\frac{\pi}{2}-\theta)\sin\theta-\cos\theta\right]\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15}R^4$$

ازاین‌جا، بالاخره

$$\xi = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{12}{5(3\pi-4)}R$$

۱۰) حجم جسم محدود به استوانهٔ بیضی‌وار

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

و صفحهٔ $z=0$ ویکی‌از سطح‌های زیررا پیداکنید:

(a) صفحهٔ $z=\lambda x+\mu y+h$ $(h>0)$؛

(b) سهموی بیضی‌وار $\frac{2z}{c}=\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}$ $(c>0)$؛

(c) سهموی هذلولی‌وار $cz=xy$ $(c>0)$.

حل. مسأله به محاسبهٔ انتگرال نسبت به بیضی واقع درصفحهٔ xy منجر می‌شود و بهتراست به مختصات قطبی تعمیم یافته عبورکنیم بافرض

$$x=ar\cos\theta,\quad y=br\sin\theta$$

ژاکوبین تبدیل، چنین‌می‌شود: $J=abr$.

مثلا، برای حالت (b) به‌دست می‌آید:

$$V=\frac{c}{2}\iint_{(D)}\left(\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}\right)dxdy=2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\left(\frac{a^2\cos^2\theta}{p^2}+\frac{b^2\sin^2\theta}{q^2}\right)r^3drd\theta=$$

$$=\frac{\pi}{8}abc\left(\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{q^2}\right)$$

برای حالت‌های دیگرهم، به همین ترتیب می‌توان عمل کرد.

(a): $V=\pi abh$؛ (c): $V=\frac{a^2b^2}{2c}$.*

۱۱) حجم بیضوی سه محوری زیررا پیداکنید:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

راهنمائی. از مختصات قطبی تعمیم یافته استفاده‌کنید.

پاسخ: $\frac{4}{3}\pi abc$

۱۲) انتگرال

$$I=\iint_{(D)}xydxdy$$

را نسبت به‌حلقهٔ منحنی

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2y}{c^3}$$

واقع در ربع اول محاسبه‌کنید [با ۶۰۸، ۳)، (d) مقایسه کنید].

راهنمائی. شبیه تمرین قبل. پاسخ: $\frac{1}{8400}\cdot\frac{a^{10}b^6}{c^{12}}$.

۱۳) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال‌های

$$\text{(a) } I_1=\iint_{(A)}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}dxdy;\quad \text{(b) } I_2=\iint_{(A)}x^ny^ndxdy$$

---

*) درحالت (c)، جسم مفروض، ازچهار بخش متقارن تشکیل شده است که دوتا از آن‌ها در بالای صفحهٔ xy و دوتای دیگر در زیرآن قرار دارند.

(n عددی طبیعی است)؛ که در آن‌ها، (A) عبارت است از حوزهٔ محدود به محورهای مختصات و سهمی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$.

حل. معادله پارامتری منحنی چنین است:

$$x=\cos^4 t,\quad y=\sin^4 t\quad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

خانوادهٔ سهمی‌هایی را در نظر می‌گیریم که به صورت مشابهی (نسبت به مبداء) قرار گرفته باشند:

$$x=\rho\cos^4 t,\quad y=\rho\sin^4 t\quad (0\leqslant\rho\leqslant 1)$$

با واردکردن ρ و t به‌عنوان متغیرهای جدید، خواهیم داشت:

$$J=4\rho\cos^3 t\sin^3 t$$

به‌طوری که

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\sqrt{\rho}\cdot 4\rho\cos^3 t\sin^3 t\,d\rho\,dt=\frac{2}{15};$$

$$I_2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\rho^{2n+1}\cos^{4n+3}t\sin^{4n+3}t\,d\rho\,dt=$$

$$=\frac{2}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{4n+3}t\sin^{4n+3}t\,dt=\frac{2}{n+1}\cdot\frac{[(4n+2)!!]^2}{(8n+6)!!}$$

عبارت اخیررا، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)(2n+2)(2n+3)\cdots(4n+3)}$$

ازاین‌جا، درحالت خاص $n=1$، پاسخ مسألهٔ ۳) از شمارهٔ **۵۹۷** به‌دست می‌آید.

۱۴) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$K=\iint_{(B)}\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^3 dx\,dy$$

که در آن، (B) عبارت است ازحوزهٔ محدود به محورهای مختصات و سهمی

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$$

راهنمائی. فرض کنید: $x=a\rho\cos^4 t$، $y=b\rho\sin^4 t$ $(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$، $0\leqslant\rho\leqslant 1$، $0<a<b)$.

پاسخ: $K=\frac{2}{21}ab$.

۱۵) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$L=\iint\limits_{(D)}\frac{x^2\sin xy}{y}dxdy$$

که در آن، (D) عبارت است از حوزهٔ محدود به چهار سهمی $x^2=ay$، $x^2=by$، $y^2=px$ و $y^2=qx$ (باشرط $0<p<q$ و $0<a<b$).

حل. با تغییر متغیر، به‌صورتی‌که در ۶۰۴، ۴) نشان دادیم [با ۶۰۸، ۵) مقایسه شود]، انتگرال مفروض، به‌این صورت در می‌آید:

$$L=\int\limits_a^b\int\limits_p^q\eta\sin\xi\eta\,d\xi d\eta$$

که با محاسبه‌ای ساده به‌دست می‌آید:

$$L=\frac{\sin pb-\sin pa}{p}-\frac{\sin qb-\sin qa}{q}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان دستگاه مختصات منحنی‌الخط مناسب را، درحالت‌های زیر هم پیدا کرد:

۱۶) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$I=\iint\limits_{(A)}xy\,dxdy$$

به شرطی‌که (A)، چهارضلعی محدود به منحنی‌های زیر باشد:

(a) $y=ax^3$، $y=bx^3$، $y^2=px$، $y^2=qx$؛

(b) $y^3=ax^2$، $y^3=bx^2$، $y=\alpha x$، $y=\beta x$.

راهنمائی. مختصات جدید ξ و η را، با این فرض‌ها وارد کنید:

(a) $y=\xi x^3$، $y^2=\eta x$؛ (b) $y^3=\xi x^2$، $y=\eta x$.

پاسخ: (a) $I=\frac{5}{48}\left(a^{-\frac{6}{5}}-b^{-\frac{6}{5}}\right)\left(q^{\frac{8}{5}}-p^{\frac{8}{5}}\right)$؛

(b) $I=\frac{1}{40}(b^4-a^4)(\alpha^{-10}-\beta^{-10})$.

۱۷) (D) را مثلثی می‌گیریم که با نابرابری‌های $x\geqslant 0$، $y\geqslant 0$ و $x+y\leqslant 1$ معین شده باشد. با فرض $p\geqslant 1$ و $q\geqslant 1$، دستور لیوویل [۵۹۷، ۱۶)] را مستقیماً ثابت کنید*:

$$\iint_{(D)}\varphi(x+y)x^{p-1}y^{q-1}dxdy=B(p,q)\int_0^1\varphi(u)u^{p+q-1}du$$

که در آن، $\varphi(u)$ عبارت است از تابع پیوسته‌ای در بازهٔ $[0,1]$.

اثبات. فرض می‌کنیم

$$x=u(1-v),\quad y=uv$$

یا

$$u=x+y,\quad v=\frac{y}{x+y}$$

با این دستورها، تناظر یک ارزشی بین مثلث (D) بر صفحهٔ xy و مربع $(\Delta)=[0,1;0,1]$ بر صفحهٔ uv برقرار می‌شود (تنها نقطهٔ $x=0$، $y=0$ استثنا است که متناظر با پاره خطی از محور v است). ضمناً

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=u$$

با تغییر متغیر، معلوم می‌شود که انتگرال دوگانه، برابر است با

$$\int_0^1\int_0^1\varphi(u)u^{p+q-1}v^{q-1}(1-v)^{p-1}dudv$$

---

*) قبلاً، آن را از دستور دیریکله ــ که حالت خاصی از آن به ازای $\varphi=1$ است ــ به دست آوردیم.

یا

$$\int_0^1 v^{q-1}(1-v)^{p-1}dv.\int_0^1 \varphi(u)u^{p+q-1}du$$

و چون عامل اول، همان $\beta(p, q)=\beta(q, p)$ است، بنابراین، نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید.

۱۸) به‌کمک همان تغییر متغیرها، می‌توان دستور کلی‌ترزیررا هم ثابت کرد:

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} \varphi(x+y)\frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^{p+q}}dxdy=$$

$$=\beta(p, q)\int_0^1 \frac{\varphi(u)u^{p+q-1}du}{(\alpha u+\gamma)^p(\beta u+\gamma)^q}$$

که در آن، $p, q\geqslant 1$؛ $\alpha, \beta\geqslant 0$؛ $\gamma>0$ و $\varphi(u)$ تابعی پیوسته است. ضمناً، بایدازنتیجهٔ معلوم ۵۳۴، ۲) هم استفاده کرد.

۱۹) می‌توان دستور

$$\int_0^1\int_0^1 f(\alpha\beta)(1-\alpha)^{p-1}\beta^p(1-\beta)^{q-1}d\alpha d\beta=\beta(p, q)\int_0^1 f(v)(1-v)^{p+q-1}dv$$

را به دستور لیوویل تبدیل کرد، به شرطی که فرض کنیم:

$$\alpha=\frac{1-x-y}{1-y},\quad \beta=1-y$$

و ضمناً: $x\geqslant 0$، $y\geqslant 0$ و $x+y\leqslant 1$. ژاکوبین برابر است با $J=\frac{1}{1-y}$*.

۲۰) به‌کمک تغییر متغیرها (برای $z=\text{const}$. دلخواه)، این اتحاد را ثابت کنید [با ۵۹۵، ۷) مقایسه کنید]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2z\sin\varphi\sin\theta)d\varphi d\theta=\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(z\sin\lambda)d\lambda\right\}^2$$

---

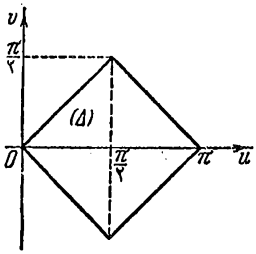
*) ضمناً، نقطهٔ $x=0$، $y=0$ را باید استثنا کرد.

اثبات. اگر در انتگرال دوگانه بافرض

$$\varphi=\frac{u+v}{۲},\quad \theta=\frac{u-v}{۲}$$

تغییر متغیر بدهیم، به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}\iint_{(\Delta)}[\cos(z\cos u)\cos(z\cos v)+$$
$$+\sin(z\cos u)\sin(z\cos v)]\,du\,dv$$



شکل ۷۶

که در آن، (Δ) عبارت است از مربعی که در شکل ۷۶ نشان داده شده است. ولی انتگرال جملهٔ دوم، برابر صفر است ($u=\pi-u'$ قرار دهید) و انتگرال جملهٔ اول، گسترده بر مربع (Δ)، برابر است با دو برابر همین انتگرال در روی مربع $[۰,\frac{\pi}{۲};۰,\frac{\pi}{۲}]$. از این‌جا، نتیجهٔ مطلوب، به‌سادگی به‌دست می‌آید.

§۵. انتگرال دوگانهٔ ناویژه

۶۱۲. انتگرال‌های گسترده بر حوزهٔ نامتناهی. مفهوم انتگرال دوگانه را در حالت حوزهٔ نامتناهی، یعنی وقتی که حوزه تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد و یا در حالتی که تابع مفروض نامتناهی باشد، می‌توان، شبیه فصل سیزدهم دربارهٔ انتگرال‌های ساده، تعمیم داد.

ابتدا به حالت حوزهٔ نامتناهی (P) می‌پردازیم. تمامی صفحه یا بخشی از آن، واقع در بیرون یك دایره یا یك شکل مستوی محدود، یك زاویه وغیره را می‌توان نمونه‌هایی از این گونه حوزه دانست. دربارهٔ مرزهای این حوزه، فرض می‌شود که، در هر بخش محدود خود، دارای مساحت صفر باشد (مثلا از منحنی‌های قطعه به‌قطعه هموار تشکیل شده باشد). وقتی که تابعی مثل $f(x,y)$ در حوزهٔ (P) مفروض باشد، آن را انتگرال‌پذیر، به معنای عادی کلمه، در هر بخش محدود و تربیع‌پذیر حوزهٔ (P) می‌گیریم.

با رسم منحنی کمکی (K') (بازهم بامساحت صفر)، از حوزهٔ (P)، بخش محدود و همبند (P') را، از آن، جدا می‌کنیم؛ دراین صورت، بنابرفرض، انتگرال

$$\iint_{(P')} f(x, y)dxdy \qquad (۱)$$

وجود دارد. اکنون منحنی (K) را، همراه باهمهٔ نقطه‌های آن، به سمت بی‌نهایت دور می‌کنیم، تاجایی که کمترین فاصلهٔ R از مبداء تا نقطه‌های این منحنی، تا بی‌نهایت ترقی کند. آن وقت، حوزهٔ متغیر (P') ــ که از حوزهٔ (P) جدا شده بود ــ به‌تدریج همهٔ نقطه‌های حوزهٔ (P) را در بر می‌گیرد: هر نقطهٔ (P)، وقتی که R به قدر کافی بزرگ شود، به (P') تعلق خواهد داشت.

حد (متناهی یا نامتناهی) انتگرال (۱) را، به‌ازای $R\to\infty$، انتگرال (ناویژه) تابع $f(x, y)$ در حوزهٔ نامحدود (P) می‌نامند و به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\iint_{(P)} f(x, y)dxdy = \lim_{R\to\infty} \iint_{(P')} f(x, y)dxdy \qquad (۲)$$

انتگرال (۲) را، در حالتی که حدی متناهی داشته باشد، متقارب و، در حالت عکس، متباعد گویند. تابعی را که، برای آن، انتگرال (۲) متقارب باشد، انتگرال‌پذیر (به معنای ناویژه) در حوزهٔ (P) نامند.

در حالتی که تابع $f(x, y)$ مثبت باشد، کافی است دنبالهٔ معین منحنی‌های

$$(K_۱), (K_۲), \dots, (K_n), \dots$$

را که به سمت بی‌نهایت دور می‌شوند و حوزه‌های

$$(P_۱), (P_۲), \dots, (P_n), \dots$$

را که به وسیلهٔ این منحنی‌ها جدا شده‌اند، در نظر بگیریم و وجود مرز متناهی برای

$$I = \sup_n \left\{ \iint_{(P_n)} f(x, y)dxdy \right\}$$

مفروض بگیریم تا، از آن‌جا، تقارب انتگرال (۲) نتیجه شود.

درواقع، حوزهٔ دلخواه (P') ــ که به‌وسیلهٔ منحنی (K') از (P) جدا شده است ــ وقتی n به قدر کافی بزرگ شود، به تمامی در (P_n) واقع خواهد شد. به‌نحوی که

$$\iint_{(P')} f(x, y)dxdy \leqslant \iint_{(P_n)} f(x, y)dxdy$$

به تمامی در (P_n) واقع خواهد شد. به نحوی که

$$\iint\limits_{(P')} f(x, y)dxdy \leqslant \iint\limits_{(P_n)} f(x, y)dxdy$$

و به خصوص

$$\iint\limits_{(P')} f(x, y)dxdy \leqslant I \qquad (۳)$$

از طرف دیگر، از روی $\varepsilon > ۰$ دلخواه، می‌توان $n_۰$ را طوری پیدا کرد که داشته باشیم:

$$\iint\limits_{(P_{n_۰})} f(x, y)dxdy > I - \varepsilon$$

وقتی R به‌قدر کافی بزرگ باشد*، حوزهٔ (P')، به نوبهٔ خود، $(P_{n_۰})$ را در برمی‌گیرد، در نتیجه به‌طور مسلم داریم:

$$\iint\limits_{(P')} f(x, y)dxdy \geqslant I - \varepsilon \qquad (۴)$$

نابرابری‌های (۳) و(۴)، باهم، ثابت می‌کنند که عدد I، در تعریف انتگرال دوگانه‌صدق می‌کند.

به‌کمک این ملاحظه‌ها، به سادگی می‌توان قضیهٔ مربوط به مقایسهٔ انتگرال‌ها را، شبیه قضیهٔ‌شمارهٔ ۴۷۴، ثابت کرد. سپس، اگر فرض‌های قبل‌را دربارهٔ تابع $f(x, y)$ حفظ کنیم، آن وقت، می‌توانیم از تقارب تابع $|f(x, y)|$ گسترده برحوزهٔ نامحدود (P)، تقارب انتگرال مشابه را، برای تابع $f(x, y)$ نتیجه بگیریم.

برای اثبات، دوتابع غیرمنفی زیررا در نظر می‌گیریم:

$$f_+(x, y) = \frac{|f(x, y)| + f(x, y)}{۲}, \quad f_-(x, y) = \frac{|f(x, y)| - f(x, y)}{۲}$$

روشن است که

---

*) همیشه، کوچکترین فاصلهٔ نقطه‌های منحنی (K') ازمبداء را، با R نشان می‌دهیم.

$$f_+(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & (f(x,y)\geqslant 0)\\ 0 & (f(x,y)<0)\end{cases}$$

$$f_-(x,y)=\begin{cases} -f(x,y) & (f(x,y)\leqslant 0)\\ 0 & (f(x,y)>0)\end{cases}$$

از انتگرال‌پذیری تابع $|f(x,y)|$، تقارب انتگرال‌ها برای تابع‌های

$$f_+(x,y)\leqslant|f(x,y)|,\quad f_-(x,y)\leqslant|f(x,y)|$$

و در نتیجه، برای تابع زیر، نتیجه می‌شود:

$$f(x,y)=f_+(x,y)-f_-(x,y)$$

عکس این حکم هم درست است، یعنی: از تقارب انتگرال تابع $f(x,y)$ گسترده برحوزهٔ نامحدود (P)، تقارب انتگرال $|f(x,y)|$ هم نتیجه می‌شود. شبیه چنین حکمی درنظریهٔ انتگرال‌های ناویژهٔ ساده، وجودندارد: می‌دانیم [۴۷۵] که، درآن‌جا، انتگرال‌های متقارب غیرمطلق هم می‌تواند وجود داشته باشد.

اثبات را درشمارهٔ بعد می‌دهیم.

۶۱۳. قضیهٔ تقارب مطلق، در انتگرال‌های دوگانهٔ ناویژه. هر انتگرال متقارب

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (۵)$$

الزاماً متقارب مطلق است، یعنی همزمان باآن، انتگرال زیرهم متقارب می‌شود:

$$\iint\limits_{(P)} |f(x,y)|\,dx\,dy \qquad (۶)$$

اثبات را با برهان خلف می‌دهیم. با انتخاب دنبالهٔ حوزه‌های $\{(P_n)\}$، به‌نحوی‌که باگسترش خود، به تدریج تمامی حوزهٔ (P) را دربرگیرند، خواهیم داشت:

$$\iint\limits_{(P_n)} |f(x,y)|\,dx\,dy \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

بدون این‌که به‌کلی‌بودن مطلب لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض‌کرد که، به ازای هرمقدار n، نابرابری زیر برقرار است:

$$\iint\limits_{(P_{n+1})} |f(x,y)|dxdy > ۳\iint\limits_{(P_n)} |f(x,y)|dxdy + ۲n$$

این نتیجه را می‌توان، درصورت لزوم، با تقسیم دنبالهٔ $\{(P_n)\}$، یعنی با استخراج دنبالهٔ جزئی از آن و شماره‌گذاری مجدد، به‌دست آورد.

اگر تفاضل حوزه‌های (P_{n+1}) و (P_n) را به (p_n) نشان دهیم،

$$\iint\limits_{(p_n)} |f(x,y)|dxdy > ۲\iint\limits_{(P_n)} |f(x,y)|dxdy + ۲n$$

ولی

$$|f(x,y)| = f_+(x,y) + f_-(x,y)$$

به‌نحوی که

$$\iint\limits_{(p_n)} |f(x,y)|dxdy = \iint\limits_{(p_n)} f_+(x,y)dxdy + \iint\limits_{(p_n)} f_-(x,y)dxdy$$

فرض کنید، از دو انتگرال سمت راست، مثلا اولی بزرگتر باشد. دراین صورت

$$\iint\limits_{(p_n)} f_+(x,y)dxdy > \iint\limits_{(P_n)} |f(x,y)|dxdy + n$$

اگر به‌جای انتگرال دوگانهٔ سمت چپ، مجموع داربو را ــ که به قدرکافی به آن نزدیك است ــ قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\sum_i m_n^{(i)} p_n^{(i)} > \iint\limits_{(P_n)} |f(x,y)|dxdy + n^*$$

می‌توان، در این مجموع، تنها عامل‌هایی را نگه داشت که متناظر با $m_n^{(i)} > ۰$ باشند؛ مجموعهٔ این عنصرهای $(p_n^{(i)})$ را با $(\tilde{p}_n)$ نشان می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

---

*) دراین‌جا $(p_n^{(i)})$ معرف بخش‌هایی است که از تقسیم حوزهٔ (p_n) به دست آمده‌اند؛ $m_n^{(i)}$ هم متناظر است با مرزهای دقیق پایینی تابع $f_+(x,y)$.

$$\iint\limits_{(\widetilde{P}_n)} f(x, y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(\widetilde{p}_n)} f_+(x, y)dxdy > \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|dxdy + n$$

حوزه‌ای راکه از (P_n) و (p_n) تشکیل شده است، با (P_n) نشان می‌دهیم. چون

$$\iint\limits_{(P_n)} f(x, y)dxdy \geqslant -\iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)\,dxdy$$

بنابراین، با جمع جمله به جملهٔ این نابرابری با نابرابری قبلی، پیدا می‌کنیم:

$$\iint\limits_{(\widetilde{P}_n)} f(x, y)dxdy > n$$

حوزهٔ $(\widetilde{p}_n)$ و، همراه با آن، حوزهٔ $(\widetilde{P}_n)$ را می‌توان چنان تغییر شکل دادکه، از آخری، حوزهٔ همبند (P'_n) به دست آید و، ضمناً اختلاف مساحت آن از $(\widetilde{P}_n)$ آن‌قدر کم باشدکه بازهم نابرابری زیر برقرار شود:

$$\iint\limits_{(P'_n)} f(x, y)dxdy > n$$

اگر بخش‌های جدا شدهٔ حوزه را، به وسیلهٔ «راهروهای» باریك بامساحت کلی به‌قدرکافی کوچك به‌هم وصل کنیم، می‌توانیم به‌این نتیجه برسیم.

ازاین‌جا روشن است که انتگرال (۵)، علی‌رغم فرض، نمی‌تواند متقارب باشد. این تناقض، قضیهٔ ما را ثابت می‌کند.

توجه کنیم که تفاوت اصلی حالت‌های یك بعدی و دوبعدی، درست به قسمت آخر بحث مربوط می‌شود. حوزهٔ خطی ناهمبند را، که از بازه‌های جداگانه تشکیل شده است، نمی‌توان با تغییرشکل‌های کوچك، به‌حوزه‌ای همبند (یعنی به بازه‌ای یك‌تکه) تبدیل کرد.

این قضیه، همراه با توضیح‌های شمارهٔ قبل، مسألهٔ تقارب و محاسبهٔ انتگرال ناویژه از تابع دلخواه را، منجر به‌همان مسأله، برای تابع‌های مثبت (نامنفی) می‌کند. در شمارهٔ بعد، به‌همین مطلب می‌پردازیم.

۶۱۴ تبدیل انتگرال دوگانه به انتگرال تکراری. ابتدا به‌حالتی می‌پردازیم که تابع $f(x, y)$ نامنفی باشد. اگر این تابع، در حوزه‌ای نامحدود به شکل دلخواه داده شده باشد، با این فرض اضافی که مقدار آن در بیرون این حوزه برابر صفر است، همیشه می‌توان کار را به‌حالت حوزهٔ مستطیلی نامحدود منجر کرد. فرض می‌کنیم صحبت بر سر مستطیل $[a, b; c, +\infty]$ باشد، که از یک طرف نامتناهی است (a ، b و c عددهای متناهی و ضمناً $b>a$). بازهم فرض می‌کنیم که، در هرمستطیل متناهی $[a, b; c, d]$ (به ازای $d>c$ دلخواه)، هم انتگرال دوگانه، و هم انتگرال سادهٔ نسبت به y، و هر دو به معنای ویژه، وجود داشته باشد، به‌نحوی که [۵۹۴] دستور زیر برقرار باشد:

$$\iint_{[a, b; c, d]} f\,dx\,dy = \int_a^b dx + \int_c^d f\,dy \qquad (۷)$$

اگر بخواهیم چنین دستوری را برای مستطیل نامتناهی، یعنی برای حالت $d = +\infty$، معین کنیم، فرض می‌کنیم، انتگرال تکراری زیر متقارب باشد:

$$I = \int_a^b dx \int_c^{\infty} f\,dy$$

چون، برای هر $d>c$ دلخواه، داریم:

$$\iint_{[a, b; c, d]} f\,dx\,dy \leqslant I$$

با توجه به آن چه در **۶۱۲** گفته شد، می‌توان تقارب انتگرال دوگانه را نتیجه گرفت:

$$\iint_{[a, b; c, +\infty]} f\,dx\,dy = \lim_{d \to \infty} \iint_{[a, b; c, d]} f\,dx\,dy \qquad (۸)$$

که به روشنی، از I تجاوز نمی‌کند. تنها این مطلب باقی می‌ماند که ثابت کنیم، انتگرال دوگانه، درواقع، برابر است با I.

اگر انتگرال $\int_c^{\infty} f\,dy$ که تابعی از x است، به معنای ویژه انتگرال‌پذیر و، بنابراین، به وسیلهٔ عدد ثابتی مثل L کران‌دار باشد، به‌طور مسلم خواهیم داشت:

$$\int_c^d f(x, y)\,dy \leqslant L$$

در چنین حالتی، بنا بر قضیهٔ II شمارهٔ **۵۲۶** داریم:

$$I = \lim_{d \to +\infty} \int_a^b dx \int_c^d f\,dy$$

که با مقایسهٔ آن با (۷) و (۸)، به‌نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

این حکم، درحالتی‌هم‌که انتگرال I، به‌معنای ناویژه متقارب باشد، به قوت خود باقی است. مثلا فرض‌کنیم، b تنها نقطهٔ خاص برای تابع $\int_c^{\infty} f\,dy$ (نسبت به x) باشد. آن وقت، ازآن چه ثابت شد، به‌ازای $0 < \eta < b-a$، داریم:

$$\iint_{[a,b-\eta;\,c,+\infty]} f\,dx\,dy = \int_a^{b-\eta} dx \int_c^{+\infty} f\,dy \qquad (۹)$$

و هردو طرف برابری، وقتی $\eta \to 0$، به سمت I میل می‌کنند. با توجه به‌این‌که

$$I \geqslant \iint_{[a,b;\,c,+\infty]} f\,dx\,dy \geqslant \iint_{[a,b-\eta;\,c,+\infty]} f\,dx\,dy$$

دوباره، نتیجه می‌گیریم که‌انتگرال‌های دوگانه و تکراری، روی مستطیل $[a,b;c,+\infty[$، برابرند.

توجه کنیم‌که، اگر انتگرال تکراری ناویژه، مقداری برابر بی‌نهایت داشته باشد، با توجه به دورابطهٔ قبل، مقدار انتگرال دوگانه هم، بی‌نهایت خواهد شد.

به‌این ترتیب، شبیه (۷)، داریم:

$$\iint_{[a,b;\,c,+\infty]} f\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^{+\infty} f\,dy \qquad (۱۰)$$

ضمناً، ازوجود انتگرال تکراری سمت راست، وجود انتگرال دوگانه هم نتیجه می‌شود. برابری، برای حالتی هم‌که انتگرال سمت راست، برابر $+\infty$ باشد، درست است.

به حالتی می‌پردازیم‌که مستطیل $[a,+\infty;\,c,+\infty[$، در دوجهت عمود برهم، تابی‌نهایت ادامه‌داشته باشد. دراین‌جا هم‌فرض می‌کنیم‌که درهرمستطیل متناهی $[a,b;c,d[$ (به ازای $b > a$ و $d > c$ دلخواه)، هم انتگرال دوگانه وهم انتگرال سادهٔ نسبت به y، به معنای ویژه، وجود داشته باشد.

دراین حالت هم، می‌توان دستور

$$\iint\limits_{[a,+\infty;\,c,+\infty]} f\,dx\,dy = \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f\,dy \qquad (۱۱)$$

را، بافرض متقارب بودن انتگرال تکراری سمت راست، ثابت کرد. این اثبات، به سادگی و با گذر به حد در (۱۰) (به ازای $b \to +\infty$) به‌دست آورد، همان‌طور که (۱۰) را از (۹) به دست آوردیم. در این جا هم، اگر مقدار انتگرال تکراری برابر $+\infty$ باشد، مقدار انتگرال دوگانه هم، چنین خواهد بود.

اکنون، به صورتی کوتاه، به حالتی می‌پردازیم که تابع $f(x, y)$، تغییر علامت بدهد. برای مشخص بودن وضع، به دستور (۱۰) اکتفا می‌کنیم. در مستطیل متناهی $[a, b; c, d]$ (به ازای $d > c$)، ضمن حفظ فرض‌های قبل، ضمناً، درکنار تقارب انتگرال تکراری از خود تابع

$$\int_a^b dx \int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy$$

دراین‌جا، تقارب انتگرال تکراری قدرمطلق آن راهم مفروض می‌گیریم:

$$\int_a^b dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)|\,dy$$

در این صورت، انتگرال‌های تکراری مشابه، چه برای تابع $f_+(x, y)$ و چه برای $f_-(x, y)$ [آخرشمارهٔ **۶۱۲** را ببینید]، وجودخواهند داشت. بااستفاده از دستور (۱۰) در مورد این تابع‌های غیرمنفی به‌طور جداگانه و، سپس، کم کردن نتیجه‌ها از یکدیگر، به درستی این دستور برای تابع مفروض $f(x, y)$ هم، اطمینان پیدا می‌کنیم.

۶۱۵. انتگرال از تابع‌های نامحدود. فرض می‌کنیم، تابع $f(x, y)$ در حوزهٔ محدود (P) مفروض، ولی در همسایگی نقطه‌های M_1، M_2، ... M_n، نامحدود باشد؛ در بخش‌های دلخواه حوزهٔ (P)، که شامل این نقطه‌ها نباشند، تابع را، به معنای ویژه، انتگرال‌پذیر می‌گیریم.

اکنون، نقطه‌های خاص M_1، M_2، ... را، با دوره کردن آن‌ها به‌وسیلهٔ منحنی‌های (k_1)، (k_2)، ... جدا می‌کنیم. اگر همسایگی‌های نقطه‌های خاص محدود به این منحنی‌ها را ازحوزهٔ (P) خارج کنیم، به‌حوزهٔ (P') می‌رسیم که، برای آن، بنابر فرض، انتگرال

$$\iint\limits_{(P')} f(x, y)\,dx\,dy \qquad (۱*)$$

متقارب است. منحنی‌های (k_1)، (k_2)، ... را به نقطه‌های مفروض آن قدر نزدیک می‌کنیم که بزرگترین فاصلهٔ نقطه‌های واقع بر این منحنی‌های (k) تا نقطهٔ نظیر M ــ که آن را ρ می‌نامیم ــ به سمت صفر میل کند*. توجه کنیم که، در این صورت، مساحت همسایگی‌های مفروض هم (که کمتر از $\pi\rho^2$ است)، به سمت صفر میل می‌کند.

انتگرال (ناویژه) از تابع نامحدود $f(x, y)$ در حوزهٔ (P)، به عنوان حد انتگرال (۱*)، به ازای $\rho \to 0$، تعریف می‌شود:

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)dxdy = \lim_{\rho \to 0} \iint\limits_{(P')} f(x, y)dxdy \qquad (۲^*)$$

نقطه‌های خاص، در طول منحنی‌های خاص هم، می‌توانند واقع باشند، که ما همیشه مساحت آن‌ها را صفر فرض خواهیم کرد. در این حالت، باید این منحنی‌ها را، به وسیلهٔ همسایگی‌های «فشرده» به آن‌ها، جدا کنیم، که اساساً، هیچ چیز تازه‌ای به وجود نمی‌آورد.

با وجود این، هنوز لازم است توضیح‌های بیشتری دربارهٔ روند این حد داده شود. فرض کنیم، منحنی خاص (l) به وسیلهٔ دورهٔ (k) احاطه شده باشد. اگر نقطهٔ A را روی (k) بگیریم، از بین فاصله‌های این نقطه تا نقطه‌های مختلف B بر (l)، بزرگترین فاصله‌ای وجود دارد که، آن را، ρ_1 می‌نامیم؛ از طرف دیگر، اگر جای نقطهٔ A بر (k) عوض شود، بین همهٔ ρ_1ها، می‌توان بزرگترین را پیدا کرد. این عدد، به مفهومی، درجهٔ دور بودن دورهٔ (k) از منحنی (l) را مشخص و روند حدی را، با شرط $\rho \to 0$، توجیه می‌کند (وقتی که با چند منحنی سروکار داشته باشیم، بزرگترین عدد ρ، از بین عددهای مشابه در نظر گرفته می‌شود). در این‌جا، همچنین می‌توان ثابت کرد که، مساحت همسایگی مفروض هم، همراه با ρ، به سمت صفر میل می‌کند.

بالاخره، می‌توان تعریف انتگرال ناویژه را، برای حالتی که حوزه نامحدود و تابع تعریف شده در آن، در فاصله‌ای متناهی، دارای نقطه‌های خاص باشد، تعمیم داد.

یادداشت. اگر ضمن ساختن انتگرال ناویژه، علاوه بر نقطه‌ها (یا منحنی‌های) خاص، بعضی از نقطه‌ها (یا منحنی‌ها) را جدا می‌کردیم، که در واقع، خاص نباشند، نه در وجود و نه در مقدار حدی که با انتگرال بیان می‌شود، تأثیری نداشت. مثلا، فرض کنیم، نقطهٔ غیرخاص A را به نقطه‌های خاص اضافه کنیم و، به‌جز آن، با توجه به مفهوم دقیق تعریف

---

*) به‌جای آن، می‌توانستیم، بزرگترین قطر همهٔ حوزه‌های محدود به این منحنی‌های (k) را به سمت صفر میل دهیم.

انتگرال ناویژه، باید همسایگی این نقطهٔ A را هم جداکنیم. ولی تابع، در نزدیکی A، کران‌دار است و مقدار انتگرال در همسایگی مفروض، همراه با مساحت آن، برابر صفر می‌شود.

به همهٔ حالت‌های انتگرال‌های ناویژهٔ نامبرده، آن‌چه‌که در شماره‌های **۶۱۲** تا **۶۱۴** بیان کردیم، منتقل می‌شود.

قبل ازهمه، این قضیه درست است که: اگر انتگرال دوگانه مفروض متقارب باشد، آن وقت، الزاماً متقارب مطلق خواهد بود. اثبات، کاملا شبیه شمارهٔ **۶۱۳** است.

آن‌چه‌که به تبدیل انتگرال دوگانه، به‌انتگرال تکراری، مربوط می‌شود، در این‌جا هم کافی است به حالتی اکتفا کنیم که حوزهٔ (P)، یك مستطیل (متناهی) $[a, b; c, d]$ است. می‌توان ثابت کرد که برای تابع غیر منفی $f(x, y)$، دستور (۷) به‌فرض وجود انتگرال تکراری (که مستلزم وجود انتگرال دوگانه هم می‌باشد)، برقرار است.

ضمناً، باید وضع مفروض نقطه‌های خاص تابع را، بازهم دقیق‌تر کرد*. از حالتی آغاز می‌کنیم که، این نقطه‌ها، برخط افقی (مثلا، $y=d$) ویا، کلی‌تر، بریك منحنی واقع باشند که با معادلهٔ صریح

$$y=y(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

بیان می‌شود. برای این حالت، اثبات درست شبیه شمارهٔ **۶۱۴**، به ازای $d=+\infty$، است. ازاین‌جا، به حالتی می‌رویم که نقطه‌های خاص بریك خط قائم (مثلا $x=b$) قرار دارند: بحث، مثل حالت قبل، به ازای $b=+\infty$، انجام می‌گیرد. اگر تابع مفروض، تغییر علامت بدهد، باید وجود انتگرال تکراری را، برای تابع $|f(x, y)|$، مفروض بگیریم.

تعمیم مطلب، برای حالتی که با چند منحنی یا خط راست سرو کار داریم و یا با حالت مستطیل نامتناهی با ویژگی فاصله‌های متناهی، روبه‌رو هستیم، روشن است.

۶۱۶. تغییر متغیر در انتگرال‌های ناویژه. فرض کنید، در صفحه‌های xy و $\xi\eta$، به ترتیب، حوزه‌های محدود (D) و (Δ) را، که با دستورهای تبدیل

$$\begin{cases} x=x(\xi, \eta) \\ y=y(\xi, \eta) \end{cases} \qquad (۱۲)$$

---

*) فرض می‌شود که دستور (۷)، برای مستطیل جزئی دلخواه، که در آن، نقطه‌های خاص وجود ندارد، درست است.

و یا عکس آن‌ها

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \qquad (12a)$$

با هم مربوط‌اند، با رعایت همهٔ شرط‌ها که، دربارهٔ آن‌ها، در شمارهٔ **۶۰۳** گفت و گو کردیم، داشته باشیم.

سپس، فرض کنید، تابع $f(x, y)$ در تمامی حوزهٔ (D)، به جز تعدادی متناهی نقطه‌ها یا منحنی‌های جداگانه (که در آن‌ها، بی‌نهایت می‌شود)، پیوسته باشد.

ثابت می‌کنیم که، با این شرط‌ها، برابری

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta)|\ y(\xi, \eta)|J(\xi, \eta|d\xi d\eta \qquad (13)$$

وقتی برقرار است که تنها یکی از این انتگرال‌ها متقارب باشد؛ تقارب انتگرال دیگر نیز، از این‌جا نتیجه می‌شود.

درواقع، اگر نقطه‌ها و منحنی‌های خاص انتگرال اول، به‌وسیلهٔ همسایگی‌هایی در حوزهٔ (D) جدا شوند، آن وقت، در حوزهٔ (Δ) هم، نقطه‌ها یا منحنی‌های خاص انتگرال دوم، به‌وسیلهٔ همسایگی‌های نظیر، جدا خواهند شد. فرض کنید، در این‌ضمن، حوزهٔ (D') درصفحهٔ xy وحوزهٔ (Δ') درصفحهٔ $\xi\eta$، به دست آید، آن وقت، از روی دستور (۲۱) شمارهٔ **۶۰۹** داریم:

$$\iint\limits_{(D')} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{(\Delta')} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))|J(\xi, \eta)|d\xi d\eta \qquad (14)$$

بافرض پیوستگی متناظر بین حوزه‌های (D) و (Δ) در هردو طرف*، به سادگی دیده می‌شود که، با «فشرده شدن» همسایگی‌ها برصفحهٔ xy در اطراف نقطه‌ها یا منحنی‌ها، همین روند در مورد همسایگی‌های واقع برصفحهٔ $\xi\eta$ هم پیش خواهد آمد و برعکس. ازاین‌جا روشن است که، ضمن عبور به‌حد در رابطهٔ قبل، از تقارب یکی از انتگرال‌ها، می‌توانیم تقارب دیگری و، همراه با آن، وجود برابری (۱۳) را نتیجه بگیریم.

---

*) همهٔ منحنی‌هایی که، دراین شماره، دربارهٔ آن‌ها صحبت می‌شود، قطعه به‌قطعه هموار فرض می‌شوند.

**) ما به پیوستگی تابع‌های (۱۲) و (۱۲a) نظرداریم.

حتی می‌توان فرض کرد که در نقطه‌های جداگانهٔ حوزهٔ (Δ) یا درطول منحنی‌های جداگانهٔ واقع بر آن (که بامنحنی‌های خاص واقع دراین‌حوزه، متقاطع نباشند)، ژاکوبین $J(\xi, \eta)$ و، همراه با آن، تابع زیر انتگرال در انتگرال دوم، بی‌نهایت شود. با وجودی که نقطه‌ها و منحنی‌های متناظر صفحهٔ xy، برای انتگرال اول، خاص نیستند، جداکردن آن‌ها، باتوجه به یادداشت شمارهٔ قبل، اشکالی ایجاد نمی‌کند و، بافرض‌های جدید نتیجه‌گیری به اعتبار خود باقی می‌ماند.

باید توجه داشت که، دراین حالت، اغلب پیش می‌آید که پیوستگی یا تناظرمتقابل یك ارزشی، در نقطه‌های جداگانه یا در طول منحنی‌های جداگانه، ازبین برود. در چنین وضعی، باید از ملاحظه‌های شمارهٔ ۶۰۶، ۴° استفاده کرد [با پایان شمارهٔ ۶۰۹ مقایسه کنید].

سرانجام به‌حالتی می‌پردازیم که، دست‌کم، یکی‌از حوزه‌های (D) و (Δ) نامتناهی باشد.

اگر هر دوحوزه تا بی‌نهایت امتداد داشته باشند و، ضمناً، نقطه‌های آن‌ها، که در فاصله‌های محدود قرار دارند، به وسیلهٔ رابطهٔ (۱۲) یا (۱۲a)، به‌هم مربوط باشند، آن وقت، باجداکردن بخش‌های متناظر محدود (D') و (Δ') ازاین حوزه‌ها، به‌وسیلهٔ منحنی‌ها و با رعایت شرط‌های قبلی، همان برابری (۱۴) را خواهیم داشت. چون منحنی‌های نامبرده، تنها به‌طور همزمان می‌توانند تا بی‌نهایت دورشوند، تنها این می‌ماند که در (۱۴) به سمت حد عبورکنیم، تا به (۱۳) برسیم؛ ضمناً دوباره، از تقارب یکی از انتگرال‌ها، تقارب دیگری هم نتیجه می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم، حوزهٔ (D) تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد، ولی‌حوزهٔ (Δ) محدود باشد، و نقطه‌های حوزهٔ (D) متناظر باشند باهمهٔ نقطه‌های حوزهٔ (Δ)، به‌استثنای نقطه‌ها (یا منحنی‌های) جداگانه ــ که متناظر با بخش بی‌نهایت دور دورهٔ حوزهٔ (D) هستند. با جداکردن بخش محدود حوزهٔ (D) به وسیلهٔ منحنی، به‌کمك منحنی متناظر در حوزهٔ (Δ) این نقطه‌ها (یا منحنی‌ها) را جدا می‌کنیم وحوزه‌های (D') و (Δ') را به‌دست می‌آوریم و در موردآن‌ها، بحث قبلی‌را ادامه می‌دهیم و غیره.

توجه کنیم که، تغییر متغیرها، همراه باعبور به انتگرال تکراری، وسیلهٔ کاملا مناسبی است‌برای اثبات وجود انتگرال دوگانهٔ ناویژه. مثال‌های زیادی ازاین نوع‌را، درشمارهٔ بعد پیدا می‌کنید.

۶۱۷. مثال‌ها. ۱) شرط تقارب‌هرکدام ازانتگرال‌های زیررا پیداکنید $(m > 0)$:

$$\text{(a)} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}, \quad \text{(b)} \iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m},$$

$$\text{(c)} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^m}$$

حل. این انتگرال‌ها، در مختصات قطبی، به‌این صورت در می‌آیند:

$$\text{(a)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{rdr}{r^{2m}} = 2\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2m-1}}, \quad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{dr}{r^{2m-1}},$$

$$\text{(c)} \quad 2\pi \int_0^1 \frac{rdr}{(1-r^2)^m}.$$

و روشن است که، شرط تقارب، به این‌صورت است:

$$\text{(a)}\ m<1, \quad \text{(b)}\ m>1, \quad \text{(c)}\ m<1$$

۲) همین مسأله را دربارهٔ انتگرال‌های زیر حل کنید:

$$\text{(a)} \iint\limits_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0 \\ x^\alpha+y^\beta\leqslant 1}} \frac{dxdy}{(x^\alpha+y\beta)^m}, \quad \text{(b)} \iint\limits_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0 \\ x^\alpha+y^\beta\geqslant 1}} \frac{dxdy}{(x^\alpha+y\beta)^m},$$

$$\text{(c)} \iint\limits_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0 \\ x^\alpha+y^\beta\leqslant 1}} \frac{dxdy}{(1-x^\alpha-y\beta)^m}$$

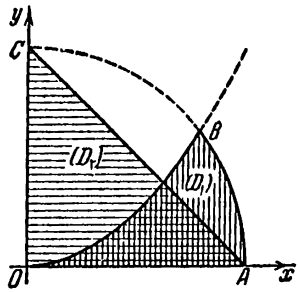
راهنمائی. این تبدیل‌ها را انجام دهید:

$$x=r^{\frac{2}{\alpha}}\cos^{\frac{2}{\alpha}}\theta, \quad y=r^{\frac{2}{\beta}}\sin^{\frac{2}{\beta}}\theta$$

پاسخ: (a) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>m$، (b) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<m$، (c) $m<1$.

در حالتی هم که تغییر متغیرها، در مسأله‌های ۱) و ۲)، به قطاع بین شعاع‌های $\theta=\theta_0$ و $\theta=\theta_1$ محدود شود، همین پاسخ‌ها به دست می‌آید.

۳) اگر حوزهٔ تغییر (D_1) از متغیرهای x و y، مثلث منحنی‌الخط AOB باشد



شکل ۷۷

(شکل ۷۷)، که محدود است به پاره خط OA از محور x، کمان OB از سهمی $y=x^2$ و کمان AB از دایرهٔ $x^2+y^2=1$، آن‌گاه، انتگرال

$$\iint\limits_{(D_1)} \frac{dxdy}{x^2+y^2}$$

که مبداء، نقطهٔ خاص آن است، وجود دارد (هر-چند که برای دایره، وجود ندارد). در واقع، با عبور به مختصات قطبی، انتگرال، به‌این صورت درمی‌آید*:

$$\int_0^{\delta} d\theta \int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{1} \frac{dr}{r} = \int_0^{\delta} \ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta$$

که از آن‌جا، نتیجهٔ مطلوب، به دست می‌آید.

۴) به‌همین ترتیب، اگر مثلث AOC (همان شکل) را، به‌عنوان حوزهٔ (D_2) انتخاب کنیم، می‌توان وجود انتگرال

$$\iint\limits_{(D_2)} \frac{dxdy}{1-x^2-y^2}$$

را ــ که A و C، نقطه‌های خاص آن هستند ــ ثابت کرد.

چون در مختصات قطبی، معادلهٔ خط AC به صورت $r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$ درمی‌آید، بنابراین، انتگرال مفروض، به انتگرال زیر منجر می‌شود:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{rdr}{1-r^2} = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sin^2\theta}{1+\sin 2\theta}\,d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\,d\varphi$$

---

*) زاویهٔ بین شعاع OB و محور قطبی را، با δ نشان داده‌ایم.

و واضح است که وجود دارد.

۵) براساس انتگرال‌هایی که درمسألهٔ ۱) مورد بررسی قرار دادیم، معیار زیر برای تقارب انتگرال‌ها، پایه‌ریزی شده است:

اگر حوزهٔ (D): (a) محدود وشامل نقطهٔ مبداء باشد، یا (b) نامحدود باشد، ولی شامل مبداء نباشد، آن‌گاه، انتگرال تابع $f(x, y)$ در (D)، به شرطی متقارب می‌شود که بتواند به صورت زیردرآید:

$$f(x, y)=\frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^m}$$

که درآن، φ تابعی محدود باشد و، برحسب حالت، داشته باشیم:

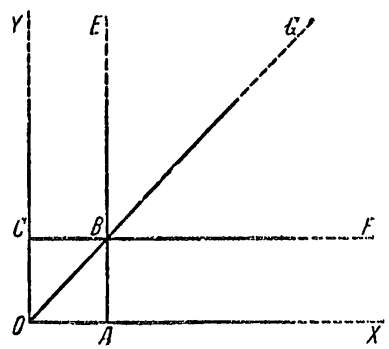
$$m<1 \quad \text{(a)} \qquad m>1 \quad \text{(b)}.$$

به سادگی می‌توان، همین معیار را، برای حالتی که به‌جای نقطهٔ مبداء، نقطهٔ دلخواه (x_0, y_0) گرفته شود، به‌کار برد.

۶) مطلوب است تحقیق تقارب انتگرال دوگانه ازتابع

$$f(x, y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

گسترده بر: (a) مثلث OBC (شکل ۷۸)، (b) مربع $OABC$، (c) نوار نامتناهی $YCBE$، (d) مثلث نامتناهی EBG، (e) مربع نامتناهی EBF.



شکل ۷۸

پاسخ: در حالت‌های (a) و(d)، انتگرال، متقارب نیست (همین وضع، در مورد حالت‌های (b) و (e) هم وجود دارد)؛ در حالت (c)، انتگرال متقارب و برابر $\frac{\pi}{4}$ است.

۷) فرض کنید، تابع‌های $f(x)$ و $g(y)$، اولی دربازهٔ $[a, b]$ و دومی دربازهٔ $[c, d]$، به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر باشند (هرکدام ازاین بازه‌ها، می‌توانند متناهی یانامتناهی باشند). ثابت کنید که، دراین صورت، انتگرال دوگانهٔ

$$\iint\limits_{[a,b;\,c,d]} f(x)g(y)\,dx\,dy=\int_a^b f(x)dx.\int_c^d g(y)dy$$

هم متقارب می‌شود [با ۶۰۵، ۹) مقایسه کنید].

مسأله، به سادگی، به‌حالت تابع نامنفی منجر می‌شود وما هم، به همین حالت اکتفا می‌کنیم.

اگر هردو بازه را متناهی بگیریم و، ضمناً، تنها نقطه‌های خاص، به‌ترتیب، b و d باشند، همان‌طورکه می‌دانیم، انتگرال دوگانهٔ زیر وجود دارد $(\varepsilon>0, \delta)$

$$\iint\limits_{[a,b-\delta;\,c,d-\varepsilon]} f(x)g(y)\,dxdy=\int_a^{b-\delta} f(x)dx\cdot\int_c^{d-\varepsilon} g(y)dy$$

تنها، این می‌ماندکه، به‌ازای $\delta\to 0$ و $\varepsilon\to 0$، به سمت حد عبورکنیم.

شرط‌های مربوط به‌تابع‌های f و g، برای وجودانتگرال دوگانه هم[۱] لازم است، به استثنای حالتی‌که، یکی‌از انتگرال‌های زیر، برابر صفر شوند:

$$\int_a^b |f(x)|dx,\quad \int_c^d |g(y)|dy$$

۸) مطلوب است مساحت شکل (D_1) محدود به سهمی‌های $y^2=2p(x-\frac{p}{2})$ و $y^2=2q(x-\frac{q}{2})$ $(0<p<q)$ و محور x [۶۰۸، ۸) را ببینید].

حل. بااستفاده از مختصات منحنی‌الخط، داریم:

$$D_1=\frac{1}{4}\int_0^p\int_p^q\left(\sqrt{\frac{u}{v}}-\sqrt{\frac{v}{u}}\right)dudv=$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\int_0^p\frac{dv}{\sqrt{v}}\cdot\int_p^q\sqrt{u}du-\int_0^p\sqrt{v}dv\cdot\int_p^q\frac{du}{\sqrt{u}}\right\}=\frac{4}{3}(q-p)\sqrt{pq}$$

محاسبهٔ مساحت، به انتگرال ناویژه منجر می‌شود (منحنی‌خاص، پاره‌خطی ازمحور u است). بعد ازآن‌که تغییر متغیرها را برای حالت انتگرال ناویژه تعمیم دهیم، تردیدی دربارهٔ آن چه گفتیم، باقی نمی‌ماند.

۹) این انتگرال را محاسبه کنید $(0<c<a)$:

$$R=\int_0^1\int_0^c\sqrt{a^2-x^2-(c^2-x^2)y^2}\,\sqrt{c^2-x^2}\,dxdy$$

از تبدیل زیر استفاده می‌کنیم:

$$x=\frac{v}{\sqrt{1+u^2}},\quad y=\frac{uv}{\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}}$$

که در آن، (u, v) در مستطیل نامتناهی $[0, c;\ 0, +\infty[$ تغییر می‌کند. ژاکوبین، برابر است با

$$\frac{v}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}}$$

داریم:

$$R=\int_0^c\int_0^{\infty}\frac{v\sqrt{a^2-v^2}}{1+u^2}dudv=\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2}\cdot\int_0^c v\sqrt{a^2-v^2}dv=$$

$$=\frac{\pi}{6}[a^3-(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}]$$

دراین‌جا، تبدیل انتگرال ویژه به انتگرال ناویژه، سودمند افتاد.

۱۰) انتگرال دوگانهٔ

$$P=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-x^2-y^2}dxdy$$

وجود دارد، زیرا انتگرال تکراری زیر وجود دارد:

$$P=\int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty}e^{-x^2-y^2}dy=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy=$$

$$=\left\{\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx\right\}^2$$

اگر به مختصات قطبی عبور کنیم، می‌توانیم این انتگرال را به‌سادگی محاسبه کنیم؛ دراین عبور، ربع اول ازصفحهٔ xy، به نواری درصفحهٔ $r\theta$ محدود می‌شود که به‌خط‌های $\theta=0$، $r=0$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$ محدود است. به این ترتیب

$$P=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\infty}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\infty}e^{-r^2}r\,dr=\frac{\pi}{4}$$

و بنا بر این

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

این راه ساده و جالب، متعلق به پواسون است.

۱۱) اگر درهمان انتگرال P، به‌کمك دستورهای زیر، به مختصات بیضوی برویم [(۵، ۶۰۴)]

$$x=\frac{\lambda\mu}{c},\quad y=\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}{c},\quad x^2+y^2=\lambda^2+\mu^2-c^2,$$

$$\frac{D(x,y)}{D(\lambda,\mu)}=\frac{\mu^2-\lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}$$

به دست می‌آید:

$$P=\int_{c}^{\infty}\int_{0}^{c}\frac{e^{-(\lambda^2+\mu^2-c^2)}(\lambda^2-\mu^2)}{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}d\mu\,d\lambda=\frac{\pi}{4}$$

یا

$$\int_{c}^{\infty}\frac{e^{-\lambda^2}\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}\cdot\int_{0}^{c}\frac{e^{-\mu^2}d\mu}{\sqrt{c^2-\mu^2}}-$$

$$-\int_{c}^{\infty}\frac{e^{-\lambda^2}d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-e^2}}\cdot\int_{0}^{c}\frac{e^{-\mu^2}\mu^2 d\mu}{\sqrt{c^2-\mu^2}}=\frac{\pi}{4}e^{-c^2}$$

اگر $c=1$ بگیریم و فرض کنیم $\lambda=\sqrt{v+1}$، $\mu=\sqrt{v}$، آن‌گاه به رابطهٔ جالب زیر می‌رسیم:

$$\int_{0}^{\infty}e^{-v}\sqrt{\frac{1+v}{v}}dv\cdot\int_{0}^{1}\frac{e^{-v}dv}{\sqrt{v(1-v)}}-$$

$$-\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-v}dv}{\sqrt{v(1+v)}}\cdot\int_{0}^{1}e^{-v}\sqrt{\frac{v}{1-v}}dv=\pi$$

۱۲) به‌کمك مختصات قطبی تعمیم یافتهٔ

$$x=ar\cos\theta,\quad y=br\sin\theta\quad(0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

می‌توان انتگرال دوگانهٔ زیررا به سادگی محاسبه کرد:

$$J=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\,y\geqslant 0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}}\frac{dxdy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\frac{\pi}{2}ab$$

اگر هم به مختصات بیضوی برویم (با اختیار $c^2=a^2-b^2$، به نحوی که بیضی مفروض متناظر $\lambda=a$ باشد)، آن وقت، برای همان انتگرال به‌دست می‌آید:

$$J=ab\int_{0}^{c}\int_{c}^{a}\frac{\lambda^2-\mu^2}{\sqrt{(a^2-\lambda^2)(a^2-\mu^2)(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}d\lambda d\mu$$

به‌این ترتیب

$$\int_{0}^{c}\int_{c}^{a}\frac{\lambda^2-\mu^2}{\sqrt{(a^2-\lambda^2)(a^2-\mu^2)(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}d\lambda d\mu=\frac{\pi}{2}$$

دراین‌جا، بافرض $a=1$، $c=k<1$، $k'=\sqrt{1-k^2}$ وبالاخره $\lambda=\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}$، $\mu=k\sin\varphi$ $(0\leqslant\varphi,\ \psi\leqslant\frac{\pi}{2})$، این انتگرال، به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\sin^2\psi)+(1-k^2\sin^2\varphi)-1}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)(1-k^2\sin^2\psi)}}d\varphi d\psi=\frac{\pi}{2}$$

که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}d\psi+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \frac{\pi}{2}$$

و خواننده، رابطهٔ لژاندر را، که قبلا دیده‌ایم [**۵۱۱**، ۱۲)؛ **۵۳۴**، ۱۰)]، در این‌جا باز می‌یابد.

۱۳) به‌نتیجهٔ رابطهٔ معلوم بین انتگرال‌های نوع اول ودوم اولر، که متعلق به‌ژاکوبی است، می‌پردازیم:

چون (برای $a>0$ و $b>0$)

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty} e^{-y}y^{a-1}dy, \quad \Gamma(b)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{b-1}dx$$

روشن است که خواهیم داشت:

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x}e^{-y}x^{b-1}y^{a-1}dxdy$$

در این‌جا، فرض می‌کنیم:

$$x=u(1-v), \quad y=uv$$

به‌نحوی که، ربع اول ازصفحهٔ xy، متناظر باشد با نوار محدود به‌خطهای $v=0$، $u=0$ و $v=1$ ازصفحهٔ uv. ژاکوبین تبدیل، برابر است با u. بنابراین

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\int_0^{1}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{a+b-1}v^{a-1}(1-v)^{b-1}dudv=$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-u}u^{a+b-1}du \cdot \int_0^{1} v^{a-1}(1-v)^{b-1}dv=\Gamma(a+b)\beta(a,b)$$

واین، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۴) در بحث‌های قبل، به‌یك رشته دستورها رسیدیم که، حوزهٔ کاربرد آن‌ها، می‌تواند بسیار گسترده‌تر باشد. مثلاً، دربارهٔ دستور دیریکله

$$\iint\limits_{\substack{x\geq 0,\,y\geq 0\\ x+y\leq 1}} x^{p-1}y^{q-1}dxdy=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$$

[۵۹۷، ۱۲)] ویا دستور کلی‌تر لیوویل

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} \varphi(x+y)x^{p-1}y^{q-1}dxdy=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\int_0^1 \varphi(u)u^{p+q-1}du$$

[۶۱۱، ۱۷)] می‌توان صحت کرد که، به ازای $p>0$، $q>0$ دلخواه، درست‌اند.

می‌توان، ازاین هم دورتر رفت: تااین‌جا، تابع $\varphi(u)$ را در دستور لیوویل، ضمن تغییر u از ۰ تا ۱، پیوسته فرض می‌کردیم، ولی اکنون می‌توان فرض کرد که، این تابع، دریك یاچند نقطهٔ این بازه، بی‌نهایت باشد؛ تنها اگرانتگرال سمت راست، متقارب مطلق باشد (درحالی‌که انتگرال سمت چپ، اصلا متقارب نیست).

بالاخره، در دستور لیوویل، می‌توان انتگرال دوگانه را در حوزه‌ای گسترش داد که با نابرابری‌های زیر معین شده است:

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\geqslant 1$$

تنها اگر انتگرال سمت‌راست را از ۰ تا $+\infty$ بگیریم (بازهم بافرض تقارب مطلق آن).

هیچ‌کدام ازاین موردها، مستلزم تغییر اساسی در روش اثبات نیست.

۱۵) اگر در دستورهای دیریکله و لیوویل، به‌جای p و q، فرض کنیم $\frac{p}{\alpha}$ و $\frac{q}{\beta}$ و، سپس، تبدیل $x=\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}$، $y=\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}$ را انجام دهیم، به دستورهای کلی‌تری می‌رسیم:

$$\iint\limits_{\substack{\xi,\eta\geqslant 0\\ \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}\leqslant 1}} \xi^{p-1}\eta^{q-1}d\xi d\eta=\frac{a^p b^q}{\alpha\beta}\ \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+1\right)},$$

$$\iint\limits_{\substack{\xi,\eta\geqslant 0\\ \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}\leqslant 1}} \varphi\left(\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}\right)\xi^{p-1}\eta^{q-1}d\xi d\eta=$$

$$=\frac{a^p b^q}{\alpha\beta}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}\right)}\int_0^1 \varphi(u)u^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}-1}du,$$

$$\iint\limits_{\substack{\xi,\ \eta\geqslant 0\\ \left(\frac{\xi}{a}\right)^\alpha+\left(\frac{\eta}{b}\right)^\beta\geqslant 1}} \varphi\left(\left(\frac{\xi}{a}\right)^\alpha+\left(\frac{\eta}{b}\right)^\beta\right)\xi^{p-1}\eta^{q-1}d\xi d\eta=$$

$$=\frac{a^p b^q}{\alpha\beta}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{p}{\beta}\right)}\int_1^\infty \varphi(u)u^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}-1}du^*$$

برای نمونه، پیشنهاد می‌کنیم که: شرط تقارب ومقدار انتگرال‌های زیررا ($m>0$) پیدا کنید:

$$\text{(a)}\quad \iint\limits_{\substack{x,\ y\geqslant 0\\ x^\alpha+y^\beta\leqslant 1}} \frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(x^\alpha+y\beta)^m}dxdy,$$

$$\text{(b)}\quad \iint\limits_{\substack{x,\ y\geqslant 0\\ x^\alpha+y\beta\geqslant 1}} \frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(x^\alpha+y\beta)^m}dxdy,$$

$$\text{(c)}\quad \iint\limits_{\substack{x,\ y\geqslant 0\\ x^\alpha+y\beta\leqslant 1}} \frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(1-x^\alpha-y\beta)^m}dxdy$$

پاسخ: (a) $\dfrac{\beta\left(\frac{p}{\alpha},\frac{q}{\beta}\right)}{\alpha\beta\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}-m\right)}$ $\left(\text{باشرط } \frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}>m\right)$

---

*) دراین‌جا، همهٔ ثابت‌های a و b، α و β، p و q مثبت فرض شده‌اند.

(b) $$\frac{\beta\left(\frac{p}{\alpha},\frac{q}{\beta}\right)}{\alpha\beta\left(m-\frac{p}{\alpha}-\frac{q}{\beta}\right)} \quad \left(\text{با شرط } \frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}<m\right)$$

(c) $$\frac{1}{\alpha\beta}\ \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma(1-m)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+1-m\right)} \quad (\text{با شرط } m<1)$$

[با مسألهٔ ۱) مقایسه کنید].

۱۶) دستور کاتالان [۵۹۷، ۱۵]:

$$\iint\limits_{m\leqslant g(x,\,y)\leqslant M} f(x,\,y)g[\varphi(x,y)]dxdy=\int_m^M \varphi(u)d\psi(u)$$

را، که در آن

$$\psi(u)=\iint\limits_{m\leqslant g(x,\,y)\leqslant u} f(x,\,y)dxdy$$

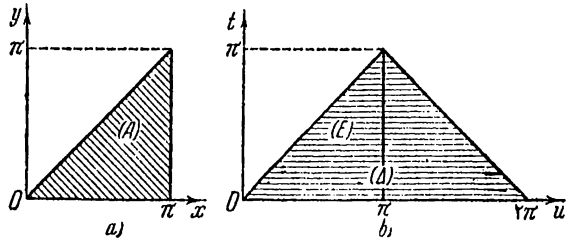
می‌توان، باواردکردن انتگرال‌های ناویژه، برای حالت $M=+\infty$، تعمیم داد، تنها به شرطی که $\int_m^{+\infty}$ را به عنوان $\lim\limits_{M\to\infty}\int_m^M$ در نظر بگیریم.

۱۷) مطلوب است مقدار انتگرال

$$L=\int\limits_{(A)}\int \ln^{\sin(x-y)}dxdy$$

که در آن، A مثلثی است محدود به خط‌های راست $y=0$، $x=\pi$ و $y=x$ (شکل ۷۹ – a).

با فرض $x=\frac{u+t}{2}$، $y=\frac{u-t}{2}$، حوزهٔ (A) به مثلث (Δ) برصفحهٔ ut، محدود به خط‌های راست $u=t$، $u+t=2\pi$ و $t=0$ (شکل ۷۹–b) تبدیل می‌شود. چون ژاکوبین



شکل ۷۹

تبدیل برابر است با $\frac{1}{2}$، پس

$$L=\frac{1}{2}\iint\limits_{(\Delta)}\ln sint\,dt\,du=\iint\limits_{(E)}\ln sint\,dt\,du$$

که در آن، (E) عبارت است ازمثلث محـدود به خطهای راست $t=u$، $u=\pi$ و $u=t=0$ [شکل را را ببینید]. سپس، می‌توان نوشت:

$$L=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\ln sint\,dt\,du=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln sint\,dt=\frac{\pi^2}{2}\ln 2$$

۱۸) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال (m و n، عددهای طبیعی و دلخواهند)

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{P_m(x)P_n(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dx\,dy$$

که در آن، P_n عبارت است ازچند جمله‌ای nام لژاندر.

حل. یادآوری می‌کنیم که وقتی چند جمله‌ای لژاندر باانـدیس فرد باشد، تنها شامل جمله‌های فرد است و وقتی با اندیس زوج باشد، تنها شامل جمله‌های زوج نسبت به x است. ازاین‌جا روشن می‌شود که، اگر تنها یکی‌از دوعدد m و n فردباشند، داریم: $I=0$.

هر دوعدد m و n را زوج می‌گیریم: $m=2\mu$، $n=2\nu$. این انتگرال را درنظر می‌گیریم:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{P_{2\nu}(x)y^{2p}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dx\,dy=$$

$$= \int_{-1}^{1} P_{2\nu}(x)dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^{2p}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy$$

با توجه به دستور معلوم

$$\int_{-a}^{a} \frac{y^{2p}}{\sqrt{a^2-y^2}} dy = 2\int_{0}^{a} = 2a^{2p} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\theta d\theta = \pi a^{2p} \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}$$

به‌نحوی که انتگرال ما، به‌این صورت در می‌آید:

$$\pi \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \int_{-1}^{1} P_{2\nu}(x)\cdot(1-x^2)^p dx$$

که در نتیجه، به ازای $p<\nu$ برابر صفراست [با توجه به ویژگی‌های اصلی چند جمله‌ای لژاندر: ۳۲۰، (۸)]. از این‌جا، به ازای $n=2\nu \neq m=2\mu$، داریم: $I=0$. می‌ماند حالت $n=m=2\mu$. در این حالت

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{P_{2\mu}(x)P_{2\mu}(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{P_{2\mu}(x)y^{2\mu}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy =$$

$$= \pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \int_{-1}^{1} P_{2\mu}(x)(1-x^2)^{\mu} dx =$$

$$= (-1)^{\mu}\pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \int_{-1}^{1} P_{2\mu}(x)x^{2\mu} dx =$$

$$= (-1)^{\mu}\pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \int_{-1}^{1} P_{2\mu}(x)P_{2\mu}(x)dx = (-1)^{\mu}2\pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \frac{1}{4\mu+1}$$

[۳۲۰، (۱۰)]. بنابراین، سرانجام

$$I = \begin{cases} 0 & (\text{به استثنای حالت } n=m=2\mu) \\ (-1)^{\frac{n}{2}} 2\pi \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{1}{2n+1} & (\text{برای حالت } n=m=2\mu) \end{cases}$$

از خواننده می‌خواهیم، خود، به قانونی بودن عمل‌ها، اطمینان پیدا کند.

۱۹) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال (لیوویل)

$$R(\lambda)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y+\frac{\lambda^3}{xy})}x^{\frac{1}{3}-1}y^{\frac{2}{3}-1}dxdy \quad (\lambda>0)$$

با استفاده از قاعدهٔ لایب‌نیتس، مشتق آن را نسبت به پارامتر λ پیدا می‌کنیم*.

$$\frac{dR}{d\lambda}=-3\lambda^2\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y+\frac{\lambda^3}{xy})}x^{\frac{1}{3}-1}y^{\frac{2}{3}-1}\frac{dxdy}{xy}$$

دراین‌جا، یکی‌از متغیرها را تغییر می‌دهیم: اگر $y=\text{const.}$ و $z=\frac{\lambda^3}{xy}$ فرض کنیم، داریم: $\frac{dx}{x}=-\frac{dz}{z}$ و به دست می‌آید:

$$\frac{dR}{d\lambda}=-3\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(y+z+\frac{\lambda^3}{yz})}y^{\frac{1}{3}-1}z^{\frac{2}{3}-1}dydz=-3R$$

اگر این معادلهٔ دیفرانسیلی ساده را حل کنیم، به دست می‌آید: $R=Ce^{-3\lambda}$، ثابت C را می‌توان باقرار دادن $\lambda=0$ به دست آورد:

$$R(0)=\Gamma(\tfrac{1}{3})\Gamma(\tfrac{2}{3})=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

و بنابراین، سرانجام

$$R=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-3\lambda}$$

۲۰) به‌شرط $k=\text{const.}$، مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$A=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}\frac{\cos 2k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}dxdy$$

---

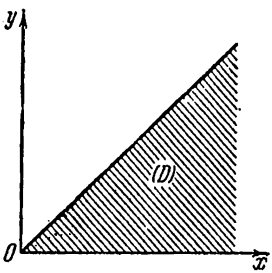
*) کسب اطمینان از وجود انتگرال R و مجازبودن استفاده از قاعدهٔ لایب‌نیتس را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. حکم اخیررا، شبیه حالت انتگرال ساده، می‌توان ثابت کرد.

ازآن‌جاکه تابع زیر انتگرال، ازلحاظ قدرمطلق، ازتابع

$$\frac{e^{-x-y}}{\sqrt{xy}}$$

تجاوز نمی‌کند، اگر انتگرال را در ربع اول‌داشته‌باشیم [۷] را ببینید]، وجودانتگرال A روشن می‌شود.

اگر (D) را بخشی از ربع بگیریم کـه در آن داشته باشیم: $y \geqslant x$ (درشکل ۸۰، آن‌را هاشورزده‌ایم)، به روشنی داریم:



شکل ۸۰

$$A = ۲\iint_{(D)} e^{-x-y}\frac{\cos ۲k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}dxdy$$

اکنون، با دستورهای زیر، تغییر متغیر می‌دهیم:

$$u = x+y,\quad v = ۲\sqrt{xy}$$

نقطهٔ (u, v)، حوزهٔ (Δ)ـ نظیر (D)ـ را برصفحهٔ uv می‌پیماید، به‌نحوی‌که $u \geqslant v$. ضمناً

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \frac{x-y}{\sqrt{xy}} = \frac{۲\sqrt{u^۲-v^۲}}{v} \quad و \quad \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{v}{۲\sqrt{u^۲-v^۲}}$$

که بعد از تبدیل به دست می‌آید:

$$A = ۲\iint_{(\Delta)} e^{-u}\frac{\cos kv}{\sqrt{u^۲-v^۲}}dudv = ۲\int_۰^\infty e^{-u}du\int_۰^u \frac{\cos kv}{\sqrt{u^۲-v^۲}}dv$$

برای محاسبهٔ انتگرال درونی، فرض می‌کنیم:

$$v = u\sin\theta,\quad dv = u\cos\theta d\theta = \sqrt{u^۲-v^۲}d\theta$$

که منجر به انتگرال زیر می‌شود:

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos(ku\sin\theta)d\theta = \frac{\pi}{۲}J_۰(ku)$$

[۴۴۰، ۱۲)]. با استفاده از نتیجهٔ معلوم [۵۰۴، ۳)]، سرانجام به دست می‌آید:

$$A = \pi\int_۰^\infty e^{-u}J_۰(ku)\,du = \frac{\pi}{\sqrt{k^۲+۱}}$$

۲۱) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$B=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-a\sqrt{x^{2}+y^{2}}}\cos x\xi\cos y\eta\,dx\,dy$$

که در آن، a، ξ و η مقدارهای ثابت و $a>0$ است.

روشن است که

$$B=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots dx\,dy$$

با فرض

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

به‌مختصات قطبی می‌رویم. ضمناً، برای ساده‌کردن محاسبه‌ها، فرض می‌کنیم:

$$\xi=\rho\cos\varphi,\quad \eta=\rho\sin\varphi$$

بعد از تبدیل و بعضی محاسبه‌های ساده، حاصل می‌شود:

$$B=\frac{1}{8}\left\{\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{\infty}e^{-ar}\cos[r\rho\cos(\theta-\varphi)].r\,dr+\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{\infty}e^{-ar}\cos[r\rho\cos(\theta+\varphi)]r\,dr\right\}$$

با فرض $\theta\mp\varphi=\lambda$ و با استفاده از تناوب، هردو انتگرال تکراری را به‌یک انتگرال تبدیل می‌کنیم:

$$B=\frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi}d\lambda\int_{0}^{\infty}e^{-ar}\cos(r\rho\cos\lambda).r\,dr=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\lambda\int_{0}^{\infty}e^{-ar}\cos(r\rho\cos\lambda).r\,dr$$

به سادگی معلوم می‌شود (مثلا، با انتگرال‌گیری جزء به جزء) که

$$\int_{0}^{\infty}e^{-ar}\cos br.r\,dr=\frac{a^{2}-b^{2}}{(a^{2}+b^{2})^{2}}\quad(a>0)$$

در این صورت

$$B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2-\rho^2\cos^2\lambda}{(a^2+\rho^2\cos^2\lambda)^2}d\lambda=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a}{(a^2+\xi^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

می‌توان به‌طور کلی (با استفاده ازهمان روش) ثابت کرد که، اگر انتگرال

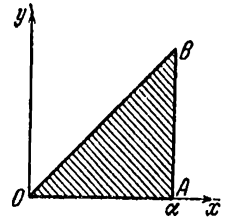
$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\varphi(\sqrt{x^2+y^2})\cos x\xi\cos y\eta\,dx\,dy$$

متقارب باشد، همیشه تابعی از $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ می‌شود، یعنی به صورت $f(\sqrt{\xi^2+\eta^2})$ در می‌آید.

۲۲) (D) مثلث OAB (شکل ۸۱) است که با نابرابری‌های $0\leqslant x\leqslant\alpha$ و $x\leqslant y$ مشخص می‌شود و $f(x)$ تابع دلخواهی است که از ۰ تا α پیوسته است. انتگرال دوگانهٔ

$$\int_{(D)}\int\frac{f(y)\,dx\,dy}{\sqrt{(\alpha-x)(x-y)}}$$

را با دو روش به انتگرال تکراری تبدیل و دستور زیر را ثابت کنید:



شکل ۸۱

$$\int_0^{\alpha}\frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}}\int_0^{x}\frac{f(y)\,dy}{\sqrt{x-y}}=\pi\int_0^{\alpha}f(y)\,dy \qquad (۱۵)$$

[این در واقع، کاربرد خاص دستور دیریکله ـ ۵۹۷، ۱۰)ـ در انتگرال ناویژه است؛ منحنی‌های خاص دراین‌جا، عبارتند از $x=\alpha$ و $y=x$].

برای حل یك مسألهٔ جالب متعلق به آبل، از دستور (۱۵) استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم تابع مفروض $\varphi(x)$، همراه بامشتق خود، در بازهٔ $[0\,,a]$ پیوسته وضمناً $\varphi(0)=0$ باشد. می‌خواهیم تابع $f(x)$، پیوسته دراین بازه را، طوری پیدا کنیم که، به ازای همین مقدارهای x، با شرط زیرسازگار باشد:

$$\varphi(x)=\int_0^{x}\frac{f(y)\,dy}{\sqrt{x-y}} \qquad (۱۶)$$

[چنین معادله‌ای، که در آن، تابع مجهول، زیرعلامت انتگرال قراردارد، معادلهٔ انتگرالی نامیده می‌شود. معادلهٔ آبل، یکی از نخستین مثال‌ها، برای معادله‌های انتگرالی است. امروز، برای معادله‌های انتگرالی، نظریهٔ گسترده‌ای وجود دارد].

دوطرف برابری (۱۶) را در $\frac{۱}{\sqrt{\alpha-x}}$ ضرب می‌کنیم و از آن، از ۰ تا عدد دلخواه α ($۰<\alpha\leqslant a$) انتگرال می‌گیریم: باتوجه به (۱۵) به دست می‌آید:

$$\int_{۰}^{\alpha}\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}}=\pi\int_{۰}^{\alpha}f(y)dy$$

اگر با استفاده از نتیجهٔ معلوم **۵۱۱**، ۱۴)، از دوطرف نسبت به α مشتق بگیریم، عبارت تابع مجهول به دست می‌آید:

$$f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\alpha}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx$$

اکنون باید تحقیق کنیم که، تابع حاصل، باشرط‌های مسأله سازگار است. پیوستگی آن نسبت به α، به‌کمك تبدیل اشاره شده در **۵۱۱**، ۱۴)، به سادگی ثابت می‌شود. ضمناً، اگر تابع حاصل‌را در دستور (۱۶) قراردهیم، باتوجه به دستور (۱۵)، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{x}\frac{dy}{\sqrt{x-y}}\int_{۰}^{y}\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{y-t}}dt=\int_{۰}^{x}\varphi'(t)dt=\varphi(x)\quad[\varphi(۰)=۰]$$

واین، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

در پایان، به‌چند مثال می‌پردازیم که می‌توانند بعضی از جنبه‌ها را روشن کنند.

۲۳) قبل‌از همه، ثابت می‌کنیم که، برای انتگرال‌های ناویژه (حتی برای تابع‌های نامنفی)، قضیهٔ شمارهٔ **۵۹۴**، که از وجود انتگرال دوگانه، انتگرال تکراری را نتیجه می‌گیرد، درحالت کلی، برقرار نیست.

تابع $f(x, y)$ را، در مربع $[۱, ۰; ۱, ۰]$، به ترتیب زیر، تعریف می‌کنیم:

$$f(x, y)=\begin{cases}۲^{n} & \text{با شرط } x=\dfrac{۲m-۱}{۲^{n}} \text{ و } ۰<y\leqslant\dfrac{۱}{۲^{n}}:\\ & (n=۱, ۲, ۳, \ldots; m=۱, ۲, \ldots, ۲^{n-۱})\\ ۰ & \text{در سایر نقطه‌ها:}\end{cases}$$

برای $y=\text{const.}$، تنها تعدادی متناهی از مقدارهای x می‌توانند وجودداشته باشند که، به‌ازای آن‌ها، داشته باشیم: $f\neq۰$. یعنی

$$\int_{۰}^{۱}f(x, y)dx=۰\quad\text{و}\quad\int_{۰}^{۱}dy\int_{۰}^{۱}f(x, y)dx=۰$$

اکنون، اگر $x=\text{const.}$ باشد، ولی به‌صورت $\frac{2m-1}{2^n}$ نباشد، داریم:

$$f=0 \quad \text{و} \quad \int_0^1 f(x, y)dy=0$$

درحالتی‌هم که داشته باشیم: $x=\text{const.}=\frac{2m-1}{2^n}$، آن وقت

$$\int_0^1 f(x, y)dy=\int_0^{\frac{1}{2^n}} f\,dy=1$$

ازاین‌جا روشن است که انتگرال تکراری $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x, y)dy$ وجود ندارد.

[روشن است که، برای تابع $f(x, y)+f(y, x)$، هیچ‌کدام از انتگرال‌های تکراری وجود ندارد].

دربارهٔ انتگرال دوگانه، باید گفت که، نقطه‌های خاص، بازهٔ $[0, 1]$ واقع برمحور x را پر می‌کنند. به‌ازای $\varepsilon>0$ دلخواه، در مستطیل $[0, 1; 0, \varepsilon]$، تابع f، تنها در تعداد محدودی بازه‌های خط‌های راست $x=\frac{2m-1}{2^n}$، که برای آن‌ها داشته باشیم $\frac{1}{2^n}\geqslant\varepsilon$، می‌تواند مخالف صفر باشد. به‌این ترتیب

$$\iint_{[0,1;\,\varepsilon,1]} f(x, y)dxdy$$

با عبور به‌حد، به‌ازای $\varepsilon\to 0$، می‌بینیم که

$$\iint_{[0,1;\,0,1]} f(x, y)dxdy=0$$

۲۴) به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که، هیچ‌کدام از انتگرال‌های دوگانهٔ

$$(a)\quad \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dxdy, \qquad (b)\quad \int_0^\infty\int_0^\infty \sin(x^2+y^2)dxdy$$

متقارب نیستند (به‌مفهوم تعریف شمارهٔ ۶۱۲)

درحالت(a) واضح است که، انتگرال ازقدرمطلق تابع زیرانتگرال، وجود ندارد،

زیرا درغیر این صورت، باید انتگرال تکراری زیر، مقداری متناهی داشته باشد:

$$\int_0^\infty |\sin x| \, dx \int_0^\infty e^{-xy} dy = \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$$

که درست نیست [۴۷۷]. ازاین‌جا، باتوجه به **۶۱۳**، حکم مورد نظر ثابت می‌شود.

درحالت (b)، اگر ربع دایرهٔ به‌شعاع R بامرکز مبداء را (K_R) بنامیم، با عبور به مختصات قطبی، خواهیم داشت:

$$\iint_{(K_R)} \sin(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \sin r^2 . r dr = \frac{\pi}{4}(1-\cos R^2)$$

که با ترقی R تا بی‌نهایت، دارای حد معینی‌نیست؛ وهمین، مسأله را حل می‌کند.

جالب است توجه‌کنیم‌که، در هرکدام از این مثال‌ها، انتگرال‌های تکراری وجود دارند (وحتی باهم برابرند):

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx = \int_0^\infty \sin x dx \int_0^\infty e^{-xy} dy = \frac{\pi}{2} \quad [\mathbf{۵۲۲}, {}^\circ۲]$$

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty \sin(x^2+y^2)dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty \sin(x^2+y^2)dy = \frac{\pi}{4} \quad [\mathbf{۵۲۲}, {}^\circ۵]$$

به‌این ترتیب، درحالتی‌که تابع تغییر علامت می‌دهد، وجود انتگرال تکراری، به معنای وجود انتگرال‌دوگانه نیست (به‌یاد بیاوریم‌که در**۶۱۴**، شرط اضافی‌وجود انتگرال تکراری را برای قدر مطلق تابع هم، خواسته بودیم).

۲۵) اگر مستطیل نامتناهی $[\infty+ ;\circ ,\circ+ ;\infty]$، هرحوزهٔ دلخواه نامتناهی را (آن طورکه در تعریف شمارهٔ **۶۱۲** دیدیم) دربر نگیرد، بلکه به‌طور خاص، شامل‌حوزه‌های مستطیلی به‌صورت $[\circ ,A ; \circ ,B]$ باشد، آن وقت معلوم می‌شودکه، در هر دوحالت قبل، برای انتگرال

$$\iint_{[\circ,A;\circ,B]} \cdots dxdy$$

به‌ازای $A, B \to +\infty$، حد متناهی معین وجود دارد.

این‌حکم، درمورد انتگرال

$$\iint\limits_{[0,A;\,0,B]} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^A \sin x^2\,dx \cdot \int_0^B \cos y^2\,dy + \int_0^A \cos x^2\,dx \cdot \int_0^B \sin y^2\,dy$$

دیده می‌شود که، باعبور به‌حد، به سمت $\frac{\pi}{4}$ میل می‌کند [۵۲۲، ۵°].

اکنون به انتگرال

$$\iint\limits_{[0,A;\,0,B]} e^{-xy}\sin x\,dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^A \frac{e^{-Bx}\sin x}{x}\,dx$$

می‌پردازیم. از انتگرال‌های سمت راست، انتگرال اول (به‌ازای $A\to+\infty$) به سمت $\frac{\pi}{2}$ و انتگرال دوم (به ازای $A, B\to\infty$) به سمت صفر میل می‌کنند. در مورد انتگرال دوم، علت این است که، ازلحاظ قدر مطلق، از انتگرال

$$\int_0^A e^{-Bx}\,dx = \frac{1-e^{-AB}}{B}$$

تجاوز نمی‌کند. بنابراین، سرانجام، حد $\frac{\pi}{2}$ به‌دست می‌آید*.

چنین حدهایی، «مقدارهای اصلی» انتگرال‌های ناویژه [۴۸۴] را به خاطر می‌آورند. آن‌ها را درحالتی هم که در حوزهٔ نامتناهی به دلخواه امتداد پیدا کرده باشند، می‌توان درنظر گرفت، به شرطی که درپیرون آن، تابع را برابرصفر فرض کنیم. برخی از ریاضی‌دانان ترجیح داده‌اندکه همین حدها را مبنای تعریف مفهوم انتگرال دوگانهٔ ناویژه قرار دهند (که اساساً، با تعریفی که ما آورده‌ایم، تفاوت دارد). ازاین دیدگاه، هر دو انتگرال ۲۴) متقارب (وضمناً، به‌صورت غیرمطلق) می‌شوند.

یادداشت. درمورد رشته‌های دوگانه‌هم، همین موقعیت‌وجود دارد. چون‌درآن‌جا، همیشه از ماتریس‌های مستطیلی نامتناهی آغاز می‌کردیم، طبیعی بود که همیشه، همان

---

*) انطباق این‌حد، با مقدارکلی انتگرال تکراری، که در هردو حالت برقرار است، امری قانونی است [با ۱۶۸ مقایسه کنید].

ماتریس‌های مستطیلی را گسترش دهیم که اساس تعریف رشتهٔ دوگانه قرار داشتند [۳۹۴]. به‌همین مناسبت، رشته‌های دوگانه می‌توانند متقارب مطلق یا متقارب غیرمطلق باشند. ولی دیدگاه دیگری هم وجود دارد که، بنابرآن، به وسیلهٔ منحنی‌های با شکل‌های دلخواه، قطعه‌های متناهی از ماتریس نامتناهی جدا می‌شود، تنها اگرهمراه با همهٔ نقطه‌ها به سمت بی‌نهایت دور شوند. این دیدگاه، نزدیك به‌دیدگاهی است که دربالا [۶۱۲] برای تعریف انتگرال دوگانهٔ ناویژه آوردیم. اگر کار خود را، براین اساس قرار دهیم، رشته‌های دوگانه هم، شبیه انتگرال‌های ناویژه، تنها متقارب مطلق می‌شوند.

MATH75.IR

فصل هفدهم

مساحت سطح. انتگرال‌های روی سطح

§۱. سطح‌های دورویه

۶۱۸. رویهٔ سطح. ابتدا به مفهوم رویهٔ سطح می‌پردازیم که، برای بحث‌های بعدی، اهمیت زیادی دارد.

این مفهوم هم، درکنار بسیاری دیگر، با درك شهودی آن، روشن است. اگر سطح، با معادلهٔ صریح $z = f(x, y)$ داده شده باشد، می‌توان دربارهٔ رویهٔ بالایی یا رویهٔ پایینی آن صحبت کرد*. اگر سطح یك جسم را محدود کرده باشیم، بازهم می‌توانیم، دو رویهٔ مختلف آن را تصور کنیم: رویهٔ درونی که به طرف جسم است و رویهٔ بیرونی که به‌طرف فضایی است که جسم را احاطه کرده است.

با آغاز ازاین تصور شهودی، کوشش می‌کنیم تعریف دقیق مفهوم رویه‌های یك سطح را بدهیم.

سطح هموار (S) را، که بسته است ویا به‌وسیلهٔ دورهٔ قطعه به‌قطعه هموار محدود شده است، درنظر می‌گیریم. ازآن‌جا که روی سطح، نقطه‌های خاص وجود ندارد، هر نقطه از سطح متناظر با صفحهٔ مماس معینی است که جای آن، همراه با جابه‌جا شدن نقطهٔ تماس، به‌طور پیوسته، عوض می‌شود.

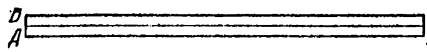
نقطهٔ معین M_0 را روی سطح انتخاب و قائم برسطح را دراین نقطه، رسم می‌کنیم؛ از دوجهت ممکن برقائم، یکی‌را درنظر می‌گیریم (این دوجهت، درعلامت کسینوس‌های هادی، با یکدیگر اختلاف دارند) روی سطح، دورهٔ بسته‌ای را رسم می‌کنیم که از M_0 آغاز و به M_0 ختم شود و، ضمناً، مرزهای سطح را قطع نکند. فرض می‌کنیم، نقطهٔ M،

---

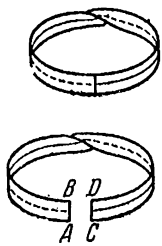
*) با توجه به‌این که، محور z را قائم و ممتد به‌طرف بالا درنظر می‌گیریم، می‌توانیم ازچنین عبارت‌هایی استفاده کنیم.

روی این دوره حرکت کند؛ در هریك از موضع‌های متوالی این نقطه، جهتی از قائم را رسم می‌کنیم که متناظر با جهت انتخابی قائم در نقطهٔ مبداء M_0 باشد. دو حالت ممکن است پیش آید: بعد از دور زدن دوره و رسیدن به نقطهٔ M_0، یا به همان جهت نخستین قائم می‌رسیم و یا در جهت خلاف آن.

اگر درمورد نقطه‌ای مثل M_0 و دورهٔ M_0AM_0 که از آن می‌گذرد، کیفیت اخیر پیش آید، آن وقت، برای هر نقطهٔ دلخواه دیگر M_1 هم، می‌توان به سادگی دورهٔ بسته‌ای را درنظر گرفت که روی آن، با حرکت از M_1 و برگشتن به آن، جهت قائم، باجهت اولیهٔ آن، مخالف شود. مثلا، اگر M_0M_1، یك منحنی واقع برسطح باشد که دو نقطهٔ M_1 و M_0 را به‌هم وصل می‌کند و، ضمناً، با مرزهای سطح برخوردی ندارد و همچنین، M_0M_1 هم همان منحنی درجهت عکس باشد، آن وقت، برای دورهٔ $M_1M_0AM_0M_1$، چنین وضعی پیش می‌آید.



در چنین حالتی، سطح را یك رویه می‌نامند. مثال کلاسیك این سطح، نوار موبیوس است (شکل ۸۲). نمونهٔ این نوار را می‌توان به سادگی به‌دست آورد: نوار مستطیل‌شکل $ABCD$ را، یکبار می‌پیچانیم و، سپس، دو انتهای آن‌را به‌هم می‌چسبانیم، به نحوی که نقطهٔ A بر C و نقطهٔ B بر D منطبق شود. اگر از جایی در روی این نوار، رنگ کردن را آغاز کنیم و، بدون این که از مرزهای نوار عبور کنیم، عمل رنگ کردن را به‌طور پیوسته، ادامه دهیم، متوجه می‌شویم که تمامی حلقه رنگ می‌شود. از این به بعد، چنین سطح‌هایی را از بررسی خود، کنار می‌گذاریم.



شکل ۸۲

اکنون فرض می‌کنیم که، برای هر نقطهٔ دلخواه M_0 و برای هر دورهٔ بسته‌ای که از آن می‌گذرد (والبته، مرزهای سطح را قطع نمی‌کند)، بعد از دور زدن، بدون تغییر و با همان جهت نخستین قائم، به نقطهٔ نخستین برگردیم. درچنین حالتی، سطح را، دورویه گویند.

S را سطحی دورویه می‌گیریم. نقطهٔ دلخواه M_0 را، روی سطح، انتخاب می‌کنیم و به‌قائم این نقطه، جهت معینی را نسبت می‌دهیم. نقطهٔ دیگر M_1 را برسطح در نظر می‌گیریم و M_0 و M_1 را به‌وسیلهٔ مسیر دلخواه (K)، که برسطح واقع است ومرزهای آن را قطع نمی‌کند، به‌هم وصل می‌کنیم. فرض کنیم، نقطهٔ M، روی این مسیر، از M_0 به سمت M_1 برود. اگر ضمن این حرکت، امتداد قائم به‌طور پیوسته تغییر کند، نقطهٔ M،

بدون ارتباط به‌مسیر انتخابی (K)، باجهت کاملا معینی برای قائم، بـه M_1 می‌رسد. در واقـع، اگـر ضمن رسیدن از نقطهٔ M_0 بـه M_1، در دو مسیر مختلف (K_1) و (K_2)، برای نقطهٔ M، دو جهت مختلف قائم به دست آوریم، به‌معنای آن است کـه مسیر بستهٔ $M_0(K_1)M_1(K_2^{-1})M_0$، ما را به دوجهت مختلف برای قـائم درنقطهٔ M_0 می‌رساند که متناقض با تعریف سطح دورویه است.

به این ترتیب، بریك سطح دورویه، انتخاب جهت قائم دریك نقطه، انتخاب جهت قائم را در هرنقطهٔ دیگر سطح، به‌طور یك ارزشی، معین می‌کند. مجمـوعهٔ همهٔ نقطه‌های سطح را با قائم‌هایی دراین نقطه‌ها، که با جهت‌هایی طبق قاعدهٔ مذکور رسم شده‌اند، رویهٔ معین سطح می‌نامند.

۶۱۹. مثال‌ها. ۱°. ساده‌ترین و مهم‌ترین مثال، برای سطح دورویه، عبارت‌است‌از سطحی‌که با معادلهٔ صریح $z=z(x, y)$ بیان می‌شود، با این فرض‌کـه تابع z، در یك حوزهٔ مستوی (D) پیوسته باشد و، درآن، مشتق‌های نسبی‌پیوستهٔ زیر، وجود داشته‌باشند:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

دراین حالت، کسینوس‌های هادی قائم برسطح، به‌این ترتیب، بیان می‌شوند[۲۳۴، (۱۱)]:

$$\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\nu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

علامت جلو رادیکال‌ها را، باتوجه به جهت معینی‌که برای قائم‌ها، در نقطه‌های سطح در نظر می‌گیریم، انتخاب می‌کنیم. از آن‌جا که کسینوس‌های هادی بنا به‌فرض، تابع‌هـای پیوسته‌ای ازمختصات نقطه‌هستند، بنابراین، جهت انتخابی قائم‌هم، به‌طور پیوسته، بستگی به موضع نقطه خواهد داشت. به‌این‌ترتیب، روشن است‌که: انتخاب علامت جلو رادیکال‌ها، در دستورهای $\cos\lambda$، $\cos\mu$ و $\cos\nu$ رویهٔ سطح را به همان مفهومی معین می‌کندکه، قبلا، آن را شرح دادیم.

اگرعلامت جلو رادیکال را، مثبت بگیریم، آن‌گاه درهمهٔ نقطه‌های سطح، مقدار

$$\cos\nu=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

مثبت می‌شود، یعنی زاویهٔ بین‌محور Oz وقائم (درجهتی‌که انتخاب شده است)، زاویه‌ای است حاده. بنابراین، رویه‌ای‌که، به‌این ترتیب، برای سطح انتخاب شود، رویهٔ بالائی آن خواهد بود. برعکس، انتخاب علامت منفی درجلو رادیکال‌ها، درعبارت‌های مربوط به‌کسینوس‌های هادی قائم، معرف رویهٔ پائینی سطح است (دراین حالت، قائم‌ها بامحور Oz، زاویهٔ منفرجه تشکیل می‌دهند).

۲°. اکنون، حالت کلی‌تر، یعنی سطح همـوار باز و سادهٔ دلخواه (S) را در نظر می‌گیریم‌که با معادله‌های پارامتری زیرداده شده است:

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v) \qquad (۱)$$

ضمناً، پارامترهای v و u، دریك حوزهٔ محدود (Δ) از صفحـهٔ uv، تغییر می‌کنند. شرط همـوار بودن سطح، به‌این معناست‌که: تابع (۱)، همراه بامشتق‌های نسبی خود، در(Δ) پیوسته است و، برسطح، نقطه‌های خاص وجود ندارد. علاوه برآن، سطح را ساده فرض کردیم (که اهمیتی جدی دارد) واین، به‌معنای آن است‌که، برسطح، نقطه‌های تکراری وجود ندارد، یعنی هرنقطهٔ سطح، بایك جفت مقدارهای پارامترهـای u و v، مشخص می‌شود.

اگرطبق معمول، دترمینان‌های ماتریس

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

را، با A، B و C نشان‌دهیم، آن وقت بنابرفرض، همیشه‌خواهیم‌داشت: $A^2+B^2+C^2>0$ وکسینوس‌های هادی قائم برسطح، با دستورهای زیربیان می‌شوند [۲۳۴، (۱۷)]:

$$\begin{cases} \cos\lambda=\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & \cos\mu=\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\nu=\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{cases} \qquad (۲)$$

دراین حالت هم، انتخاب علامت جلو رادیکال‌ها، رویهٔ سطح را مشخص می‌کند، یعنی سطح مفروض، دورویه است. در واقع، با انتخاب علامت، به‌کمك دستورهای (۲)، به‌هر نقطهٔ سطح (که تنها به‌یك جفت از مقدارهای u و v نظیراست)، تنها یك جهت‌قائم نظیر

می‌شود که، با جابه‌جا شدن نقطه، به صورتی پیوسته، تغییر می‌کند.

درحالتی که فرض مربوط به‌عدم وجود نقطه‌های تکراری، ازبین برود، نمی‌توان بدون قید حکم کرد که، سطح مفروض، سطحی دورویه است. در این‌حالت، نقطهٔ تکراری M_0 ازسطح، دست‌کم، متناظر است با دو جفت مختلف u_0، v_0 و u_1، v_1، از مقدارهای پارامترها؛ درچنین حالتی، ممکن است، به‌ازای این مقدارها، دستورهای (۲) ــ حتی اگر علامت جلو رادیکال‌ها، یکسان انتخاب شود ــ قائم‌هایی درجهت‌های مختلف درنقطهٔ M_0 را معین کنند. و اگرچنین وضعی پیش آید، به‌معنای آن است که با سطحی یک‌رویه سروکار داریم. درواقع، اگرنقطه‌های $m_0(u_0, v_0)$ و $m_1(u_1, v_1)$ را برصفحهٔ uv به وسیلهٔ منحنی m_0m_1 به‌هم وصل کنیم، آن وقت برسطح (S) هم، متناظر با آن، یک منحنی‌بسته به دست می‌آید که از M_0 آغاز و به M_0 ختم می‌شود. وقتی که روی این منحنی بسته، از M_0 با جهت مشخصی برای قائم آغاز به حرکت کنیم، بعد از دورزدن منحنی و بازگشت به M_0، جهت مخالف آن، برای قائم به‌دست می‌آید.

۳°. درحالتی که سطح هموار (S)، بسته باشد و یک جسم را محدود کند، وجود دو رویهٔ آن ــ بیرونی و درونی ــ مستقیماً روشن است. فرض کنیم، این‌سطح، با معادله‌های (۱) بیان شود. هرچند، این‌بار، فرض مربوط به‌تناظر یک ارزشی متقابل، بین نقطه‌های سطح و نقطه‌های حوزهٔ (Δ)، به معنای دقیق خود، عملی‌نیست، ولی با همهٔ این‌ها، انتخاب علامت در دستورهای (۲)، رویهٔ سطح را معین می‌کند؛ علت این‌امر آن است که، دراین‌جا، به موقعیتی که در حالت قبل داشتیم، برنخواهیم خورد.

۶۲۰. جهت‌دارکردن سطح و فضا. فرض کنیم (S)، سطحی‌دورویه، هموار، غیربسته ومحدود به دورهٔ سادهٔ (L) باشد؛ رویهٔ معینی ازاین سطح را انتخاب می‌کنیم. اکنون جهت مثبت را روی دورهٔ (L)، به‌ترتیب زیرانتخاب می‌کنیم: جهت مثبت را روی‌دوره چنان درنظر می‌گیریم که اگر ناظری در جهت انتخابی قائم برسطح بایستد، آن را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت ببیند. وقتی که از «خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت» صحبت می‌کنیم، به‌این معناست که، ناظر باید بخشی از سطح را که درسمت چپ او قرار دارد، مشاهده کند. برای تعیین جهت مثبت واقع بر دورهٔ بسته‌ای که بخشی از سطح را محدود می‌کند، ازهمین‌قاعده استفاده می‌کنیم*. جهتی راکه برخلاف جهت مثبت باشد، جهت منفی می‌نامیم. همهٔ این‌ها، در مجموع، مضمون مفهوم جهت‌دارکردن سطح را تشکیل می‌دهند.

---

*) ازهمین بخش‌است که برای تعیین جهت مثبت برروی دوره استفاده می‌کنند.

اگر از رویهٔ دیگر سطح آغاز کنیم، قائم‌ها جهت خود را عوض می‌کنند، موقعیت ناظر تغییر می‌کند، در رابطه با آن، با توجه به قاعده‌ای که آوردیم، جهت‌های مثبت و منفی دورهٔ (L) و، همراه با آن، همهٔ دوره‌های دیگر واقع برسطح، جابه‌جا می‌شوند. سطح، جهت خود را عوض می‌کند. به این ترتیب، اگر همیشه قاعدهٔ مذکور را در نظر داشته باشیم، انتخاب رویهٔ سطح، جهت آن را معین می‌کند و، برعکس، انتخاب جهت مثبت حرکت روی دورهٔ سطح، به صورتی یک ارزشی، رویهٔ آن را تعیین می‌کند.

وقتی باسطح هموار بستهٔ (S)، که جسمی را محدود می‌کند، سروکار داشته باشیم، ممکن است صحبت از رویهٔ بیرونی و رویهٔ درونی سطح، نسبت به این جسم، باشد. دراین حالت، نمی‌توان ازقاعدهٔ مذکور، برای تعیین جهت مثبت حرکت، دریک دورهٔ ساده و بستهٔ دلخواه استفاده کرد. این امر، دوعلت دارد: اولا چنین دوره‌ای، ممکن است، خیلی ساده، سطح را «تقسیم نکند» (مثل مدارها ونصف‌النهارهای واقع برچنبره) که، در این صورت، سطح ازهردو رویه، به دوره متصل‌است: قاعدهٔ ما، چیزی به‌دست نمی‌دهد. ولی حتی درحالتی که دوره، سطح را به‌دو حوزه «تقسیم کند»، هردو حوزه را به یک اندازه «محدود می‌کند» وبسته به‌آن که کدامیک از دوحوزه را انتخاب کنیم، قاعدهٔ ما، یکباراین جهت وبار دیگر جهت عکس آن را به‌عنوان جهت مثبت در روی دوره معین‌می‌کند. ولی، اگر همراه با دوره، حوزه‌ای را هم برای آن مشخص کنیم، آن وقت، جهت مثبت، به صورتی کاملا یک ارزشی معین می‌شود*. به‌این ترتیب، دراین‌جا هم، می‌توان جهت سطح را، در رابطه با رویهٔ آن، تعیین کرد.

اگر برای هرسطحی ازاین گونه، جهت مثبت را متناظر با رویهٔ بیرونی‌سطح وجهت منفی را برای رویهٔ درونی آن بگیریم، آن وقت، توانسته‌ایم خود فضا را به‌نحوی توجیه (یعنی، جهت‌دار) کنیم. و این کاملا شبیه آن است که باانتخاب جهت مثبت روی‌دورهٔ بستهٔ سادهٔ واقع برصفحه، موجب توجیه (یعنی جهت‌دار شدن) خود صفحه می‌شود [۵۴۸].

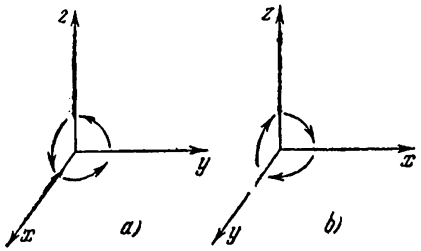
توجیهی از فضا، که هم‌اکنون تعریف کردیم وبراساس آن، سرآخر، به دوران در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌رسیم، مستقیم (یا راست) نامیده می‌شود. اگر

---

*) اگردورهٔ باز یا بسته‌ای را، باجهت معینی، برصفحه درنظر بگیریم، درحالت اول، دربارهٔ دو نقطهٔ واقع برآن، می‌توان گفت، کدام‌یک قبل و کدام‌یک بعد قرارگرفته‌اند (یعنی، کدام نقطه، قبل‌از نقطهٔ دیگراست)، ولی درحالت دوم، تنها وقتی در این‌باره می‌توان صحبت کرد که همراه با نقطه‌ها، کمانی از منحنی‌را مشخص‌کرده باشیم. به‌این حالت، به همان ترتیبی که درمتن گفته شده است، می‌توان نگاه کرد.

به‌جای آن، از دوران درجهت حرکت عقربه‌های ساعت آغاز کنیم، جهت گیری فضا را چپ گویند. برای این‌که ازپیچیدگی بیشتر دوری کنیم، ازاین به‌بعد، هروقت‌که با فضای توجیه شده سروکار داشته باشیم، آن را مستقیم به‌حساب می‌آوریم.

باید گفت که، وضع استقرار محورهای مختصات درفضا، درارتباط باهمین جهت‌دار-بودن فضا، مشخص شده‌اند. اگرفضا، جهتی مستقیم داشته باشد، وقتی‌که ازموضع جهت مثبت محور z بنگریم، باید دوران ازمحور x به محور y، درجهت عکس حرکت عقربه-های ساعت انجام‌گیرد (این‌حکم، با تبدیل دوری حرف‌های x و y و z هم بدقوت خود باقی‌می‌ماند) (شکل ۸۳–a)؛ در حالی که، درفضای چپ، این دوران، درجهت حرکت عقربه‌های‌ساعت خواهدبود (شکل۸۳–b). دستگاه مختصات $Oxyz$ را، درحالت‌اول، راست (یا مستقیم) و در حالت دوم، چپ گویند. با شرطی‌که قبلا هم دربارهٔ آن صحبت‌کردیم، ازاین به بعد، تنها بادستگاه-های مختصات مستقیم سروکار خواهیم داشت.



شکل ۸۳

۶۲۱. انتخاب علامت در دستورها، برای کسینوس‌های هادی قائم‌ها. اکنون، در رابطه باانتخاب رویهٔ سطح و ساختن این ویا آن جهت برای آن، کاربردی پیدا می-کنیم که، برای بحث‌های آینده، اهمیت زیادی دارد.

دوباره، سطح هموارساده و باز S را درنظر می‌گیریم ورویهٔ معینی ازآن‌را انتخاب می‌کنیم (وهمراه باآن، جهت آن را). (Λ) را دورهٔ حوزهٔ (Δ) درصفحهٔ uv و (L) را دورهٔ متناظر آن، برسطح منروض می‌گیریم. فرض می‌کنیم، دورزدن مثبت بردورهٔ (Λ) متناظر با دورزدن مثبت بردورهٔ (L) باشد*. در این‌صورت، برای هردو حوزهٔ متناظر (λ) برحوزهٔ (Δ) و (l) برسطح (S) هم، همین وضع برقرار است: حرکت در جهت مثبت برروی (λ) متناظر است با حرکت درجهت مثبت، برروی (l)**.

باتوجه به‌این شرطها، باید برای مشخص‌کردن رویه‌ای که برای سطح انتخاب

---

*) در صورت لزوم، با تبدیل پارامتر u به $-u$، همیشه می‌توان، به‌این‌تناظر دست یافت.

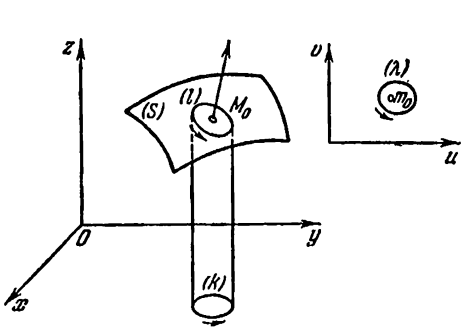
**) ازآن‌جا که دربارهٔ جهت حرکت بردوره، می‌توان از روی جهتی‌داوری‌کرد که درهر بخشی از آن وجود دارد، بنابراین، حکم مذکور، برای دوره‌ای از (λ) که بخش مشترکی با (Λ) دارد، روشن است‌که، ازآن‌جا، می‌توان به سادگی، به‌حالت‌کلی هم رسید.

کرده‌ایم، در دستورهای (۲) (برای کسینوس‌های هادی قائم‌ها)، در جلو رادیکال، علامت مثبت را در نظر بگیریم.

برای اثبات این حکم، کافی است ثابت کنیم که، دست‌کم در یک نقطه، جهتی که با علامت مثبت در این دستورها معین می‌شود، همان جهت لازم را برای قائم تعیین می‌کند. روی سطح، نقطه‌ای درونی مثل M_0 را انتخاب می‌کنیم؛ این نقطه، با نقطهٔ $m_0(u_0, v_0)$ از حوزهٔ (Δ) متناظر است. فرض می‌کنیم، در متر معین زیر، در این نقطه، مخالف صفر باشد:

$$C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

در آن صورت، می‌توان همسایگی به‌قدر کافی کوچکی از نقطهٔ m_0 بر صفحهٔ uv را، که با دورهٔ (λ) محدود شده است، طوری پیدا کرد که، همسایگی متناظر آن در نقطهٔ M_0 سطح (S)، که با دورهٔ (l) محدود شده است، با تناظر یک‌به‌یک بر صفحهٔ xy تصویر شود. دورهٔ این تصویر را، بر صفحهٔ xy، با (k) نشان می‌دهیم (شکل ۸۴).



شکل ۸۴

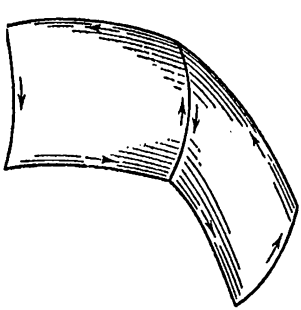
اگر در نقطهٔ مفروض و همسایگی آن، متر معین C مثبت باشد، آن وقت، حرکت مثبت بر دورهٔ (λ)، متناظر است با حرکت مثبت (یعنی، با وضعی که برای محورها انتخاب کرده‌ایم، حرکت در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) بر دورهٔ (k) [۱، ۶۰۶] را ببینید]. همان‌طور که از شکل دیده می‌شود، برای آن که حرکت متناظر بر دورهٔ (l) ــ واقع بر سطح ــ هم در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت باشد، باید از بالا به آن نگاه کرد، به‌نحوی که قائم در نقطهٔ M_0، در این حالت، جهتی به طرف بالا داشته باشد، یعنی با محور z، زاویه‌ای حاده بسازد. و این، متناظر با حالتی است که، در دستورهای (۲)، علامت مثبت را اختیار کنیم، زیرا به‌ازای $C>0$ خواهیم داشت: $\cos\nu>0$. برعکس، وقتی که در معین C منفی باشد، باید قائم بر محور z، زاویه‌ای منفرجه بسازد، به نحوی که در عمل، همان علامت را در دستورهای (۲) انتخاب کنیم، زیرا به ازای $C<0$ داریم: $\cos\nu<0$.

اگر سطح هموار (S)، بسته باشد و جسمی را محدود کند [با ۶۱۹، ۳° مقایسه کنید]،

بازهم با موقعیت مشابهی روبه‌رو خواهیم بود. فرض کنیم با رویهٔ معینی از سطح سرو کار داشته باشیم، ضمناً، جهت مثبت در روی دوره‌ای مثل (λ_0) درحوزهٔ (Δ) متناظر باشد با جهت مثبت دورهٔ (l_0) که، در تناظر با (λ_0) روی سطح (S) معین می‌شود، به شرطی که (l_0) به بخشی از (S) مربوط باشدکه متناظر با دورهٔ بستهٔ (λ_0) ازحوزه واقع برصفحهٔ uv است. دراین‌حالت است که حکم ثابت‌شده برای سطح باز، دراین‌جا هم‌درست‌است.

۶۲۲. حالت سطح قطعه به‌قطعه هموار. با گسترش اندیشه‌های شمارهٔ ۶۲۰، می‌توان وسیلهٔ مناسبی برای استفاده از مفهوم رویه در سطح‌های قطعه به‌قطعه هموار به‌دست آورد. ملاحظه‌هایی راکه درشمارهٔ ۶۱۸ شرح دادیم، نمی‌توان مستقیماً دراین‌جا به‌کار برد، زیرا درطول «یال‌هایی» که تکه‌های هموارسطح را به‌هم پیوند می‌دهند، صفحهٔمماس معینی وجود ندارد و، ضمن عبور از آن‌ها، نمی‌توان دربارهٔ تغییرپیوستهٔ جهت قائم‌ها، صحبت کرد.

سطح قطعه به قطعه هموار (S) را درنظر می‌گیریم که از قطعه‌های هموار (S_1)، (S_2)،... تشکیل شده باشد و، این قطعه‌ها، به وسیلهٔ یالی که برای دوره‌های آن‌ها مشترک است، به‌هم وصل شده باشند: قبل از هرچیز، فرض می‌کنیم که هرکدام از این قطعه‌ها، به‌طور جداگانه، سطح‌های دورویه باشند. ولی به‌نظر می‌رسدکه، این‌فرض، برای دو-رویه بودن تمامی سطح (S) کافی‌نیست، چراکه مثلا، سطح موبیوس هم از دوقطعهٔ دو-رویهٔ هموار تشکیل شده است.



شکل ۸۵

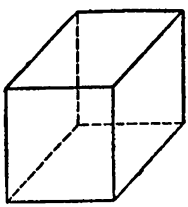
بر روی دورهٔ (K_i) از هر قطعهٔ (S_i) $(i = 1, 2, \ldots)$، یکی از دو جهت ممکن را، به عنوان جهت مثبت انتخاب می‌کنیم؛ به این ترتیب، همان‌طورکه دیدیم، رویهٔ سطح (S_i) تثبیت می‌شود. اگر این انتخاب را بتوان طوری انجام داد که همیشه، بخش مشترک دو دورهٔ متصل به‌هم*، در دو حالت، در جهت‌های مخالف هم باشند (شکل ۸۵)، آن وقت، وتنها آن وقت، می‌توان سطح (S) را دورویه دانست. رویهٔ سطح (S)، به عنوان مجموعهٔ رویه‌های بخش‌های آن ــ که به ترتیب مذکور انتخاب شده‌اند ــ معین می‌شود.

اگر دست‌کم دریک حالت، جهت حرکت روی دوره، درجهت عکس تغییرکند، آن

---

*) این بخش، از قطعه‌های جداگانه هم می‌تواند تشکیل شود.

وقت، برای این‌که‌شرط ما رعایت شود، باید درهمه دوره‌ها، همین وضع پیش‌آید. به‌این ترتیب، رویه‌های انتخابی همهٔ قطعه‌های (S_i) تغییر جهت می‌دهند و از مجموعهٔ آن‌ها، رویهٔ دوم سطح تشکیل می‌شود.



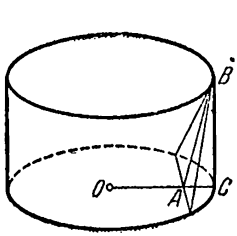
شکل ۸۶

برای‌این‌که خواننده، به‌آن چه گفته‌شد، قانع‌شود، پیشنهاد می‌کنیم: ۱) تحقق‌آن‌ها را روی مکعب (شکل۸۶)، با انتخاب جهت مناسب روی هرشش قطعهٔ مستوی تشکیل دهندهٔ آن، مورد آزمایش قرار دهد، ۲) اگربخواهد همین آزمایش را با سطح موبیوسی‌که به دو یاچند قطعه سطح دورویه تقسیم شده است، انجام دهد، باچه دشواری‌هایی برخورد می‌کند، و بالاخره ۳) ثابت‌کندکه، این تعریف برای رویهٔ سطح، بستگی به‌این نداردکه سطح، بدکدام قطعه‌های هموار تقسیم شده است.

§۲. مساحت سطح خمیده

۶۲۳. مثال‌شوارتز. مفهوم مساحت سطح خمیده، شباهت معینی با مفهوم طول خط خمیده (طول‌کمان منحنی) دارد. طول‌کمان (غیربسته) را، به‌عنوان حد محیط خط شکستهٔ محاط دراین‌کمان تعریف کردیم، بشرطی‌که طول همهٔ ضلع‌های این خط شکسته، به‌سمت صفر میل‌کنند. درحالت سطح خمیده هم (که بازهم، آن را غیربسته می‌گیریم)، طبیعی است‌که سطح چندوجهی محاط درآن را درنظر بگیریم و مساحت سطح خمیده را به عنوان حد مساحت سطح این چندوجهی، با این شرط معین کنیم‌که قطر همهٔ وجه‌ها به سمت صفر میل‌کنند.

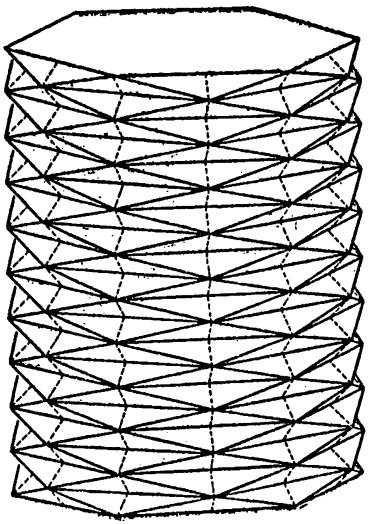
باوجود این، درسدهٔ گذشته، روشن شدکه، این‌تعریف، مناسب‌نیست. مثلا،شوارتز (H. A. Schwarz) ثابت‌کردکه، حتی برای حالت سادهٔ سطح استوانهٔ قائم دوار هم، این حد وجود ندارد. ما این‌نمونهٔ آموزنده را می‌آوریم.



شکل ۸۷

چنین استوانه‌ای را به شعاع R وارتفاع H درنظر می‌گیریم و، درآن، یك چندوجهی را به ترتیب زیر، محاط می‌کنیم. ارتفاع استوانه را به m بخش‌برابر تقسیم وازنقطه‌های‌تقسیم، صفحه‌هایی عمود برمحوراستوانه رسم می‌کنیم. به‌این‌ترتیب، روی سطح استوانه، $m+1$ دایره به دست می-

آید $(m-1)$ دایرهٔ تقسیم، به اضافهٔ ۲ دایرهٔ قاعده‌ها). هریك ازاین دایره‌ها را به n بخش برابر، چنان تقسیم می‌کنیم که نقطه‌های تقسیم هر دایرهٔ بالایی، در وسط‌کمان‌های دایرهٔ پایینی واقع باشند.



شکل ۸۸

سپس، مثلث‌هایی را انتخاب می‌کنیم که از وترهای همهٔ این‌کمان‌ها و پاره خط‌هایی تشکیل شده باشندکه انتهای وترها را به‌نقطه‌های تقسیم دایره‌های بالا و پایین(که مستقیماً دربالا یا زیر کمان متناظر قرار دارند) وصل می‌کنند (شکل۸۷). مجموعهٔ این $2mn$ مثلث برابر، همان سطح‌چندوجهی $(\sum_{m,n})$ ما را تشکیل می‌دهد که مدل آن را، درشکل ۸۸ نشان داده‌ایم.

اکنون، مساحت σ، هریك از مثلث‌ها را، محاسبه می‌کنیم. قاعدهٔ مثلث را وتری می‌گیریم که طول آن چنین است:

$$2R\sin\frac{\pi}{n}$$

برای پیدا کردن ارتفاع AB مثلث (شکل ۸۷ را ببینید)، توجه می‌کنیم که $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$، که در آن

$$AC=OC-OA=R\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right),\qquad BC=\frac{H}{m}$$

به‌این ترتیب، مساحت یکی‌از مثلث‌ها، چنین می‌شود:

$$\sigma=R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\left(\frac{H}{m}\right)^2}$$

و مساحت تمامی سطح چندوجهی برابر است با

$$\sum_{m,n}=2mn\sigma=2R\cdot n\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+H^2}$$

وقتی‌که m و n، به‌طور نامتناهی، ترقی‌کنند، قطرهای همهٔ مثلث‌ها هم به سمت صفر میل

می‌کنند، ولی مساحت $\sum_{m,n}$، دارای حدی نیست. درواقع، اگر m و n چنان ترقی کنند که نسبت $\frac{m}{n^۲}$ به‌سمت حد معین q میل کند:

$$\text{حد}\frac{m}{n^۲}=q$$

داریم:
$$\text{حد}\, n\sin\frac{\pi}{n}=\pi$$

ولی ازطرف دیگر، باتوجه به فرضی که داشتیم:

$$\text{حد}\, m\left(۱-\cos\frac{\pi}{n}\right)=\text{حد}\, m\cdot ۲\sin^۲\frac{\pi}{۲n}=\text{حد}\frac{\pi}{۲}\cdot\frac{m}{n^۲}=\frac{\pi^۲}{۲}q$$

وبنابراین
$$\text{حد}\sum_{m,n}=۲\pi R\sqrt{\frac{\pi^۴R^۲}{۴}q^۲+H^۲}$$

می‌بینیم که درواقع، این حد بستگی به q دارد، یعنی به‌طرز ترقی هم‌زمان nوm. به‌ازای $q=۰$، و تنها در این‌حالت، این‌حد برابر $۲\pi RH$ می‌شود (مساحتی‌که در دورهٔ هندسهٔ دبیرستانی به دست می‌آید). ولی اگر با q همراه باشد، حتی می‌تواند برابر با بی‌نهایت بشود. به‌این ترتیب، اگر m و n بدون ارتباط باهم تابی‌نهایت ترقی کنند، درواقع برای مساحت $\sum_{m,n}$، حد معینی به‌دست نمی‌آید: سطح استوانه‌ای، اگر از دیدگاه تعریف بالا درنظر گرفته شود، مساحتی نخواهد داشت.

توجه به‌این پرسش اهمیت داردکه: وضع درحالت خط شکستهٔ محاط درمنحنی، با حالت سطح چندوجهی محاط در سطح خمیده، چه تفاوتی باهم دارند؟ برای سادگی‌کار، هم منحنی وهم سطح خمیده را هموار به‌حساب می‌آوریم. دراین صورت، جهت هریک‌از وترهایی‌که خط شکسته را تشکیل می‌دهند، وقتی به اندازهٔ کافی کوچک باشند، با جهت مماس درهرنقطهٔ دلخواه‌کمان، تفاوت کوچکی دارند. به‌همین‌مناسبت، وتربی‌نهایت‌کوچک را، می‌توان با هردقتی‌که لازم باشد، باعنصرکمان متناظر باآن عوض‌کرد. درحالی که، اگر رأس‌های یک چندضلعی را بریک سطح خمیده درنظر بگیریم، هرقدر هم‌که مساحت آن‌کوچک باشد، هیچ ربطی به‌وضع صفحهٔ مماس برسطح درفضا، ندارد و به آن نزدیک نمی‌شود؛ وروشن است‌که، دراین حالت، نمی‌توان عنصرهای مساحت را باهم عوض‌کرد. مثالی‌که دیدیم، به‌خوبی این‌وضع را نشان‌می‌دهد: همهٔ صفحه‌های مماس برسطح‌استوانه‌ای قائم‌اند، درحالی‌که وجه‌های مثلثی سطح محاطی، برای مقدارهای بزرگ q، تقریباً افقی

می‌شوند و «چین‌های» کوچکی را تشکیل می‌دهند.

۶۲۴. تعریف مساحت سطح‌های خمیده. بحث قبل، ما را به‌سمت این اندیشه می‌کشاند که برای چند وجهی محاط در سطح خمیده، به‌جز این شرط که قطرهای همهٔ وجه‌های آن به سمت صفر میل کنند، شرط دیگری راهم در نظر بگیریم. وضع این وجه‌ها در فضا، به وضع صفحه‌های مماس برسطح، مرتباً نزدیک و نزدیک‌تر شود.

ولی تحقق این اندیشه، به هیچ‌وجه ساده نیست وچاره‌ای جز کنار گذاشتن آن نداریم (با **۶۲۷** مقایسه شود). تعریف مفهوم مساحت سطح خمیده را براساس اندیشهٔ دیگری می‌دهیم که البته، به‌نوبه خود، تعریفی طبیعی است.

سطح هموار و باز (S) را درنظرمی‌گیریم که باقطعه دورهٔ محدود (L) محصور شده باشد. فرض می‌کنیم، این سطح، به‌کمک شبکه‌ای از قطعه منحنی‌های هموار، به بخش‌های

$$(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$$

تقسیم شده باشد. درهربخش (S_i)، به‌دلخواه نقطهٔ M_i $(i = 1, 2, \dots n)$ را انتخاب می‌کنیم. اگر تصویرقائم عنصر (S_i) را برصفحهٔ مماس برسطح در نقطهٔ M_i پیدا کنیم، در تصویر، شکل مسطح (T_i) با مساحت T_i به‌دست می‌آید.

مساحت سطح (S) را، حد S، مجموع این مساحت‌های T_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ می‌نامیم، به شرطی که قطر همهٔ عنصرهای (S_i) به سمت صفر میل کنند.

اگر بزرگترین قطر، از قطرهای مذکور را، λ بنامیم، آن وقت می‌توان نوشت:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum T_i$$

خواننده می‌تواند به‌سادگی، این روند حدی را، چه «بازبان $\varepsilon - \delta$» وچه «بازبان دنباله‌ها» بیان کند. سطحی که دارای مساحت باشد، تربیع‌پذیر نامیده می‌شود.

۶۲۵. یادداشت. برای این که، این تعریف، مفهوم دقیقی پیدا کند، گزارهٔ کمکی زیررا می‌آوریم:

هربخش (S') از سطح (S)، به شرطی که قطری به قدر کافی کوچك داشته باشد، بر صفحهٔ مماس در نقطهٔ دلخواه M' از این بخش، با تناظر یك ارزشی متقابل، تصویر می‌شود.

به‌این ترتیب، اگرقطرهای همهٔ بخش‌های (S_i)، به‌قدرکافی کوچك باشند، آن‌وقت، تصویرهای (T_i) آن‌ها، برصفحه‌های مماس متناظر خود، شکل‌های مسطح کاملا معینی را تشکیل می‌دهند که به‌قطعه منحنی‌های هموار محدودند، که البته تربیع‌پذیر خواهند بود: مجموع $\sum T_i$، معنا پیدا می‌کند.

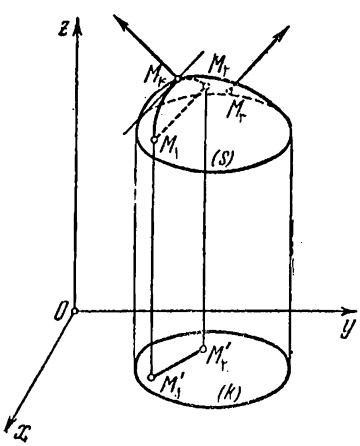
به اثبات گزاره می‌پردازیم. فرض کنیم، سطح (S)، با معادله‌های پارامتری داده شده باشد:

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v) \qquad (۱)$$

که در آن‌ها، (u,v) در حوزهٔ (Δ)، محدود به قطعه محیط هموار (Λ) واقع بر صفحهٔ uv تغییر می‌کند. درضمن، فرض می‌کنیم بین نقطه‌های (S) و (Δ)، تناظر یك به یك برقرار باشد و نقطه‌های محیط (Λ) متناظر نقطه‌های محیط (L) ازسطح باشند.

برای رفع برخی دشواری‌های مربوط به محیط، بهتر است، تابع (۱) را، با حفظ ویژگی‌های دیفرانسیلی آن [۲۶۱]، برحوزهٔ اندکی وسیع‌تر (Δ) گسترش‌دهیم، تا سطح هموار $(\tilde{S})$ را، به‌عنوان ادامهٔ سطح (S) به دست‌آوریم.

هر نقطهٔ M_0 ازسطح (S) را می‌توان باچنان قطعهٔ (s) ازسطح (S) [یا $(\tilde{S})$، وقتی که صحبت برسر محیط باشد] محصور کردکه، این قطعه، با معادلهٔ صریح یکی‌از سه نوع [۲۲۸] قابل بیان باشد و، درضمن، برصفحهٔ مختصات نظیر، در دایره‌ای تصویر شود. علاوه برآن، می‌توان فرض کردکه، قائم‌های در دو نقطهٔ (s)، هرگز برهم عمود نباشند (با کوچك‌کردن قطر حوزه، به سادگی، این توفیق به دست می‌آید). اکنون ادعا می‌کنیم که: قطعهٔ (s) از سطح، بر صفحهٔ مماس در هر نقطهٔ M آن، به صورت یك ارزشی متقابل، تصویر می‌شود.



شکل ۸۹

برای اثبات، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. دراین صورت، سه نقطهٔ M_1، M_2، M_3 بر (s) می‌توان طوری پیداکرد که وتر M_1M_2، با قائم بر سطح در نقطهٔ M_3، موازی باشد (شکل ۸۹). فرض می‌کنیم سطح (s)، با معادله‌ای صریح، به صورت

$$z=f(x,y)$$

بیان‌شده باشدکه، در آن، نقطهٔ (x,y)، سطح‌دایره (k) را درصفحهٔ xy می‌پیماید. از وتر M_1M_2 صفحه‌ای موازی بامحور z می‌گذرانیم. این‌صفحه، سطح (s) ما را در کمانی مثل $\overset{\frown}{M_1M_2}$ قطع

می‌کند*. همان‌طور که می‌دانیم[۱۱۲، ۱۱۴]، روی این کمان می‌توان نقطهٔ M_4 را طوری پیدا کرد که مماس در آن، موازی با وتر باشد. ولی دراین صورت، قائم برسطح در نقطهٔ M_4، براین وتر، و، بنابراین، برقائم در نقطهٔ M_4، عمود می‌شود که مخالف با فرض است...

اکنون، با تکیه بر آن چه گفتیم، گزارهٔ ابتدای بند را ثابت می‌کنیم. برای هر نقطهٔ M_0 از سطح (S)، «همسایگی» (s) آن را با «همسایگی» تنگ‌تر (s') چنان عوض می‌کنیم که، محیط‌های آن‌ها، نقطه‌های مشترکی نداشته باشند. نقطهٔ M_0 وقطعه سطح (s') از uv، متناظرند با نقطهٔ m_0 و همسایگی آن (δ')؛ هیچ مانعی ندارد که به (s') و (δ')، محیط آن‌ها را اضافه نکنیم، یعنی آن‌ها را، باز به‌حساب آوریم. اگر پیش‌قضیه بود[۱۷۵] را درمورد دستگاه $\{(\delta')\}$ حوزه‌های باز، که همهٔ حوزهٔ (Δ) را پوشانده‌اند، به کار بریم، با برگشت به سطح (S)، به سادگی به‌تعداد محدودی قطعه‌های

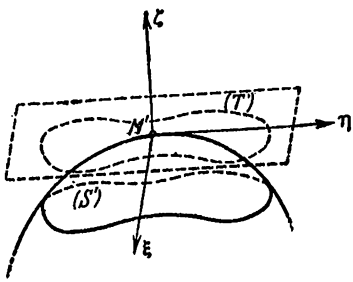
$$(s'_1),\ (s'_2),\ \dots,\ (s'_m)$$

می‌رسیم که، در مجموع، تمامی سطح (S) را پوشانده‌اند. درکنار آن‌ها، حوزه‌های وسیع‌تر متناظر را هم در نظر می‌گیریم:

$$(s_1),\ (s_2),\ \dots,\ (s_m)$$

برای هر i، مرزپایین فاصله‌های نقطه‌های قطعهٔ (s'_i) را از نقطه‌های بخش‌های (S)، یعنی سطح‌های (s_i) انتخاب می‌کنیم و کوچکترین آن‌ها را η می‌نامیم. فرض کنید، قطر بخش (S') سطح ما، کوچکتر از عدد η باشد. اگر نقطه‌ای از آن، در (s'_i) معینی بیفتد، آن‌وقت همهٔ بخش (S')، به‌طور کامل در (s_i) واقع می‌شود و، بنابراین، همراه با (s_i) دارای ویژگی مورد نظر خواهد بود.

۶۲۶. وجود مساحت سطح و محاسبهٔ آن. ثابت می‌کنیم که، با توجه به‌فرض‌های بالا، سطح (۱) تربیع پذیر است و، سپس، دستور ساده‌ای برای محاسبهٔ مساحت آن به‌دست می‌آوریم.



شکل ۹۵

(S') را بخشی از (S) (باهمان ویژگی که درابتدای بند قبل آوردیم) و $M'(x', y', z')$ را نقطه‌ای از آن می‌گیریم. با انتقال مبداء مختصات به‌این نقطه، به دستگاه جدید محورهای مختصات $\zeta\eta\xi$ می‌رویم: صفحهٔ $\xi\eta$ را، صفحهٔ مماس برسطح

*) دراین‌جا، این موقعیت اهمیت دارد که، پاره خط $M'_1M'_2$، تصویر وتر M_1M_2 بر صفحهٔ xy، به‌طور کامل متعلق به دایرهٔ (k) باشد.

در نقطهٔ M' و محور ζ را قائم متناظر آن در نظر می‌گیریم (شکل ۹۰). دستورهای تبدیل مختصات، چنین‌اند:

$$\begin{cases}\xi=(x-x')\cos\alpha_1+(y-y')\cos\beta_1+(z-z')\cos\gamma_1,\\ \eta=(x-x')\cos\alpha_2+(y-y')\cos\beta_2+(z-z')\cos\gamma_2,\\ \zeta=(x-x')\cos\lambda'+(y-y')\cos\mu'+(z-z')\cos\nu'\end{cases}$$

که در آن، α_1، β_1، ...، ν'، عبارتند از زاویه‌های بین محورهای قدیم و جدید، طبق جدول زیر

	x	y	z
ξ	α_1	β_1	γ_1
η	β_1	β_2	γ_2
ζ	λ'	μ'	ν'

از آن‌جا که (S')، در حوزه‌ای مثل (T')، بر صفحهٔ $\xi\eta$ به‌طور یک‌ارزشی تصویر می‌شود و، از طرف دیگر، نقطه‌های (S') با نقطه‌های بخشی از حوزهٔ (Δ) مثل (Δ') در تناظر یک به یک است، بنابراین، بین نقطه‌های (T') و (Δ') هم تناظر یک به یک برقرار خواهد بود. اگر x و y و z را به صورت تابع‌های (۱) در نظر بگیریم، دو دستور اول دستورهای تبدیل، این تناظر را عملی می‌کند. اگر از عبارت مربوط به مساحت در مختصات منحنی‌الخط استفاده کنیم [۶۰۵]، داریم:

$$T'=\iint\limits_{(\Delta')}\left|\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}\right|dudv \qquad (۲)$$

ولی ژاکوبین

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}=$$

$$=\begin{vmatrix}x'_u\cos\alpha_1+y'_u\cos\beta_1+z'_u\cos\gamma_1 & x'_v\cos\alpha_1+y'_v\cos\beta_1+z'_v\cos\gamma_1\\ x'_u\cos\alpha_2+y'_u\cos\beta_2+z'_u\cos\gamma_2 & x'_v\cos\alpha_2+y'_v\cos\beta_2+z'_v\cos\gamma_2\end{vmatrix}$$

دترمینان نظیر حاصل‌ضرب ماتریس‌های زیر است:

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{pmatrix}$$

و بنا بر قضیهٔ معلوم جبر، برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های دترمینان‌های مرتبهٔ دوم نظیر:

$$\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\gamma_1 & \cos\alpha_1 \\ \cos\gamma_2 & \cos\alpha_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 \end{vmatrix} = A\cos\lambda' + B\cos\mu' + C\cos\nu'$$

در این‌جا، از این مطلب استفاده کردیم که، مکمل‌های جبری اجزای دترمینان

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\lambda' & \cos\mu' & \cos\nu' \end{vmatrix} = 1$$

دقیقاً برابر با خود اجزا هستند. این مطلب، مثلا، از این‌جا ناشی می‌شود که هریك از بردارهای واحد مختصاتی

$$(\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1), \quad (\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2), \quad (\cos\lambda', \cos\mu', \cos\nu')$$

برابر با حاصل‌ضرب برداری دوتای دیگر است [با **۶۶۴** (۲) مقایسه کنید].

از سوی دیگر، اگر مقدار دترمینان‌های A، B و C را در نقطهٔ M'، با A'، B' و C' نشان دهیم، داریم:

$$\cos\lambda' = \frac{A'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, \quad \cos\mu' = \frac{B'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

$$\cos\nu' = \frac{C'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

(درهمهٔ حالت‌ها، علامت جلو رادیکال‌ها، یکی است). به‌این ترتیب

$$\left|\frac{D(\xi\,\eta)}{D(u,v)}\right| = \frac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

در سمت راست، با تابعی پیوسته از چهار متغیر مستقل u، v، u' و v' درحوزهٔ

$(\Delta)\times(\Delta)$* وجود دارد. این عبارت، به ازای $u'=u$ و $v'=v$ به

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

تبدیل می‌شود، که از آن، به‌اندازهٔ مقدار $\alpha=\alpha(u, v, u', v')$ تفاوت دارد که، با توجه به پیوستگی یکنواخت تابع مذکور، فاصلهٔ به‌قدر کافی کوچك نقطه‌های (u, v) و (u', v')، بدون ارتباط به موضع نقطهٔ (u', v') به اندازهٔ دلخواه، کوچك می‌شود.

دراین صورت، از (۲) به دست می‌آید:

$$T'=\iint_{(\Delta')}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv+\varepsilon'\Delta'$$

که در آن، ε'، همزمان با قطر Δ' و یا، همزمان با قطر S'، مقداری بی‌نهایت کوچك است. اگر این نتیجه‌گیری را، برای هریك از بخش‌های (S_i) $(i=1, 2, \dots, n)$ ــ که سطح (S) را به‌آن‌ها تقسیم کرده‌ایم ــ به‌کار بریم، به رشته برابری‌هایی از این گونه می‌رسیم:

$$T_i=\iint_{(\Delta_i)}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv+\varepsilon_i\Delta_i$$

که در آن، Δ_i، بخشی از حوزهٔ (Δ)، متناظر (S_i) است. از مجموع این برابری‌ها، به دست می‌آید:

$$\sum_i T_i=\iint_{(\Delta)}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv+\varepsilon$$

که در آن، مقدار

$$\varepsilon=\sum_i \varepsilon_i\Delta_i$$

همزمان با λ، مقداری بی‌نهایت کوچك است. بنابراین، وقتی $\lambda\to 0$، برای $\sum_i T_i$، حد زیر را داریم:

$$S=\iint_{(\Delta)}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv \qquad (۳)$$

---

*) حوزهٔ چهاربعدی نقطه‌های (u, v, u', v') را به‌این‌صورت نشان داده‌ایم، که در آن، نقطه‌های (u, v) و (u', v')، به‌طور جداگانه، متعلق به‌حوزهٔ دوبعدی (Δ) هستند.

که بنا به‌تعریف، مساحت سطح است.

اگرماتریس

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

را «مجذورکنیم» و دترمینان

$$\begin{vmatrix} x'^2_u+y'^2_u+z'^2_u & x'_ux'_v+y'_uy'_v+z'_uz'_v \\ x'_ux'_v+y'_uy'_v+z'_uz'_v & x'^2_v+y'^2_v+z'^2_v \end{vmatrix}$$

را تشکیل‌دهیم، بنا برقضیهٔ معلوم‌جبر، برابر با $A^2+B^2+C^2$ می‌شود. معمولا فرض‌می‌کنند:

$$x'^2_u+y'^2_u+z'^2_u=E,\quad x'_ux'_v+y'_uy'_v+z'_uz'_v=F,$$

$$x'^2_v+y'^2_v+z'^2_v=G$$

این‌ها، به‌ضریب‌های گوس در سطح معروف‌اند ودرهندسهٔ دیفرانسیلی نقشی اساسی به‌عهده دارند. بااین علامت‌ها، داریم:

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2$$

وبنابراین، دستور (۳) را می‌توان این‌طور نوشت:

$$S=\iint_{(\Delta)}\sqrt{EG-F^2}\,dudv \qquad (۳^*)$$

عبارت

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv=\sqrt{EG-F^2}\,dudv \qquad (۴)$$

را مساحت جزئی در مختصات منحنی‌الخط گویند.

تا این‌جا، به سطحی پرداختیم که باز و هموار بود. اگرسطح، با این‌حالت‌سازگار نباشد، ولی بتوان آن را به تعداد متناهی قطعه‌های باز و هموار تقسیم‌کرد، آن وقت، مجموع مساحت‌های این قطعه‌های جداگانه را، مساحت سطح می‌نامیم. درضمن، به‌سادگی می‌توان ثابت‌کردکه، وقتی مساحت را این‌طور تعریف‌کنیم، درعمل بستگی به‌آن ندارد که، چگونه به قطعه‌های موردنظر، تقسیم شده باشد. اگرتمامی سطح مفروض با معادله‌های پارامتری مشخص شده باشد، می‌توان مساحت آن را، مثل قبل، با دستور (۳) یا (۳*) بیان‌کرد.

درپایان این‌بند، حالت سادهٔ خاصی‌را درنظر می‌گیریم‌که، سطح (S)، با معادله‌ای صریح داده شده باشد:

$$z=f(x, y)$$

که درآن، (x, y) درحوزهٔ (D) ازصفحهٔ xy تغییر می‌کند. دراین‌جا، متغیرهای x و y، نقش پارامترهای u و v را به‌عهده دارند. اگر، طبق‌معمول، فرض‌کنیم:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

واز روی ماتریس

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & p \\ ۰ & ۱ & q \end{pmatrix}$$

دترمینان‌های $A=-p$، $B=-q$، $C=۱$ را تشکیل دهیم، به‌این دستور می‌رسیم:

$$S=\iint_{(D)}\sqrt{۱+p^۲+q^۲}\,dxdy \qquad (۵)$$

به‌یاد بیاوریم‌که، برای زاویهٔ حادهٔ v، بین‌قائم و محور z، داریم:

$$cosv=\frac{۱}{\sqrt{۱+p^۲+q^۲}}$$

بنابراین، دستور مساحت را، این‌طور هم می‌توان نوشت:

$$S=\iint_{(D)}\frac{dxdy}{cosv} \qquad (۵a)$$

بالاخره، اگر شرط حاده بودن زاویهٔ v وجود نداشته باشد:

$$S=\iint_{(D)}\frac{dxdy}{|cosv|} \qquad (۵b)$$

[با دستور (۷) در **۵۴۴**، برای طول‌کمان منحنی، درحالت معادلهٔ صریح $y=f(x)$، مقایسه‌کنید.]

۶۲۷. روش سطح‌های چندوجهی محاطی. هرچند از اندیشهٔ تعریف مفهوم مساحت سطح خمیده، براساس سطح چندوجهی محاط درآن، خودداری کردیم، اکنون دوباره به‌آن بازمی‌گردیم و،دست‌کم، نشان می‌دهیم‌که: چگونه می‌توان سطح چندوجهی

محاطی را بنا کرد تا مساحت آن به سمت مساحت سطح خمیده میل کند.

به‌حالتی می‌پردازیم که حوزهٔ (Δ) مستطیلی باشد با ضلع‌هایی موازی محورهای مختصات.

رویهٔ معینی ازسطح (S) و، همچنین، جهت مثبت حرکت روی دورهٔ آن را انتخاب می‌کنیم. می‌توان این‌جهت را، باجهت‌مثبت حرکت روی‌دورهٔ مستطیل (Δ) متناظر گرفت. می‌دانیم [۶۲۱]، باتوجه به‌این‌شرط‌ها، می‌توان کسینوس‌های هادی قائم برسطح را، با این دستورها، پیداکرد:

$$\cos\lambda=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\mu=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\nu=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

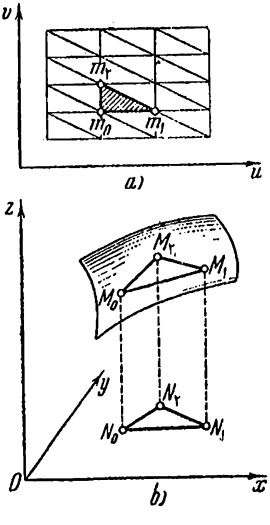
(با علامت‌های مثبت برای همهٔ رادیکال‌ها).

اکنون، مستطیل (Δ) را، به‌کمک خط‌های راست موازی باضلع‌های آن، به مستطیل‌هایی جزئی تجزیه و، سپس، هریك ازآن‌ها را، به‌کمك قطرش، به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم می‌کنیم (شکل ۹۱، a). به‌این ترتیب، حوزهٔ (Δ) را مثلث‌بندی می‌کنیم. یکی ازاین مثلث‌های جزئی را مثلث $m_0m_1m_2$ می‌گیریم که رأس‌های آن در نقطه‌های

$$m_0(u_0, v_0),\quad m_1(u_0+h, v_0),\quad m_2(u_0, v_0+k)$$

باشند (h و k، عددهایی هم علامت‌اند). این‌نقطه‌ها، در روی سطح (S) متناظرند با نقطه‌های

$$M_0(x_0, y_0, z_0),\quad M_1(x_1, y_1, z_1),$$
$$M_2(x_2, y_2, z_2)$$



شکل ۹۱

که مثلثی مثل $M_0M_1M_2$ را درفضا مشخص می‌کنند (شکل۹۱، b). ازهمهٔ این مثلث‌ها، سطح $(\sum)$ از یك چندوجهی به‌دست می‌آیدکه محاط درسطح (S) است؛ و ماهم، همین سطح را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر حرکت برمحیط هریك ازاین مثلث‌ها، درجهت $M_0M_1M_2M_0$ باشد، یعنی متناظر با جهت مثبت حرکت روی محیط مثلث $m_0m_1m_2$، آن وقت، به‌کمك شرط‌هایی‌که در **۶۲۲** آوردیم، می‌توان ضلع‌های سطح چند وجهی $(\sum)$ را معین‌کرد.

اگر مثلث $M_0M_1M_2$ را برصفحهٔ xy تصویر کنیم، مثلث $N_0N_1N_2$ به دست می‌آید، با رأس‌هایی در نقطه‌های

$$N_0(x_0, y_0),\ N_1(x_1, y_1),\ N_2(x_2, y_2)$$

واز هندسهٔ تحلیلی می‌دانیم که مساحت این مثلث، چه از نظر مقدار وچه از نظر علامت، با دترمینان زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}$$

بنا بر دستور نموهای محدود داریم:

$$x_1-x_0=x(u_0+h, v_0)-x(u_0, v_0)=x'_u(u_0+\theta h, v_0)\cdot h=$$
$$=[x'_u(u_0, v_0)+\varepsilon_1]\cdot h$$

که در آن، ε_1 همراه با h، بدون ارتباط با موضع نقطهٔ (u_0, v_0)، یك بی‌نهایت کوچك است*. به همین ترتیب

$$y_1-y_0=(y'_u+\varepsilon_2)\cdot h,$$
$$x_2-x_0=(x'_v+\varepsilon_3)\cdot k,\quad y_2-y_0=(y'_v+\varepsilon_4)\cdot k$$

که در آن‌ها، همهٔ مشتق‌ها، به ازای $u=u_0$، $v=v_0$ محاسبه شده‌اند: و εها، چه در اینجا وچه بعدازاین، کمیت‌هایی هستند که همراه با h و k، وبدون ارتباط بموضع نقطهٔ (u_0, v_0)، به دلخواه بی‌نهایت کوچك‌اند. اکنون مقدار σ_{xy} را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{2}hk\begin{vmatrix} x'_u+\varepsilon_1 & y'_u+\varepsilon_2 \\ x'_v+\varepsilon_3 & y'_v+\varepsilon_4 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}hk(C+\varepsilon_5)=(C+\varepsilon_5)\cdot\delta \qquad (۶)$$

که در آن، δ عبارت است ازمساحت مثلث $m_0m_1m_2$. به همین ترتیب، برای تصویر بر صفحه‌های دیگرمختصات، داریم:

$$\sigma_{yz}=(A+\varepsilon_6)\cdot\delta,\quad \sigma_{zx}=(B+\varepsilon_7)\cdot\delta \qquad (۶a)$$

---

*) دراین‌جا، وهم بعد ازاین، از پیوستگی یکنواخت مشتق x'_u استفاده کرده‌ایم.

اکنون، σ، مساحت خود مثلث $M_0M_1M_2$، چنین می‌شود:

$$\sigma=\sqrt{\sigma_{xy}^2+\sigma_{yz}^2+\sigma_{zx}^2}$$

که به‌سادگی، عبارت زیر، برای‌آن به‌دست می‌آید:

$$\sigma=(\sqrt{A^2+B^2+C^2}+\varepsilon_\Delta).\delta \qquad (۷)$$

به‌سادگی می‌توان فهمید که نسبت‌های

$$\frac{\sigma_{yz}}{\sigma},\ \frac{\sigma_{zx}}{\sigma},\ \frac{\sigma_{xy}}{\sigma}$$

کسینوس‌های هادی قائم برصفحهٔ مثلث $M_0M_1M_2$ را، باتوجه به‌جهت آن، بیان می‌کنند و، باتوجه به (۶)، (6a) و (۷)، به ازای $k\to 0$، h، به سمت کسینوس‌های هادی (۵)، قائم برسطح، میل‌می‌کنند و، درضمن، به طور یکنواخت برای همهٔ وجه‌ها. همچنین روشن است که، بااین گذر حدی، قطرهای همهٔ وجه‌های سطح $(\sum)$ هم، به‌طور یکنواخت به سمت صفر میل می‌کنند؛ واین‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

سرانجام، اگر برابری‌های به‌صورت (۷) را باهم جمع کنیم، مساحت سطح چندوجهی $(\sum)$ به دست می‌آید:

$$\Sigma=\sum\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\delta+\sum\varepsilon_\Delta.\delta$$

و وقتی $k\to 0$، h، به سمت حد (۳) سطح خمیده میل می‌کند.

این ساختمان را می‌توان برای حالتی‌هم که، حوزهٔ (Δ)، از مستطیل‌ها تشکیل شده باشد، تعمیم داد. دراین‌جا، مثلث‌بندی هر حوزه، مستلزم ملاحظه‌های دقیقی (ولو مقدماتی) است؛ ولی‌ما به‌این مطلب نمی‌پردازیم.

۶۲۸. حالت‌های خاص تعیین مساحت. سطح همواری، بدون نقطه‌های تکراری درنظر می‌گیریم. این سطح، مساحتی داردکه با دستور (۳) یا (*۳) بیان می‌شود. فرض می‌کنیم، روی‌سطح (S)، قطعهٔ (s) ازآن راکه به‌قطعهٔ دورهٔ هموار (l) محدود شده‌است، جداکرده باشیم؛ متناظرآن درحوزهٔ (Δ)، قطعهٔ (δ) است که به قطعه منحنی هموار (λ) محدود است. روشن است که مساحت بخش (S') از سطح، که با جداکردن شکل (s) به دست‌آمده است، ومساحت خود شکل (s)، به‌ترتیب، برابرند با

$$S'=\iint\limits_{(\Delta)-(\delta)}\sqrt{EG-F^2}\,dudv,\qquad s=\iint\limits_{(\delta)}\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

اکنون، اگر شکل (s) ازسطح، به‌سمت یك‌نقطه یا یك منحنی فشرده شود، همین‌وضع برای شکل مسطح (δ) هم‌پیش می‌آید و مساحت‌آن، δ، به‌سمت صفر میل‌می‌کند. همراه با آن، s هم به‌سمت صفرمیل می‌کند، به‌نحوی‌که

$$\text{حد} S' = S \qquad (۸)$$

حالا فرض می‌کنیم، همان سطح، با نمایش دیگری داده شده باشد:

$$x = x^*(u^*, v^*), \quad y = y^*(u^*, v^*), \quad z = z^*(u^*, v^*)$$

که به‌ازای‌آن، درنقطهٔ جداگانه یا در طول منحنی جداگانه، «ویژگی» پدیدار شود (به خصوص، مشتق‌ها، دراین نمایش تابع، بی‌نهایت شود). این نقطه یا منحنی را، به‌کمك همسایگی‌آن (s)، جدا می‌کنیم، دراین صورت، مساحت بخش‌باقی‌ماندهٔ (S')، این‌طور بیان می‌شود:

$$S' = \iint_{(\Delta^*)-(\delta^*)} \sqrt{E^*G^* - F^{*2}}\, du^* dv^*$$

به شرطی‌که، نشانه‌های ستاره، معرف مقدارهای متعلق به نمایش دوم باشند. ولی می‌دانیم [(۸) را ببینید]، با فشرده شدن (s) به سمت یك نقطه یا یك منحنی، S' باید به سمت S میل‌کند. بنابراین، برای به‌دست‌آوردن S، می‌توانیم حد این رابطه را پیداکنیم، وقتی که حوزهٔ δ^*، به‌سمت یك نقطه یا یك منحنی فشرده می‌شود. ولی دراین صورت، دوباره به‌همان دستور عادی می‌رسیم:

$$S = \iint_{(\Delta^*)} \sqrt{E^*G^* - F^{*2}}\, du^* dv^*$$

تنها ممکن است انتگرال، ناویژه ازآب درآید.

حتی اگر باحالتی سروکار داشته باشیم‌که سطح (S)، در هرشکلی از نمایش‌خود، درنقطهٔ جداگانه یا درطول منحنی جداگانه‌ای، خاص باشد، بازهم می‌توانیم از انتگرال (*۳) استفاده‌کنیم، فقط با این‌شرط‌که، این انتگرال، برای بیان مساحت‌آن، ولو به‌صورت ناویژه، وجود داشته باشد. روشن است‌که، درعمل، مساحت S را، به عنوان حد مساحت S' تعریف می‌کنیم، یعنی رابطهٔ (۸) ــ که دراین‌جا ثابت‌کردیم ــ تنها تعمیمی از تصورما دربارهٔ تعریف است.

۶۲۹. مثال‌ها. ۱) مساحت بخشی ازسطح را پیداکنیدکه:

a) به وسیلهٔ استوانهٔ $x^۲+y^۲=R^۲$ $(x, y>۰)$، ازسهموی هذلولی‌وار $z=xy$ جدا شده است؛

b) به وسیلهٔ استوانهٔ $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=c^۲$ از سهمـوی بیضی‌وار $z=\frac{x^۲}{۲a}+\frac{y^۲}{۲b}$ بریده شده است؛

c) به وسیلهٔ استوانهٔ $(x^۲+y^۲)^۲=۲a^۲xy$ از سهمولی هذلولی‌وار $xy=az$ جدا شده است؛

d) به وسیلهٔ استوانهٔ $x^۲+y^۲=\rho^۲$ ازکرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=R^۲$ جدا شده است $(\rho<R)$.

حل. a) داریم: $p=y$ و $q=x$، به‌نحوی‌که بنابر دستور (۵)

$$S=\iint\limits_{\substack{x,y\geqslant ۰\\ x^۲+y^۲\leqslant R^۲}} \sqrt{۱+x^۲+y^۲}\,dxdy$$

واگر به مختصات قطبی برویم، به دست می‌آید:

$$S=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} d\theta \int_{۰}^{R} r\sqrt{۱+r^۲}\,dr=\frac{\pi}{۶}\left[(۱+R^۲)^{\frac{۳}{۲}}-۱\right]$$

b) راهنمائی. از مختصات قطبی تعمیم‌یافته استفاده کنید.

پاسخ: $S=\frac{۲}{۳}\pi ab\left[(۱+c^۲)^{\frac{۳}{۲}}-۱\right]$.

c) راهنمائی. به مختصات قطبی‌بروید. معادلهٔ استوانه در مختصات قطبی به‌صورت $r^۲=a^۲\cdot \sin ۲\theta$ درمی‌آید. داریم:

$$S=\frac{۲}{۳}a^۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\left[(۱+\sin ۲\theta)^{\frac{۳}{۲}}-۱\right]d\theta$$

$\theta=\frac{\pi}{۴}+\lambda$ قرار دهید $(-\frac{\pi}{۴}\leqslant\lambda\leqslant\frac{\pi}{۴})$.

پاسخ: $S=\frac{۲}{۳}a^۲\left(\frac{۱۰}{۳}-\frac{\pi}{۲}\right)$.

d) پاسخ: $S=4\pi R(R-\sqrt{R^2-\rho^2})$.

۲) مطلوب است محاسبهٔ مساحت بخشی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=R^2$ که به وسیلهٔ استوانهٔ $x^2+y^2=Rx$ جدا می‌شود (قاعده‌های بالایی و پایینی «جسم ویویانی»، ۵۹۷، ۲۰)، شکل ۴۸ را ببینید).

حل. برای قاعدهٔ بالایی داریم:

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad p=-\frac{x}{z},\quad q=-\frac{y}{z},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

و بنابراین

$$S=2R\iint_{(D)}\frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

در ضمن حوزهٔ انتگرال‌گیری، عبارت است از سطح دایره‌ای که به محیط دایرهٔ $x^2+y^2=Rx$ محدود می‌شود.

باعبور به مختصات قطبی [با ۶۱۱، ۶) مقایسه کنید]، به دست می‌آید:

$$S=2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}=4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

که با انجام انتگرال‌گیری، سرآخر به دست می‌آید: $S=2R^2(\frac{\pi}{2}-1)$.

ازآن‌جاکه مساحت نیم‌کره برابر $2\pi R^2$ است، مساحت بخشی از نیم‌کره که بعداز جداکردن «جسم ویویانی» باقی‌می‌ماند، برابر $4R^2$ می‌شود، بنابراین، برحسب R وباعبارتی گویا قابل بیان است: به‌این مناسبت، با یادداشت مربوط به ۵۹۷، ۲۰) دربارهٔ دستور حجم «جسم ویویانی» مقایسه کنید.

یادداشت. البته، می‌توانستیم انتگرال دربازهٔ $\frac{\pi}{2}\geqslant\theta\geqslant-\frac{\pi}{2}$ را، به‌دوبرابرانتگرال در بازهٔ $\frac{\pi}{2}\geqslant\theta\geqslant 0$ تبدیل نکنیم. ولی درحالتی‌که انتگرال را، یکباره و از $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$

محاسبه می‌کنیم، باید توجه داشته باشیم که مقدار انتگرال درونی

$$\int_{0}^{R\cos\theta} \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}} = \left[-\sqrt{R^2-r^2}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=R\cos\theta} = R - R\sqrt{\sin^2\theta}$$

برای $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ به‌صورت $R(1-\sin\theta)$ و برای $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 0$ به‌صورت $R(1+\sin\theta)$ در می‌آید، زیرا مقدار سینوس در یك حالت مثبت ودر حالت دیگر منفی است. و روشن است، اگر به این نکته توجه نکنیم، به جواب نادرست می‌رسیم.

۳) مطلوب است محاسبهٔ: a) بخشی ازسطح مخروط $x^2+z^2=y^2$ که در داخل استوانهٔ $x^2+y^2=R^2$ قراردارد؛ b) بخشی ازسطح مخروط $z^2=2xy$ $(x, y \geqslant 0)$، که بین دوصفحهٔ $x=a$ و $y=b$ واقع است؛ c) بخشی از همان سطح که در داخل کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ قرار دارد.

$$S = 8\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dz \int_{y}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-y^2}} = 2\pi R^2 \qquad \text{(راهنمائی. a}$$

$$S = \sqrt{2}\int_{a}^{b} dy \int_{0}^{a} \left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx = \frac{4}{3}(a+b)\sqrt{2ab} \qquad \text{(b}$$

c) مقطع سطح درصفحه‌های $x+y=\pm a$. سپس

$$S = 2\sqrt{2}\iint_{\substack{x, y \geqslant 0 \\ x+y \leqslant a}} \left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx\,dy =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_{0}^{a}\sqrt{x}\,dx\int_{0}^{a-x}\frac{dy}{\sqrt{y}} = 8\sqrt{2}\int_{0}^{a}\sqrt{x(a-x)}\,dx = \pi\sqrt{2}\cdot a^2$$

۴) ثابت کنید، مساحت S، شکل دلخواه واقع بریکی از دامنه‌های (ومثلاً واقع بر دامنهٔ بالایی) سطح مخروطی دوار

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

متناسب است با مساحت تصویر آن برصفحهٔ xy.

راهنمائی. از معادلهٔ صریح $z=\frac{c}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ آغازکنید و دستور (۵) رامورد استفاده قرار دهید.

۵) سطح $z=\arcsin(\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y)$ مفـروض است. مساحت بخشی از آن را پیدا کنیدکه بین صفحه‌های $x=a$ و $x=b$ قرار دارد ($0<a<b$).

حل. داریم:

$$p=\frac{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}},\quad q=\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}}$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}}$$

حوزهٔ انتگرال‌گیری، با این شرطها تعیین می‌شود:

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad |\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}y|\leqslant 1$$

$\operatorname{sh}x=\xi$ و $\operatorname{sh}y=\eta$ می‌گیریم؛ دراین صورت، بازهٔ تغییر متغیرهای جدید چنین‌است:

$$\operatorname{sh}a\leqslant\xi\leqslant\operatorname{sh}b,\quad -\frac{1}{\xi}\leqslant\eta\leqslant\frac{1}{\xi}$$

به‌این ترتیب

$$S=\int_{\operatorname{sh}a}^{\operatorname{sh}b}d\xi\int_{-\frac{1}{\xi}}^{\frac{1}{\xi}}\frac{d\eta}{\sqrt{1-\xi^2\eta^2}}=\pi\int_{\operatorname{sh}a}^{\operatorname{sh}b}\frac{d\xi}{\xi}=\pi\ln\frac{\operatorname{sh}b}{\operatorname{sh}a}$$

۶) مساحت سطـح استوانـه‌ای $x^2+y^2=Rx$، واقـع در درون کـره $x^2+y^2+z^2=R^2$ (سطح جانبی «جسم ویویانی») را پیدا کنید.

حل. معادلهٔ بخش‌جلوی سطح، $y=\sqrt{Rx-x^2}$ است. حوزه تغییر متغیرهای‌مستقل (x, z)، به محور z و سهمی $z=\sqrt{R^2-Rx}$ محدود است. چون:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{1}{2}R-x}{\sqrt{Rx-x^2}},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=0$$

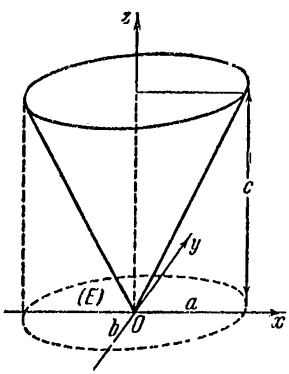
بنابراین

$$S=R\int_0^R\int_{-\sqrt{R^2-Rx}}^{\sqrt{R^2-Rx}}\frac{dzdx}{\sqrt{Rx-x^2}}=2R\sqrt{R}\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{x}}=4R^2$$

[با ۳۴۷، ۴) مقایسه کنید].

۷) مساحت سطح جانبی مخروط به‌ارتفاع c راکه قاعدهٔ‌آن، بیضی بانیم‌قطرهای a و b $(a>b)$ است، پیداکنید. ارتفاع مخروط، از مرکز قاعدهٔ‌آن می‌گذرد.

حل. مبداء مختصات را در رأس مخروط و صفحهٔ xy را موازی قاعدهٔ‌مخروط می‌گیریم (شکل ۹۲). دراین صورت، معادلهٔ سطح چنین می‌شود:



شکل ۹۲

$$z=c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

ومساحت مطلوب

$$S=\iint_{(E)}\sqrt{\frac{\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2+\left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}\,dx\,dy$$

که در آن، (E) عبارت است ازبیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$

ودر ضمن: $\alpha=\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}$، $\beta=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{b}$. باعبور به مختصات قطبی تعمیم یافته، به دست می‌آید:

$$S=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

که ازآن جا، به‌سادگی، به‌انتگرال بیضوی کامل نوع دوم می‌رسیم:

$$S=2a\sqrt{b^2+c^2}\,\mathbb{E}(k);\ k=\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}}$$

۸) مساحت سطحی‌را پیداکنیدکه ازدوران منحنی $y=f(x)$ دور محور x به‌دست می‌آید $(a\leqslant x\leqslant b$، $f(x)\geqslant 0)$.

حل. بدون هیچ دشواری، معادلهٔ سطح دوار به‌دست می‌آید:

$$y^2+z^2=[f(x)]^2$$

و بنابراین، معادلهٔ نیمهٔ بالایی این‌سطح، چنین است:

$$z=\sqrt{[f(x)]^2-y^2}$$

از آن‌جا

$$P=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}},\quad q=\frac{-y}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}}$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=f(x)\frac{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}}$$

بنابراین، مساحت مطلوب، با انتگرال زیر بیان می‌شود:

$$S=2\iint\limits_{(D)} f(x)\frac{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}}dxdy$$

که در آن، حوزهٔ (D) روی صفحهٔ xy، به‌خط‌های راست $x=a$ و $x=b$ و منحنی‌های $y=f(x)$ و $y=-f(x)$ محدود است.

باعبور به انتگرال تکراری، به‌دست می‌آید:

$$S=2\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx\int_{-f(x)}^{f(x)}\frac{dy}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}}$$

وچون، انتگرال درونی، برابر π است، به دستوری می‌رسیم که ازقبل برای ما معلوم بود [۳۴۴، (۲۲)]:

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

همان طورکه احتمالا خواننده هم توجه کرده باشد، در مسأله‌های از ۲) تا ۸)، حالت‌های خاصی از محاسبهٔ مساحت را آوردیم که در ۶۲۸ دربارهٔ آن‌ها صحبت کرده بودیم.

۹) مسأله ۲) را، با استفاده از نمایش پارامتری سطح کره، برحسب مختصات کروی

$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\quad y=R\sin\varphi\sin\theta,\quad z=R\cos\varphi$$

$$(0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

حل کنید.

حل. از روی ماتریس مشتق‌ها

$$\begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

به سادگی می‌توان ضریب‌های گوسی کره را پیدا کرد:

$$E=R^2,\quad F=0,\quad G=R^2\sin^2\varphi;\quad \sqrt{EG-F^2}=R^2\sin\varphi$$

یك چهارم سطح موردنظر را، واقع در «یك هشتم» اول، در نظر می‌گیریم. برای نقطه‌های منحنی «ویویانی»، یعنی منحنی فصل مشترك کره و استوانه (در محدودهٔ «یك‌هشتم» اول)، داریم: $\varphi+\theta=\frac{\pi}{2}$.

در واقع، با قرار دادن مقدارهای x و y برحسب φ و θ در معادلهٔ استوانهٔ $x^2+y^2=Rx$، به دست می‌آید: $\sin\varphi=\cos\theta$؛ و چون در مورد نقطه‌های مورد بررسی داریم $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ و $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$، بنابراین، باید داشته باشیم: $\varphi+\theta=\frac{\pi}{2}$.

با توجه به حدود تغییر پارامترهای φ و θ، از روی دستور (*۳) به دست می‌آید:

$$S=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}\sin\varphi\,d\varphi=4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

می‌بینیم، به‌همان نتیجه‌ای که منتظر بودیم رسیدیم، بدون این‌که دراین‌جا، با بریدگی‌های تابع زیر انتگرال سروکار پیداکنیم.

۱۰) سطح موسوم به سطح مارپیچی کلی [۲۲۹، ۵)] را در نظر می‌گیریم که با منحنی

$$x=\varphi(u),\quad z=\psi(u),\quad [\varphi(u)\geqslant 0]$$

(واقع در صفحهٔ xz)، با حرکت مارپیچی آن دور محور z، و درطول محور z، پیموده می‌شود. معادلهٔ این‌سطح (اگر زاویهٔ دوران را v بنامیم)، چنین است:

$$x=\varphi(u)\cos v,\quad y=\varphi(u)\sin v,\quad z=\psi(u)+cv$$

از روی ماتریس مشتق‌ها

$$\begin{pmatrix}\varphi'(u)\cos v & \varphi'(u)\sin v & \psi'(u)\\ -\varphi(u)\sin v & \varphi(u)\cos v & c\end{pmatrix}$$

ضریب‌های گوسی سطح را تشکیل می‌دهیم:

$$E=[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2,\quad F=c,\quad G=[\varphi(u)]^2+c^2$$

به‌این ترتیب، عبارت

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{\{[\varphi(u)]^2+c^2\}\{[\varphi'(u)]^2+\psi'(u)]^2\}-c^2[\psi'(u)]^2}$$

تنها به u بستگی پیدا می‌کند که، به‌طور کلی، محاسبه را ساده‌تر می‌کند.

۱۱) ازاین نتیجه‌ها، برای محاسبهٔ این مساحت‌ها استفاده کنید:

a) بخشی‌از سطح مارپیچی عادی

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=cv$$

که به‌وسیلهٔ استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$ وصفحه‌های $z=0$ و $z=2\pi c$ $(0\leqslant v\leqslant 2\pi)$ جدا شده است؛

b) بخشی از سطح مارپیچی

$$x=\operatorname{tg}u\cos v,\quad y=\operatorname{tg}u\sin v,\quad z=\frac{\sin u}{2\cos^2 u}+\ln\sqrt{\frac{1+\sin u}{\cos u}}+v$$

که متناظر با تغییر پارامترها در مستطیل زیر باشد:

$$0\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{4},\quad 0\leqslant v\leqslant 2\pi$$

حل. a) دراین‌جا داریم:

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{u^2+c^2}$$

به‌نحوی که

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^a\sqrt{u^2+c^2}\,du\,dv=2\pi\left[\frac{a}{2}\sqrt{a^2+c^2}+\frac{c^2}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c}\right]$$

b) پاسخ: $S=\frac{8}{3}\pi$.

۱۲) اگر در مسأله مربوط به‌حرکت مارپیچی منحنی، فرض‌کنیم $c=0$، به نحوی که حرکت انتقالی وجود نداشته باشد، آن‌وقت، یك سطح دوار به‌دست می‌آید:

$$x=\varphi(u)\cos v,\quad y=\varphi(u)\sin v,\quad z=\psi(u)$$

$$(\alpha\leqslant u\leqslant\beta,\quad 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$$

در این صورت به دست می‌آید:

$$\sqrt{EG-F^2}=\varphi(u)\sqrt{[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2}$$

ومساحت این سطح، بادستور زیر بیان می‌شود:

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(u)\sqrt{[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2}\,du$$

این دستور، نتیجهٔ مسألهٔ ۸) را تعمیم‌می‌دهد، ولی‌نیازی به‌استفاده از انتگرال‌های ناویژه ندارد [با ۳۴۴، (۲۱) مقایسه‌کنید].

۱۳) دستوری راکه در ۳۴۶، [(۲۵)]، برای‌مساحت بخشی ازسطح استوانه‌ای، ازدستورکلی (*۳) به‌دست آوردیم، مورد تحقیق قراردهید.

۱۴) گاهی بهتراست معادلهٔ سطح را به مختصات قطبی یا کروی r، θ، φ ببریم، وقتی معادله سطح، در دستگاه مختصات مستقیم‌الخط معمولی داده شده است:

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi$$

$$(r\geqslant 0,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

درضمن فرض می‌شودکه شعاع حامل قطبیr، به‌صورت تابعی از زاویه‌های φ و θ باشد:

$$r=r(\varphi,\theta)$$

(معادلهٔ قطبی سطح). مطلوب است مساحت سطح خمیده برای این حالت.

حل. می‌توان ازعبارت کلی (*۳) استفاده‌کرد، تنها به شرطی‌که φ و θ را به‌عنوان پارامتر انتخاب‌کنیم: رابطه‌های بالا هم، نمایش پارامتری سطح را می‌دهند، به شرطی‌که به‌جای r، مقدارآن را برحسب φ و θ (از مختصات قطبی سطح) بگذاریم.

از روی ماتریس مشتق‌ها

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\cos\theta & \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\sin\theta & \frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi \\ \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)\sin\varphi & \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)\sin\varphi & \frac{\partial r}{\partial \theta}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

به‌سادگی به دست می‌آید:

$$E=\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2+r^2,\quad F=\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial r}{\partial \theta},\quad G=\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2+r^2\sin^2\varphi,$$

$$EG-F^2=\left[\left(r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right)\sin^2\varphi+\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right]r^2$$

بنابراین، سرانجام خواهیم داشت:

$$S=\iint_{(\Delta)}\sqrt{\left(r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right)\sin^2\varphi+\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2}\cdot r\,d\varphi\,d\theta \qquad (۹)$$

که درآن، (Δ) عبارت است ازحوزهٔ تغییر آوندهای φ و θ.

عنصر مساحت در مختصات‌کروی چنین است:

$$dS=\sqrt{\left(r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right)\sin^2\varphi+\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2}\cdot r\,d\varphi\,d\theta$$

۱۵) مطلوب است محاسبهٔ مساحت سطح

$$(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2xy$$

حل. در این‌جا، مناسب است که از دستور (۹) استفـاده‌کنیم. معادلهٔ قطبی سطح چنین‌است:

$$r+a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta}$$

دراین‌صورت

$$\sqrt{\left(r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right)\sin^2\varphi+\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2}=\frac{a\sin\varphi}{\sqrt{\sin 2\theta}}$$

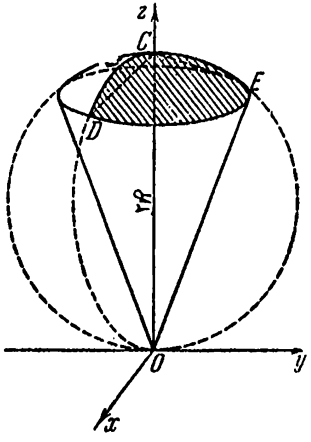
وبنابر دستور (۹) به دست می‌آید:

$$S=۴a^۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} sin^۲\varphi d\varphi d\theta=\frac{۱}{۲}\pi^۲a^۲$$

۱۶) این‌سطح کروی را در نظر می‌گیریم:

$$x^۲+y^۲+z^۲=۲Rz$$

که شعاع آن برابر R و، درضمن، در مبداء مختصات برصفحهٔ xy مماس است. می‌خواهیم مساحت بخشی از آن را پیداکنیم که در داخل مخروط $z^۲=Ax^۲+By^۲$، با رأس درمبداء مختصات، قرار دارد(شکل ۹۳).



شکل ۹۳

حل. با آغاز از معادلهٔ قطبی کره، $r=۲R\cos\varphi$، دراین‌جا هم، ازدستور (۹) استفاده می‌کنیم. داریم:

$$S=\int_{(\Delta)}\int ۴R^۲\sin\varphi\cos\varphi d\varphi d\theta$$

که درآن، حوزهٔ انتگرال‌گیری (Δ)، نسبت به φ و θ، محدود به منحنی زیراست:

$$(A\cos^۲\theta+B\sin^۲\theta)\sin^۲\varphi=\cos^۲\varphi$$

اگرکار را به تعیین مساحت آن بخش سطح منجرکنیم که در «یك‌هشتم» اول قرار دارد، آن وقت، به‌ازای هرمقدار دلخواه θ درفاصلهٔ ۰ و $\frac{\pi}{۲}$، زاویهٔ φ از ۰ تا زاویهٔ $\varphi_۰=\varphi_۰(\theta)$ تغییر می‌کندکه به ازای آن

$$tg^۲\varphi_۰=\frac{۱}{A\cos^۲\theta+B\sin^۲\theta}$$

روشن است که $S=۱۶R^۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}d\theta\int_۰^{\varphi_۰}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$

ولی

$$\int_{0}^{\varphi_0} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\sin^2\varphi_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+A\cos^2\theta+B\sin^2\theta}$$

و سرانجام

$$S = 8R^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(A+1)\cos^2\theta+(B+1)\sin^2\theta} = \frac{4\pi R^2}{\sqrt{(A+1)(B+1)}}$$

جالب است که، این مساحت، برابراست با مساحت بیضی با نیم‌قطرهای دوو تر DC و EC (شکل را ببینید).

۱۷) ثابت کنید، مساحت سطح

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = \alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2$$

برابراست با مساحت سطح بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$$

به شرطی که داشته باشیم: $a=\frac{\beta\gamma}{\alpha}$، $b=\frac{\gamma\alpha}{\beta}$، $c=\frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

اثبات. معادلهٔ سطح مفروض، در مختصات کروی چنین است:

$$r^2 = \alpha^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+\gamma^2\cos^2\varphi$$

و بنا بردستور (۹)، مساحت آن، چنین است:

$$S_1 = 8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\alpha^4\cos^2\theta+\beta^4\sin^2\theta)\sin^2\varphi+\gamma^4\cos^2\varphi}\ \sin\varphi d\varphi d\theta$$

ازطرف دیگر، اگر بانمایش پارامتری معمولی بیضوی آغاز کنیم:

$$x = a\sin\varphi\cos\theta,\quad y = b\sin\varphi\sin\theta,\quad z = c\cos\varphi$$

$$(0\leqslant\varphi\leqslant\pi;\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

دترمینان‌های ماتریس مشتق‌ها، برابر می‌شوند با

$$A = cb\sin^2\varphi\cos\theta,\quad B = ac\sin^2\varphi\sin\theta,\quad C = ab\sin\varphi\cos\varphi$$

و بنابر دستور (۳)، مساحت سطح بیضوی، چنین است:

$$S=8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(c^2b^2\cos^2\theta+c^2a^2\sin^2\theta)\sin^2\varphi+a^2b^2\cos^2\varphi}\sin\varphi d\varphi d\theta$$

می‌بینیم که درواقع هم، عبارت‌های S_1 و S متحدند، به شرطی که فرض کنیم:

$$cb=\alpha^2,\quad ca=\beta^2,\quad ab=\gamma^2$$

و یا

$$a=\frac{\beta\gamma}{\alpha},\quad b=\frac{\gamma\alpha}{\beta},\quad c=\frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

۱۸) مطلوب است، مساحت سطح بیضوی سه محوری

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\quad (a>b>c>0)$$

حل. معادلهٔ صریح سطح را، برای «یك هشتم» اول می‌نویسیم:

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

داریم:

$$p=-c\cdot\frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},\quad q=-c\cdot\frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

به نحوی که

$$1+p^2+q^2=\frac{1-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}-\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

برای سادگی کار فرض می‌کنیم:

$$1-\frac{c^2}{a^2}=\alpha^2,\quad 1-\frac{c^2}{b^2}=\beta^2$$

دراین‌صورت، بنابر دستور (۵)، سطح مفروض با این انتگرال بیان می‌شود:

$$S=8\iint\limits_{\substack{x,\,y\geqslant 0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}}\sqrt{\frac{1-\alpha^2\frac{x^2}{a^2}-\beta^2\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy$$

که با فرض $\xi=\frac{x}{a}$ و $\eta=\frac{y}{b}$، به‌این صورت در می‌آید:

$$S=8ab\iint\limits_{\substack{\xi,\,\eta\geqslant 0\\ \xi^2+\eta^2\leqslant 1}}\sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}\,d\xi\,d\eta$$

اگر بخواهیم، در این‌جا، از دستور تبدیل انتگرال دوگانه، متعلق به کاتالان [۵۹۷، ۱۵) و ۶۱۷، ۱۶) را ببینید)، استفاده کنیم، متوجه می‌شویم که منحنی

$$\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}=u=\text{const.}\quad(u\geqslant 1)$$

چیزی جز بیضی زیر نیست:

$$\frac{\xi^2}{\frac{u^2-1}{u^2-\alpha^2}}+\frac{\eta^2}{\frac{u^2-1}{u^2-\beta^2}}=1$$

به‌طوری‌که یك چهارم مساحت آن چنین است:

$$\iint\limits_{\substack{\xi,\,\eta\geqslant 0\\ \sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}\leqslant u}}d\xi\,d\eta=\frac{\pi}{4}-\frac{u^2-1}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}$$

آن وقت، بنابر دستور کاتالان

$$S=2\pi ab\int_1^\infty u\,d\frac{u^2-1}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}$$

اکنون، به تبدیل این انتگرال بیضوی می‌پردازیم.

قبل از همه، آن را جزء به جزء انتگرال گیری می کنیم*:

$$\int_1^{\infty} u\,d\frac{u^2-1}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}} =$$

$$=\left\{\frac{u(u^2-1)}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}-\int\frac{(u^2-1)du}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}\right\}\Bigg|_1^{+\infty}$$

سپس، این تبدیل را انجام می‌دهیم:

$$u=\frac{\alpha}{\sin\varphi},\quad du=-\frac{\alpha\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi$$

با تغییر φ از $\mu=\arcsin\alpha$ تا ۰ . دراین صورت، ازیك طرف

$$\frac{u(u^2-1)}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}=\frac{\alpha^2-\sin^2\varphi}{\alpha\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

با فرض $k=\frac{\beta}{\alpha}$ $(k<1)$. ازطرف دیگر

$$-\frac{(u^2-1)du}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}=\left(\frac{\alpha^2}{\sin^2\varphi}-1\right)\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}-\frac{1-\beta^2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}\right)d\varphi=$$

$$=\left(\alpha\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}-\frac{1-\beta^2}{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}}\right)d\varphi$$

به نحوی که انتگرال زیرعلامت تبدیل دوگانه، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\alpha\int\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}d\varphi-\frac{1-\beta^2}{\alpha}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

با انتگرال گیری جزء به جزء درجملهٔ اول، این عبارت، به ترتیب، به این صورت

---

*) توجه می کنیم که، در این‌جا، نه تبدیل دوگانهٔ ازجملهٔ برون انتگرالی و نه انتگرال معین از ۱ تا ∞ به‌طور جداگانه، معنا ندارند. بـه ازای $n=\infty$، با ابهامی از نوع $\infty-\infty$ رو به‌رو می‌شویم.

تبدیل می‌کنیم:

$$-\alpha cotg\varphi\cdot\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}-k^2\alpha\int\frac{cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}}d\varphi-$$

$$-\frac{1-\beta^2}{\alpha}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}}=-\alpha cotg\varphi\cdot\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}-$$

$$-\frac{1}{\alpha}\int\frac{1-k^2\alpha^2sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}}d\varphi=-\alpha cotg\varphi\cdot\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}-$$

$$-\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}}-\alpha\int\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}d\varphi$$

بعد، دوجملهٔ بیرون انتگرال را، یکی می‌کنیم:

$$\frac{\alpha^2-sin^2\varphi}{\alpha sin\varphi cos\varphi\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}}-\alpha cotg\varphi\cdot\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}=$$

$$=\frac{(\alpha^2+\beta^2cos^2\varphi-1)sin\varphi}{\alpha cos\varphi\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}}$$

تبدیل دوگانه نسبت به φ، از $\mu=\arcsin\alpha$ تا ۰، این عبارت را به نتیجهٔ $\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}$ می‌رساند. با در نظر گرفتن تبدیل دوگانه برای انتگرال‌ها هم، سرانجام این دستور به دست می‌آید:

$$S=2\pi ab\left\{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}+\frac{1-\alpha^2}{\alpha}F(\mu,k)+\alpha E(\mu,k)\right\}=$$

$$=2\pi c^2+\frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left\{c^2F(\mu,k)+(a^2-c^2)E(\mu,k)\right\}$$

که برای نخستین بار به‌وسیلهٔ لژاندر داده شد. در این جا:

$$\mu=\arcsin\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},\quad k=\frac{a}{b}\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}$$

۱۹) گوس، مفهوم انحنای کامل در یك نقطهٔ مفروض سطح را، شبیه مفهوم انحنا در

---

*) به‌این ترتیب، بالاخره توانستیم ابهامی را که به‌ازای $n=0$ وجود داشت، ازبین ببریم.

منحنی‌های مسطح[۲۵۰] داده است.

یك سطح و نقطه‌ای از آن را در نظر می‌گیریم. بخش دلخواه (S) از سطح را که شامل این نقطه باشد، انتخاب می‌کنیم وهمهٔ قائم‌های درنقطه‌های مختلف (S) را مورد توجه قرار می‌دهیم. کرهٔ به شعاع واحد و به مرکز مبداء را رسم می‌کنیم و نیم خطهایی را ازمبداء موازی با قائم‌های فوق درنظر می‌گیریم.این نیم‌خطها، روی سطح کره، بخشی مثل $(\sum)$ را جدا می‌کنند. مساحت $\sum$ این بخش، بازاویهٔ مجسمی که با همهٔ این نیم خطها پر شده است، اندازه‌گیری می‌شود؛ شبیه زاویهٔ ωکه، دربارهٔ آن، در تعریف ۲۵۰ صحبت شده است. حد نسبت $\frac{\sum}{S}$وقتی S به سمت نقطهٔ مفروضی متراکم شود، انحنای کلی سطح در این نقطه نامیده می‌شود. این،انحنا را محاسبه می‌کنیم. فرض می‌کنیم، معادلهٔ سطح، چنین باشد:

$$z=f(x,y)$$

در ضمن تابع f دارای مشتق‌های پیوستهٔ مرتبهٔ اول و مرتبهٔ دوم است:

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\quad q=\frac{\partial f}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

علاوه براین، دترمینان

$$\frac{D(p,q)}{D(x,y)}=rt-s^2 \qquad (10)$$

در نقطهٔ مورد بررسی و در نزدیکی‌های آن، مخالف صفر باشد.

بنابر دستور (5b) داریم:

$$S=\iint_{(D)}\frac{dxdy}{|\cos\nu|},\quad \sum=\iint_{(D')}\frac{dx'dy'}{|\cos\nu|}$$

که در آن‌ها، (D) تصویر (S) و (D') تصویر $(\sum)$ روی صفحهٔ xy وزاویهٔ ν، برای نقطه‌های متناظر (x,y,z) و (x',y',z') هر دو سطح، یکی است.

انتگرال دوم را به متغیرهای x وy تبدیل می‌کنیم؛ چون روشن است که

$$x'=\cos\lambda=-\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad y'=\cos\mu=-\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\left(z' = cosv = \frac{۱}{\sqrt{۱+p^۲+q^۲}}\right)$$

بنابراین

$$\frac{D(x', y')}{D(p, q)} = \frac{۱}{(۱+p^۲+q^۲)^۲}$$

اکنون، اگر (۱۰) را به حساب آوریم، سرانجام به دست می‌آید:

$$\frac{D(x', y')}{D(x, y)} = \frac{rt-s^۲}{(۱+p^۲+q^۲)^۲}$$

در این صورت، با توجه به دستور مربوط به تغییر متغیرها، داریم:

$$\sum = \iint_{(D)} \frac{|rt-s^۲|}{(۱+p^۲+q^۲)^۲} \frac{dxdy}{|cosv|}$$

اگر از S و $\sum$، در حوزهٔ (D)، مشتق‌گیری کنیم [۵۹۳]، به سادگی به‌دست می‌آید:

$$\lim_{(s)\to M} \frac{\sum}{S} = \frac{|rt-s^۲|}{(۱+p^۲+q^۲)^۲}$$

و این، همان عبارت مربوط به‌انحنای کلی است.

۲۰) اگر برای حالت صریح سطح مفروض، از تعریف دیگری برای مساحت سطح خمیده استفاده کنیم، می‌توان دستور (5b) را خیلی راحت به دست آورد.

سطح (S) را به‌اجزای (S_i) $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ تقسیم می‌کنیم؛ متناظر با آن، تصویر (D)، هم بر صفحهٔ xy، به اجزای (D_i) تقسیم می‌شود. در نقطه‌ای مثل (M_i) از قطعه سطح (S_i)، صفحهٔ مماس بر سطح را رسم و (S_i) را، موازی با محور z، بر آن تصویر می‌کنیم. مساحت سطح شکلی را که به این ترتیب بـه دست می‌آید، T_i می‌نامیم. روشن است که

$$D_i = T_i \cdot |cosv_i|$$

که در آن، v_i عبارت است از زاویهٔ بین قائم بر سطح در نقطهٔ M_i با محور z. اگر حد مجموع همین شکل‌های مسطح را برابر با مساحت S از سطح بگیریم، بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$S=\lim\sum T_i=\lim\sum\frac{D_i}{|\cos\nu_i|}=\int\int_{(D)}\frac{dxdy}{|\cos\nu|}$$

یادآوری می‌کنیم که، تعریف اخیر مساحت سطح خمیده، با آن‌که توانست ما را به نتیجهٔ نهائی برساند، یك نارسائی جدی دارد: از نظر صوری، به انتخاب کنج مختصاتی وابسته است (تصویر موازی محورz)، و تنها بـرای نوع خاصی از سطح‌ها قابل استفاده است.

۲۱) فرض کنید از بیان پارامتری

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)\quad((\Delta)\text{ از }(u,v))$$

سطح هموار(S)، به‌کمك دستور*

$$u=U(u^*,v^*),\quad v=V(u^*,v^*)\quad((\Delta^*)\text{ از }(u^*,v^*))$$

به نمایش دیگری از سطح عبور کنیم:

$$x=x^*(u^*,v^*),\quad y=y^*(u^*,v^*),\quad z=z^*(u^*,v^*)$$

به نحوی که در آن هم، ویژگی وجود نداشته باشد. در ایـن صورت می‌توان، به طور مستقیم، ثابت کرد که دستور(۳) برای مساحت (S) سطح، به‌دستوری شبیه آن تبدیل می‌شود:

$$S=\int\int_{(\Delta^*)}\sqrt{A^{*2}+B^{*2}+C^{*2}}\,du^*dv^*$$

(همهٔ کمیت‌های مربوط به‌نمایش جدید را، با علامت ستاره نشان داده‌ایم).

در واقع، با فرض

$$I=\frac{D(u,v)}{D(u^*,v^*)}$$

با توجه به خاصیت معلوم دترمینان تابعی، داریم:

$$A^*=AI,\quad B^*=BI,\quad C^*=CI$$

از همین جا روشن می‌شود که I و(Δ^*) مخالف صفرند، زیرا درغیر این‌صورت، سطح در نمایش‌تازهٔ خود، خاص می‌شود. اکنون، باتوجه به‌دستور تغییرمتغیرها، بلافاصله به دست می‌آید:

---

*) تابع‌های U و V،همراه با مشتق‌های جزئی آن‌ها، پیوسته به حساب می‌آیند.

$$\iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv = \iint_{(\Delta^*)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot|I|du^*dv^* =$$

$$= \iint_{(\Delta^*)} \sqrt{A^{*2}+B^{*2}+C^{*2}}du^*dv^*$$

§۳. انتگرال‌های روی سطح نوع اول

۶۳۰. تعریف انتگرال روی سطح نوع اول. انتگرال روی سطح نوع اول، تعمیمی طبیعی از انتگرال دوگانه است. همان‌طور که انتگرال روی منحنی نوع اول، تعمیمی از انتگرال معین ساده بود.

این تعمیم، به این ترتیب به وجود می‌آید. فرض کنید در نقطه‌های سطح دو رویهٔ هموار (یا قطعه سطح هموار) (S)، که به قطعه دورهٔ هموار محدود شده است، تابع $f(M)=f(x,y,z)$ تعریف شده باشد. سطح (S) را به‌کمک شبکه‌ای از قطعه منحنی‌های هموار دلخواه، به بخش‌های (S_1)، (S_2)، ...، (S_n) تقسیم می‌کنیم. نقطهٔ دلخواه $M_i(x_i, y_i, z_i)$ را در هر بخش (S) $(i=1, 2, \dots, n)$ انتخاب و مقدار تابع

$$f(M_i)=f(x_i, y_i, z_i)$$

را در این نقطه، محاسبه می‌کنیم و با ضرب آن در مساحت S_i از بخش نظیر سطح، مجموع همهٔ این حاصل ضرب‌ها را تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)S_i=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)S_i$$

و آن را، به مناسبت شباهتی که با بسیاری از مجموع‌های قبلی دارد، مجموع انتگرالی می‌نامیم.

حد متناهی این مجموع انتگرالی را، وقتی قطر همهٔ بخش‌های (S_i) به سمت صفر میل کند، انتگرال روی سطح نوع اول* از تابع $f(M)=f(x, y, z)$ بر سطح (S) گویند و با نماد زیر نشان می‌دهند:

---

*) به خاطر تمایز با انتگرال نوع دوم [۶۳۴].

$$I=\iint\limits_{(S)} f(M)dS=\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dS \qquad (۱)$$

که در آن، dS، یادآور مساحت جزئی S_i است.

۶۳۱. تبدیل به انتگرال دوگانهٔ عادی. به حالتی می‌پردازیم که با سطح هموار باز و سادهٔ (S)، بدون نقطه‌های تکراری، سروکار داشته باشیم.

اگر تابع دلخواه $f(x, y, z)$ در نقطه‌های سطح (S) معین و درضمن، مقدار تابع محدود باشد:

$$|f(x, y, z)|\leqslant L \qquad (۲)$$

آن وقت، برابری

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS=$$

$$=\iint\limits_{(\Delta)} f(x(u,v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv \qquad (۳)$$

با شرط وجود یکی از این انتگرال‌ها (که منجر به‌وجود دیگری هم خواهد شد)، برقرار است.

به این ترتیب، برای تبدیل انتگرال روی سطح نوع اول، به انتگرال دوگانه معمولی، باید مختصات x، y و z را با مقدارهای آن‌ها بر حسب پارامترها و مساحت جزئی dS را با مقدارآن در مختصات منحنی‌الخط، عوض کرد.

این حکم را ثابت می‌کنیم.

همان طور که قبلا هم دیده‌ایم، تقسیم سطح (S) به کمك قطعه منحنی‌های هموار، متناظراست با تقسیم مشابه حوزهٔ (Δ) و برعکس. به همین‌ترتیب، وقتی قطرهای بخش‌های (S) به‌سمت صفر میل کنند، قطرهای بخش‌های (Δ) هم به سمت صفرمیل می‌کنند و برعکس.

سطح (S) به بخش‌های (S_1)، (S_2)، ...، (S_n) و، متناظر با آن، حوزهٔ (Δ) به بخش‌های (Δ_1)، (Δ_2)، ...، (Δ_n) تقسیم، و نقطهٔ (x_i, y_i, z_i) را بر هر بخش (S_i) و، متناظر آن، نقطهٔ (u_i, v_i) را بر هر بخش (Δ_i) انتخاب می‌کنیم، به نحوی که

$$x_i=x(u_i, v_i)\quad y_i=y(u_i, v_i),\quad z_i=z(u_i, v_i) \qquad (۴)$$

اکنون، مجموع انتگرالی را، برای انتگرال (۱) تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)S_i$$

بنا بر دستور کلی (*۳) [۶۲۶] داریم:

$$S_i=\iint_{(\Delta_i)} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

که با استفاده از قضیهٔ میانگین، به دست می‌آید:

$$S_i=\left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=\bar{u}_i\\ v=\bar{v}_i}} \times \Delta_i$$

که در آن، $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$، نقطه‌ای از حوزهٔ (Δ_i) است.

با توجه به‌این‌بیان برای S_i و با به‌یادآوردن (۴)، می‌توان مجموع σ را این‌طور نوشت:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f\Big(x(u_i, v_i),\ y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)\Big)\left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=\bar{u}_i\\ v=\bar{v}_i}} \times \Delta_i$$

واین، مجموع انتگرالی را برای انتگرال‌دوم (۳) به‌یاد می‌آورد:

$$\sigma^*=\sum_{i=1}^{n} f\Big(x(u_i, v_i),\ y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)\Big)\left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=u_i\\ v=v_i}} \times \Delta_i$$

تفاوت بین مجموع‌های σ و σ^* دراین است‌که در σ^*، هم تابع مرکب $f(\dots)$ و هم ریشهٔ $\sqrt{\dots}$، برای یك نقطهٔ دلخواه (u_i, v_i) محاسبه می‌شوند، در حالی که در σ، تابع $f(\dots)$ در نقطهٔ (u_i, v_i) در نظر گرفته می‌شود و عبارت $\sqrt{\dots}$ در نقطهٔ (u_i, v_i) (که نقطه‌ای دلخواه‌نیست و به قضیهٔ میانگین مربوط می‌شود).

تفاضل دو مجموع را پیدا می‌کنیم:

$$\sigma-\sigma^*=\sum_i f(\dots)\left\{\left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=\bar{u}_i\\ v=\bar{v}_i}} - \left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=u_i\\ v=v_i}}\right\}\Delta_i$$

$\varepsilon>0$ را عددی به دلخواه کوچك می‌گیریم. با توجه به پیوستگی (یکنواخت) تابع

$\sqrt{EG-F^2}$، وقتی قطرهای حوزهٔ (Δ_i) به قدر کافی کوچك باشند، داریم:

$$\left|[\sqrt{EG-F^2}]_{\substack{u=\bar{u}_i\\ v=\bar{v}_i}} - [\sqrt{EF-G^2}]_{\substack{u=u_i\\ v=v_i}}\right| < \varepsilon$$

و با توجه به (۲)، به‌سادگی به‌این ارزیابی می‌رسیم:

$$|\sigma-\sigma^*| < \varepsilon L\Delta$$

به نحوی که $\text{حد}\,(\sigma-\sigma^*)=0$

از این جا روشن می‌شود که، وجود حد برای یکی از مجموع‌ها؛ به معنای وجود حدی برابر آن، برای مجموع دیگر است. و به‌این ترتیب، حکم ما ثابت می‌شود.

به خصوص، انتگرال دوگانهٔ سمت راست در (۳)، به ایـن معناست که انتگرال روی سطح سمت چپ، با فرض پیوستگی تابع $f(x, y, z)$ در طول سطح (S)، وجود دارد.

اگر سطح (S)، با معادلهٔ صریح داده شده باشد:

$$z=z(x, y)$$

آن وقت، دستور (۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)dS = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1+p^2-q^2}\,dxdy \qquad (۵)$$

که در آن، (D) عبارت است از تصویر (S) بر صفحهٔ xy.

چون $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{1}{|\cos\nu|}$ (که ν، طبق معمول، زاویهٔ بین قائم بر سطح و محور z است)، بنابراین دستور (۵) را می‌توان این‌طور هم نوشت:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)dS = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y))\frac{dxdy}{|\cos\nu|} \qquad (۵^*)$$

تا این‌جا، سطح (S) را، که انتگرال درروی آن درنظر گرفته می‌شود، سطحی‌هموار و باز فرض کردیم. به سادگی می‌توان این‌نتیجه‌ها را دربارهٔ سطح‌های قطعه به‌قطعه هموار، چه‌باز وچه بسته، تعمیم داد.

۶۳۲. کاربردهای مکانیکی انتگرال‌های سطحی نوع اول. ۱°. به کمك این انتگرال‌ها می‌توان جرم، گشت‌آور، مختصات گرانیگاه (مرکز ثقل) وغیر آن را، درسطح‌های مادی،

وقتی که در طول آن‌ها، مقدار جرم در هر نقطهٔ سطح با چگالی معینی توزیع شده‌است، به دست آورد.

از آن‌جا که، در این‌جا، مطلب تازه‌ای، نسبت به آن چه در مورد توزیع مسطح جرم گفته‌ایم، وجود ندارد، تنها در تمرین‌ها، به‌این موضوع خواهیم پرداخت.

۲°. ربایش (جاذبهٔ) قشرساده. انتگرال‌های روی سطح نوع اول، به‌طور طبیعی، در مطالعهٔ ربایش جرمی که روی سطح توزیع شده است، به‌کار می‌روند.

فرض کنیم، در هر نقطهٔ $M(x, y, z)$ از سطح (S)، جرم $\rho(M)=\rho(x, y, z)$ به‌طور پیوسته، منتشر شده باشد*. همچنین فرض می‌کنیم، نقطهٔ $A(\xi, \eta, \zeta)$ باجرم واحد، در بیرون سطح واقع باشد. می‌خواهیم نیروی $\overrightarrow{F}$ را، که با آن نقطهٔ A به وسیلهٔ سطح (S) جذب می‌شود، هم ازنظر مقدار وهم از نظرجهت پیداکنیم، به شرطی که مبنای کار خودرا برقانون جاذبهٔ نیوتونی (قانون جاذبهٔ عمومی) قرار داده باشیم.

اگر نقطهٔ A، تنها به‌وسیلهٔ یك نقطهٔ مادی $M(x, y, z)$ با جرم m متمرکز در آن جذب می‌شد، مقدار نیروی جاذبه، برابر بود با**

$$F=\frac{m}{r^2}$$

که در آن، r عبارت است ازفاصلهٔ AM، یعنی

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} \qquad (۶)$$

چون جهت این نیرو، از A بـه سمت M است، بنابراین کسینوس‌های هادی آن چنین‌اند:

$$\frac{x-\xi}{r}, \frac{y-\eta}{r}, \frac{z-\zeta}{r}$$

درنتیجه، تصویرجاذبهٔ $\overrightarrow{F}$ برمحورهای مختصات، این‌طور بیان می‌شوند:

$$F_x=m\frac{x-\xi}{r^3}, \quad F_y=\frac{x-\eta}{r^3}, \quad F_z=m\frac{x-\zeta}{r^3} \qquad (۷)$$

---

*) دراین حالت، قشر را ساده گویند (در مقابل قشردوگانه که مورد بررسی‌ما نیست).

**) برای سادگی‌کار وهمان طورکه معمول است، «ثابت جاذبه» یعنی‌ضریب تناسب در دستور نیوتون را (که به‌انتخاب واحد مربوط است)، واحدگرفته‌ایم.

در حالتی‌که با دستگاهی از نقطه‌های مادی سروکار داشته باشیم، به جای این عبارت‌ها، مجموع عبارت‌های مشابه می‌آید؛ و بالاخره، وقتی با توزیع پیوستهٔ جرم برسطح سروکار داشته باشیم، مجموع‌ها، به انتگرال‌ها تبدیل می‌شوند.

با توضیح عادی، می‌توان عنصر dS سطح باجرم ρdS را در نظر گرفت، مثل این که این‌جرم، دریك نقطهٔ $M(x, y, z)$ متمرکز شده باشد. جاذبهٔ مؤثر آن برنقطهٔ A، این تصویرها را برمحورها خواهد داشت [با (۷) مقایسه‌کنید].

$$dF_x=\rho\frac{y-\xi}{r^3}dS,\quad dF_y=\rho\frac{x-\eta}{r^3}dS,\quad dF_z=\rho\frac{x-\zeta}{r^3}dS$$

که درآن، r همان فاصلهٔ AM است‌که با (۶) بیان شده است. اکنون تنها این‌می‌ماندکه این‌عبارت‌ها را «جمع» کنیم تا به‌دستور زیر برای تصویرهای نیروی $\vec{F}$ جاذبهٔ قشرساده برمحورها برسیم:

$$F_x=\iint_{(S)}\rho\frac{x-\xi}{r^3}dS,\quad F_y=\iint_{(S)}\rho\frac{x-\eta}{r^3}dS,\quad F_z=\iint_{(S)}\rho\frac{x-\zeta}{r^3}dS \qquad (۸)$$

وبه‌این ترتیب، نیروی $\vec{F}$، هم ازنظر مقدار وهم از نظر جهت، معین می‌شود.

درحالتی‌که، نقطهٔ A، برسطح (S) واقع‌باشد، بازهم تصویرهای جاذبه برمحورها، باهمان انتگرال‌های (۸) بیان می‌شوند، ولی این‌بار با انتگرال‌های ناویژه سروکارداریم، زیرا در نزدیکی نقطهٔ A، تابع‌های زیر انتگرال، محدودیت خود را ازدست می‌دهند.

۳°. پتانسیل قشر ساده. همان‌طور که دیدیم، درحالتی‌که یك نقطهٔ جذب کنندهٔ $M(x, y, z)$ وجود داشته باشد، تصویرهای نیروی جاذبه بر محورها، با رابطه‌های (۷) بیان می‌شوند. به روشنی دیده می‌شودکه این تصویرها، عبارتند از مشتق‌های نسبی نسبت به ξ، η و ζ ازتابع

$$W(\xi, \eta, \zeta)=\frac{m}{r}$$

که پتانسیل نیوتونی برنقطهٔ A ازمیدان نقطهٔ M نامیده می‌شود [با **۵۶۶**، ۱)مقایسه‌کنید].

درحالتی‌که میدان، به دستگاهی از نقطه‌های مادی مربوط باشد، پتانسیل بامجموع کسرهایی ازاین‌نوع بیان می‌شود و، درضمن، مشتق‌های پتانسیل نسبت به ξ، η و ζ، مثل قبل، تصویرهای نیروی جاذبه بر محورها را می‌دهند.

ازاین‌جا، به‌طور طبیعی، به‌عبارتی می‌رسیم‌که پتانسیل قشر سادهٔ واقع برسطح (S)

باچگالی ρ را، برنقطهٔ A بیان می‌کند:

$$W(\xi, \eta, \zeta)=\iint_{(S)}\rho\frac{dS}{r} \qquad (۹)$$

تنها این پرسش پیش می‌آید که: آیا برای این پتانسیل، ویژگی اساسی

$$\frac{\partial W}{\partial \xi}=F_x,\ \frac{\partial W}{\partial \eta}=F_y,\ \frac{\partial W}{\partial \zeta}=F_z \qquad (۱۰)$$

حفظ می‌شود؟ (F_x، F_y، F_z عبارتند از تصویرهای نیروی $\overrightarrow{F}$ جاذبهٔ قشر ساده برمحورها وبا رابطه‌های (۸) معین می‌شوند.)

اگرنقطهٔ A روی سطح نباشد، به‌نحوی‌که پیوستگی درجایی به‌هم نخورد، آن‌وقت به‌سادگی ثابت می‌شودکه با مشتق‌گیری نسبت به ξ، η و ζ در انتگرال(۹)، می‌توان از قاعدهٔ لایب‌نیتس استفاده کرد (دراین مورد، تنها باید بحث قبلی را تکرارکرد). ازهمین راه می‌توان برای بررسی‌حالت توزیع جرم، رابطه‌های (۱۰) را مورد تحقیق قرار داد.

۶۳۳. مثال‌ها. ۱) این انتگرال‌های سطحی را محاسبه‌کنید:

$$\text{a)}\ I_1=\iint_{(S)}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,dS$$

$$\text{b)}\ I_2=\iint_{(S)}\frac{dS}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$

گسترده برسطح (S) از بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{c^2}{z^2}=1 \quad (a>b>c>0)$$

حل. a) اگر ازاین نمایش بیضوی استفاده‌کنیم

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,\quad y=b\sin\varphi\sin\theta,\quad z=c\cos\varphi$$
$$(0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

آن وقت [۶۲۹، ۱۷)]، عنصر سطح به این‌صورت در می‌آید:

$$dS=abc\sqrt{\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}}\sin\varphi d\varphi d\theta$$

ازطرف دیگر، برای تابع زیرانتگرال داریم:

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=\sqrt{\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}}$$

با توجه به تقارن، محاسبه منجر به «یک‌هشتم» اول می‌شود، به نحوی که

$$I_1=8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)\sin\varphi d\varphi d\theta=$$

$$=\frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

b) به‌همین ترتیب

$$I_2=8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi d\varphi d\theta}{(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

برای محاسبهٔ انتگرال درونی‌نسبت به φ، فرض می‌کنیم $\cos\varphi=z$:

$$\int_0^1\frac{dz}{[(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)-(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-c^2)z^2]^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\times$$

$$\times\frac{z}{\sqrt{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)-(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-c^2)z^2}}\Bigg|_{z=0}^{z=1}=$$

$$=\frac{1}{c}\ \frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$$

وسرانجام

$$I_2=8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}=4\pi$$

۲) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$L=\iint_{(S)}(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)dS$$

که در آن، (S) عبارت است از بخش بالایی مخروط $z^2=k^2(x^2+y^2)$، که به وسیلهٔ مخروط $x^2+y^2-2ax=0$ بریده شده است.

حل. با نوشتن معادلهٔ سطح به‌صورت $z=k\sqrt{x^2+y^2}$، داریم: $dS=\sqrt{1+k^2}dxdy$ واز روی دستور (۵)

$$L=\sqrt{1+k^2}\iint_{(D)}[k^2(x^2+y^2)^2+x^2y^2]dxdy$$

که در آن (D) عبارت است از سطح دایره‌ای محدود به محیط $x^2+y^2-2ax=0$، واقع برصفحهٔ xy.

باعبور به‌مختصات قطبی به‌دست می‌آید:

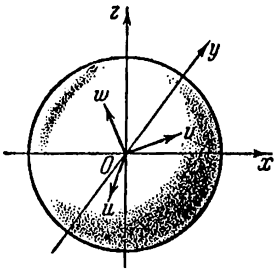
$$L=\frac{1}{24}(80k^2+7)\pi a^4\sqrt{1+k^2}$$

۳) این دستور را (که به پواسون منسوب است) پیدا کنید:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(m\sin\varphi\cos\theta+n\sin\varphi\sin\theta+p\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi d\theta=$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2})du$$

که در آن، $m^2+n^2+p^2>0$ و $f(t)$، تابعی است پیوسته برای $|t|\leqslant\sqrt{m^2+n^2+p^2}$.



شکل ۹۴

حل. انتگرال سمت چپ را P می‌نامیم؛ آن را به‌سادگی می‌توان به‌صورت انتگرال روی‌سطح نشان داد:

$$P=\iint_{(S)}f(mx+ny+pz)dS$$

که برسطح کرهٔ (S) به‌شعاع واحد و به مرکز مبداء، گسترده است.

باعبور به دستگاه جدید مختصات uvw، صفحه vw راصفحهٔ $mx+ny+pz=0$ و محور u را عمود برآن می‌گیریم (شکل ۹۴)؛ دراین‌صورت

$$u=\frac{mx+ny+pz}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

در مختصات uvw، همان انتگرال، این‌طور نوشته می‌شود:

$$P=\iint_{(S)} f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2})\,dS$$

اگر نمایش پارامتری کرهٔ S را درنظر بگیریم:

$$u=u,\quad v=\sqrt{1-u^2}\cos\omega,\quad w=\sqrt{1-u^2}\sin\omega$$
$$(-1\leqslant u\leqslant 1,\quad 0\leqslant\omega\leqslant 2\pi)$$

آن وقت $dS=du\,d\omega$ وسرانجام

$$P=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2})\,du\,d\omega=\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2})\,du$$

بافرض $u=\cos\lambda\,(0\leqslant\lambda\leqslant\pi)$، اغلب دستور پواسون را به‌این‌صورت می‌نویسند:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(m\sin\varphi\cos\theta+n\sin\varphi\sin\theta+p\cos\varphi)\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi} f(\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cos\lambda)\sin\lambda\,d\lambda$$

۴) فرض کنیم روی سطح (S)، جرم‌باچگالی $\rho=\rho(x, y, z)$ توزیع شده باشد. مطلوب است عبارت‌های به‌صورت انتگرال روی سطح گسترده بر S در مورد: a) مقدار کلی‌جرم m؛ b) گشت‌آورهای استاتیك و گشت‌آورهای ماند (ممان‌اینرسی) M_{yz}، M_{zx}، M_{xy}، I_{zy}، I_{zx}، I_{xy} نسبت به صفحه‌های مختصات؛ c) مختصات ξ، η، ζ مرکز ثقل (گرانیگاه) جرم.

۵) مطلوب است جرم سطح کره، به شرطی که چگالی سطح آن درهرنقطه برابر باشد با: a) فاصلهٔ این‌نقطه تا قطرقائم؛ b) مجذوراین فاصله.

حل. a) با انتخاب مرکز کره به‌عنوان مبداء مختصات و محور z برقائم، بافرض

$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\quad y=R\sin\varphi\sin\theta,\quad z=R\cos\varphi$$

به مختصات کروی φ و θ می‌رویم (R، شعاع کره است). در این صورت

$$dS=R^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta,\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}=R\sin\varphi$$

به نحوی که

$$m=\iint_{(S)}\rho\,dS=R^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\,d\theta=\pi^2R^3$$

b) پاسخ: $m=\frac{8}{3}\pi R^4$.

۶) باهمان شرط‌های a) و b) دربارهٔ توزیع جرم، مطلوب است جـای مرکز ثقل نیم‌کرهٔ بالایی.

حل. a) اگر محورها را، مثل مسألهٔ قبل انتخاب کنیم، با توجه به تقارن، روشن می‌شود که $\xi=\eta=0$.

گشت‌آور استاتیك را محاسبه می‌کنیم:

$$M_{xy}=\iint_{(S)}z\rho\,dS=R^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta=\frac{2}{3}\pi R^4$$

می‌دانیم [مسألهٔ ۵) را ببینید] مقدار کل جرم: $m=\frac{1}{2}\pi^2R^3$، یعنی

$$\zeta=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{4}{3\pi}R$$

b) پاسخ: با همان وضع محورهای مختصات: $\xi=\eta=0$ و $\zeta=\frac{3}{8}R$.

۷) مطلوب است: a) موضع مرکز ثقل سطح مخروطی همگن ($\rho=\text{const.}$)

$$z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2\leqslant R^2)$$

b) گشت‌آور ماند آن نسبت به صفحه‌های مختصات.

حل. a) روشن است که $\xi=\eta=0$. داریم:

$$dS=\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}}dxdy=\frac{l}{R}dxdy \quad (l=\sqrt{h^2+R^2})$$

در نتیجه

$$M_{xy}=\frac{hl}{R^2}\rho\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\frac{2\pi hl}{R^2}\rho\int_0^R r^2dr=\frac{2}{3}\pi hlR\rho$$

چون $m=\pi lR\rho$، پس $\zeta=\frac{2}{3}h$.

b) داریم:

$$I_{xy}=\iint\limits_{(S)}\rho z^2dS=\frac{2\pi h^2l}{R^3}\rho\int_0^R r^3dr=\frac{\pi h^2lR}{2}\rho$$

و به همین ترتیب:

$$I_{yz}=I_{zx}=\frac{\pi lR^3}{4}$$

۸) استوانهٔ دایره‌ای قائم به‌شعاع R وارتفاع h داده شده است. اگر سطح جانبی آن همگن باشد ($\rho=1$)، مطلوب است: a) جاذبه‌ای که از مرکز قاعده برروی سطح اثر می‌کند؛ b) پتانسیل این‌سطح برمرکز قاعده.

حل. a) اگر مرکز قاعده را برای مبداء مختصات و محور استوانه را برای محور z درنظر بگیریم، روشن است که: $F_x=F_y=0$. با نمایش استوانه به‌طور پارامتری

$$x=R\cos\theta,\quad y=R\sin\theta,\quad z=z$$

داریم: $dS=Rdzd\theta$، به نحوی که

$$F_z=\int_0^{2\pi}\int_0^h\frac{zRdzd\theta}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=2\pi R\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

b) داریم:

$$W=\int_0^{2\pi}\int_0^h\frac{Rdzd\theta}{\sqrt{R^2+z^2}}=2\pi R\cdot\ln\frac{h+\sqrt{R^2+h^2}}{R}$$

۹) برای سطح مخروطی مسألهٔ ۷) پیدا کنید: a) پتانسیل این سطح را بر مرکز قاعدهٔ مخروط؛ b) برراس آن؛ c) جاذبه‌ای که به وسیلهٔ مرکز قاعده اعمال می‌شود؛ d)

جاذبه‌ای که به وسیلهٔ رأس مخروط اعمال می‌شود.

حل a.) بافرض $l=\sqrt{R^2+h^2}$ داریم:

$$W=\frac{l}{R}\rho\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}=2\pi l\rho\int_0^R\frac{rdr}{\sqrt{l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2}}=$$

$$=\frac{2\pi}{l}\rho\int_0^R\frac{l^2R-Rh^2}{\sqrt{l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2}}dr+\frac{2\pi Rh^2}{l}\rho\int_0^R\frac{dr}{\sqrt{l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2}}=$$

$$=\frac{2\pi\rho}{l}\sqrt{l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2}\Big|_{q=0}^{r=R}+$$

$$+\frac{2\pi Rh^2\rho}{l^2}\ln\left[l^2r-Rh^2+\sqrt{l^2(l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2}\right]\Big|_{r=0}^{r=R}=$$

$$=\frac{2\pi R\rho}{l}(R-h)+\frac{2\pi Rh^2\rho}{l^2}\ln\frac{R}{h}\cdot\frac{l+R}{l-h}$$

b) $$W=\frac{l\rho}{R}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=2\pi R\rho$$

c) باتوجه به تقارن $F_x=F_y=0$. سپس

$$F_z=\frac{l\rho}{R}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{z-h}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{\frac{3}{2}}}dxdy=$$

$$=2\pi hRl\rho\int_0^R\frac{(r-R)rdr}{[l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

که به مجموع سه انتگرال تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{l^2}\int_0^R\frac{dr}{(l^2r^2-2Rh^2r+R^2h^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{R(h^2-R^2)}{l^4}\int_0^R\frac{l^2r-Rh^2}{(l^2r^2-2Rh^2r+R^2h^2)^{\frac{3}{2}}}dr-$$

$$-\frac{2R^2h^2}{l^4}\int_0^R\frac{dr}{(l^2r^2-2Rh^2r+R^2h^2)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{۱}{l^۳}\ln\frac{R}{h}\,\frac{l+R}{l-h}+\frac{h^۲-R^۲}{Rhl^۴}(R-h)-\frac{۲}{l^۴}(R+h)$$

با جمع‌آوری همهٔ نتیجه‌ها، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$F_z=\frac{۲\pi hR\rho}{l^۲}\ln\frac{R}{h}\,\frac{l+R}{l-h}-\frac{۲\pi\rho(R+h)}{l}$$

d) این‌بار، انتگرال ناویژه، متباعد می‌شود:

$$F_z=\frac{Rh}{l^۲}\iint\limits_{x^۲+y^۲\leqslant R^۲}\frac{dxdy}{x^۲+y^۲}=+\infty$$

۱۰) اگرچگالی جرم توزیع شده برسطح مخروط، برابر فاصلهٔ این نقطه تا رأس باشد، پیدا کنید: a) پتانسیل سطح برراس؛ b) جاذبه‌ای که رأس از جانب سطح تحمل می‌کند.

پاسخ: a) $W=\pi Rl=S$؛ b) $F_x=F_y=۰$، $F_z=\frac{۲\pi Rh}{l}$.

۱۱) مطلوب است نیروی جاذبهٔ نقطه‌های قشرکروی همگن ($\rho=\text{const.}$).

حل. مرکز کره را برمبداء مختصات و نقطهٔ A (به جرم واحد) را برمحور مثبت z به فاصلهٔ a از مرکز می‌گیریم. تصویرهای F_x و F_y نیروی جاذبه بر محورهای x و y، به روشنی، برابر صفرند. سپس داریم:

$$F_z=\iint\limits_{(S)}\rho\frac{z-a}{r^۳}dS$$

(r، فاصلهٔ بین نقطهٔ A ونقطهٔ نامشخص M ازکره است). اگر به مختصات کروی برویم:

$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\quad y=R\sin\varphi\sin\theta,\quad z=R\cos\varphi$$

آن وقت:

$$dS=R^۲\sin\varphi d\varphi d\theta,\quad r=\sqrt{R^۲+a^۲-۲Ra\cos\varphi}$$

و

$$F_z=۲\pi R^۲\rho\int_۰^{\pi}\frac{(R\cos\varphi-a)\sin\varphi d\varphi}{(R^۲+a^۲-۲Ra\cos\varphi)^{\frac{۳}{۲}}}\qquad(۱۱)$$

با جای‌گزینی $R^2+a^2-2Ra\cos\varphi=t^2$، این عبارت را تبدیل می‌کنیم:

$$F_z=\frac{\pi R}{a^2}\rho\int_{|R-a|}^{R+a}\left(\frac{R^2-a^2}{t^2}-1\right)dt=$$

$$=-\frac{\pi R^2}{a^2}\rho\left(2R-\frac{R^2-a^2}{|R-a|}-|R-a|\right)$$

حالا دو حالت را در نظر می‌گیریم:

(۱) $a<R$؛ در این حالت $|R-a|=R-a$ و مقدار داخل پرانتز برابر صفر می‌شود و در نتیجه

$$F_z=0$$

به این ترتیب، وقتی نقطه در درون قشر کروی همگن باشد، از جانب این قشر، هیچ‌گونه جاذبه‌ای را تحمل نمی‌کند.

(۲) $a>R$؛ در این حالت $|R-a|=-(R-a)$، به‌نحوی که

$$F_z=-\frac{4\pi R^2\rho}{a^2}$$

بنابراین نقطه‌ای که در بیرون قشر کروی همگن واقع باشد، از جانب این قشر جاذبه‌ای را تحمل می‌کند و مثل این است که تمامی جرم $m=4\pi R^2\rho=S\rho$ قشر، در مرکز آن متمرکز شده باشد.

به‌حالت $a=R$ می‌پردازیم. در این حالت، نقطهٔ A بر سطح کره قرار دارد و انتگرال (۱۱) ناویژه می‌شود و بعد از عمل‌های ساده‌ای به‌این صورت در می‌آید:

$$F_z=-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\rho\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}}=-2\pi\rho$$

بنابراین، اگر a از R کوچکتر باشد و به‌آن نزدیک شود، یا از R بزرگتر باشد و به آن نزدیک‌شود، برای F_z به‌ترتیب، مقدارهای حدی ۰ و $-4\pi\rho$ به‌دست می‌آید. بنابراین، جاذبه، به‌ازای عبور نقطه از سطح کره، پیوستگی خود را از دست می‌دهد. در ضمن، مقدار جاذبه برای نقطهٔ واقع برسطح کره، میانگین حسابی این مقدارهای حدی است.

۱۲) پتانسیل قشر کروی همگن را برنقطهٔ اختیاری دلخواه پیدا کنید.

حل. باتوجه به نام‌گذاری‌های قبل داریم:

$$W(a)=\iint_{(S)}\rho\frac{dS}{r}=2\pi R^2\rho\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\varphi}}=$$

$$=\frac{2\pi R}{a}\rho\int_{|R-a|}^{R+a}dt=\frac{2\pi R}{a}\rho(R+a-|R-a|)$$

درحالت $a<R$ به دست می‌آید.

$$W(a)=4\pi R\rho$$

یعنی، در درون قشرکروی همگن، پتانسیل آن ثابت است.

برعکس، درحالت $a>R$ داریم:

$$W(a)=\frac{4\pi R^2\rho}{a}$$

یعنی، پتانسیل حاصل از قشر کروی درفضای بیرونی، به شرطی‌که تمامی جرم را در مرکز متمرکز کنیم، تغییر نمی‌کند.

در حالت $a=R$، انتگرال ناویژه، مقدار پتانسیل‌را به‌این صورت می‌دهد:

$$W(R)=4\pi R\rho$$

و همان طورکه می‌بینیم، ضمن‌عبور نقطه ازسطح کروی، مقدار پتانسیل پیوستگی خود را حفظ می‌کند.

§۴. انتگرال‌های روی سطح نوع دوم

۶۳۴. تعریف انتگرال‌های سطحی نوع دوم. این‌نوع جدید انتگرال‌ها، از روی نمونهٔ انتگرال‌های منحنی‌الخط نوع دوم ساخته شده‌اند.

درآن‌جا، از منحنی جهت‌دار (توجیه شده) آغازکردیم و، باتقسیم‌آن به بخش‌ها، هربخش جهت‌دار را برمحور مختصاتی تصویرکردیم. تصویر هم جهت‌دار بود وما آن‌را، بسته به‌این‌که در جهت محور باشد یا برخلاف جهت‌آن، باعلامت مثبت یامنفی نشان‌دادیم.

اکنون، مثل‌همان‌جا، سطح دورویهٔ (S) را، هموار یا قطعه به قطعه هموار، در نظر می‌گیریم ویکی از دورویهٔ آن را تثبیت می‌کنیم. همان طورکه در **۶۲۰** دیدیم، این‌عمل به معنای انتخاب جهت معینی برسطح است (یعنی، سطح توجیه می‌شود).

برای مشخص‌بودن وضع، ابتدا فرض می‌کنیم، سطح با معادله‌ای صریح داده

شده باشد:

$$z = z(x, y)$$

درضمن، نقطهٔ (x, y)، درصفحهٔ xy در حوزهٔ (D)، که به دورهٔ قطعه به قطعه هموار محدوداست، تغییرمی‌کند. دراین‌صورت، بین دورویهٔ بالایی‌وپایینی سطح، یکی‌را انتخاب می‌کنیم. اگر ازبالا نگاه‌کنیم، درحالت اول، منحنی بستهٔ واقع برسطح، در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود ودرحالت‌دوم، درجهت حرکت عقربه‌های‌ساعت.

اگر سطح را به بخش‌هایی تقسیم‌کنیم و هربخش را،که جهت‌دار است، برصفحهٔ xy تصویرکنیم، می‌توان جهت حرکت روی دورهٔ شکل تصویررا ازروی جهت حرکت روی دورهٔ بخشی‌که تصویر شده است، پیداکرد: اگر رویهٔ بالایی سطح (S) را تثبیت کرده باشیم، این جهت با حرکت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت تطبیق می‌کند و، در نتیجه، مساحت تصویررا باعلامت مثبت مشخص خواهیم‌کرد؛ درحالت رویهٔ پایینی،جهت حرکت برعکس می‌شود و مساحت تصویر را با علامت منفی خواهیم آورد [با ۶۱۰ مقایسه شود].

اکنون فرض می‌کنیم، درنقطه‌های سطح‌مفروض (S)، تابع $f(M) = f(x, y, z)$ تعریف شده باشد. سطح را با شبکه‌ای از منحنی‌های قطعه به قطعه هموار، به بخش‌های

$$(S_1), (S_2), \ldots, (S_n)$$

تقسیم می‌کنیم. در هر بخش (S_i)، نقطهٔ $M_i(x_i, y_i, z_i)$ را انتخاب می‌کنیم. سپس، مقدار تابع $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ را محاسبه وآن را در مساحت D_i، تصویر بخش (S_i) برصفحهٔ xy، وبا توجه به علامت آن، ضرب می‌کنیم. بالاخره، مجموع زیررا (که یك مجموع انتگرالی است) تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) D_i \qquad (1)$$

حد متناهی این مجموع انتگرالی، وقتی‌که قطرهای همهٔ بخش‌های (S_i) به سمت صفر میل‌کنند، انتگرال روی سطح (نوع‌دوم) از

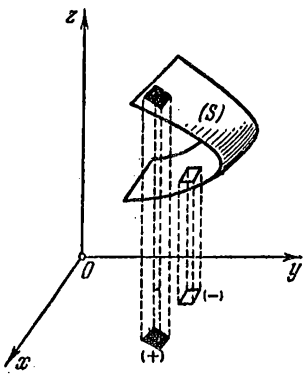
$$f(M)dxdy = f(x, y, z)dxdy$$

گسترده برروبهٔ انتخابی سطح (S) نامیده وبا نماد

$$I = \iint_{(S)} f(M)dxdy = \iint_{(S)} f(x, y, z)dxdy \qquad (2)$$

نشان داده می‌شود. (در این جا، $dxdy$، مساحت تصویر بخشی از سطح را برصفحهٔ xy به یاد می‌آورد.)

باوجود این، از این نماد نمی‌توان فهمید که کدام رویهٔ سطح موردنظر بوده است؛ این توجه را باید، هر بار و در هر مورد خاص، فراموش نکرد. از خود تعریف نتیجه می‌شود که، اگر رویهٔ سطح را تغییر دهیم و به جای آن، رویهٔ دیگر سطح را درنظر بگیریم، علامت انتگرال تغییر می‌کند.



شکل ۹۵

اگر سطح (S) دارای چنین شکل خاصی نباشد، تعریف انتگرال روی سطح تغییر نمی‌کند، تنها ممکن است مساحت D_i از تصویر، همه جا با یك علامت نباشد و، اگر بخشی در بالا و بخش دیگری در پایین باشد، علامت‌های مختلفی داشته باشند (شکل ۹۵).

درحالتی که، بخشی از سطح، بر سطح استوانه‌ای واقع باشد که مولد آن بامحور z موازی است، در تصویر، یك منحنی به‌دست می‌آید که مساحت آن را صفر به‌حساب می‌آوریم و، بنابراین، جایی برای گفت و گو دربارهٔ علامت آن باقی نمی‌ماند.

باوجود این، در این جا ممکن است با حالتی برخورد کنیم که قسمتی از بخش در بالا وقسمتی در پایین سطح باشد و یا وقتی که تصویر بخش برصفحهٔ xy، به‌صورت یك ارزشی متقابل نباشد. ولی از آن‌جا که، نقش این بخش‌های «نامنظم» درعمل ناچیز است، جمله‌های نظیر چنین بخش‌هایی را درمجموع انتگرالی وارد نمی‌کنیم. در زیر قانع خواهیم شد که، این توافق، هیچ لطمه‌ای به محاسبه و یا کاربرد انتگرال‌های روی سطح، نخواهد زد.

اگر به‌جای صفحهٔ xy، بخش سطح را برصفحهٔ yz یا صفحهٔ zx تصویر کنیم، به‌دو انتگرال دیگر روی سطح (نوع دوم) می‌رسیم:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dydz; \quad \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dzdx \qquad (2^*)$$

درعمل، اغلب به موردهایی برمی‌خوریم که با ترکیب همهٔ این گونه‌ها سروکار دارند:

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

که در آن، P و Q و R، تابع‌هایی از (x, y, z) هستند که در نقطه‌های سطح (S) تعریف

شده‌اند. یکبار دیگر تأکید می‌کنیم که: سطح (S) همیشه دو رویه به حساب می‌آید و انتگرال مربوط، دربارهٔ یکی‌از دورویهٔ آن در نظر گرفته می‌شود.

۶۳۵. حالت‌های خاص ساده. ۱°. دوباره به‌انتگرال (۲) و برای حالتی برمی‌گردیم که، سطح (S)، با معادله‌ای صریح داده شده باشد:

$$z=z(x,y) \quad ((D) \text{ از } (x,y))$$

درضمن، تابع z را، همراه با مشتق‌های نسبی آن $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$ و $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$، پیوسته می‌گیریم.

اگر انتگرال (۲) نسبت به‌رویهٔ بالایی‌سطح درنظر گرفته شود، درمجموع‌انتگرالی (۱)، همهٔ D_iها مثبت‌اند. اگر دراین مجموع، به‌جای z_i، مقدار آن $z(x_i,y_i)$ را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z(x_i,y_i))|D_i$$

که درآن، مجموع انتگرالی، برای انتگرال دوگانه عادی زیر شناخته می‌شود:

$$\iint_{(D)} f(x,y,z(x,y))dxdy$$

واگر به حد عبور کنیم، این برابری برقرار می‌شود:

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy=\iint_{(D)} f(x,y,z(x,y))dxdy \qquad (۳)$$

در ضمن، وجود هریك ازاین انتگرال‌ها، به‌معنای وجود دیگری است. به خصوص اگر تابع f پیوسته باشد، هردو انتگرال وجود دارند.

در حالتی که انتگرال، نسبت به رویهٔ پایینی سطح درنظرگرفته شود، آن وقت، خواهیم داشت:

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy=-\iint_{(D)} f(x,y,z(x,y))dxdy \qquad (۳^*)$$

یادداشت. می‌توان در همهٔ حالت‌ها، دستور (۳) را در نظرگرفت، به شرطی که انتگرال دوگانهٔ سمت راست را نسبت به حوزهٔ توجیه شدهٔ (D) به حساب آوریم [با ۶۱۰ را ببینید].

اکنون روشن می‌کنیم که، دراین حالت، می‌توان انتگرال روی سطح نوع دوم را، به انتگرال روی سطح نوع اول منجر کرد. دوباره، رابطهٔ (۱) را، با این فرض که رویهٔ بالایی سطح را تثبیت‌کرده باشیم، در نظر می‌گیریم، به‌نحوی که تمامی D_iها مثبت باشند. با توجه به دستور (۲) شمارهٔ **۶۲۵** داریم:

$$S_i=\iint\limits_{(D_i)}\frac{dxdy}{cos\nu}$$

که در آن، ν عبارت است از زاویهٔ حادهٔ بین‌قائم برسطح و محور z. با استفاده از قضیهٔ مربوط به میانگین‌ها، به‌دست می‌آید:

$$S_i=\frac{D_i}{cos\nu_i^*},\quad \text{یا}\quad D_i=S_i\cdot cos\nu_i^*$$

دراین‌جا ν_i^* به معنای زاویهٔ بین قائم برسطح در نقطه‌ای از بخش (S_i) با محور z است. با گذاشتن این‌مقدار D_i در σ، داریم:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,\ y_i,\ z_i)cos\nu_i^*S_i$$

طبیعی است که، این مجموع را، با مجموع زیر مقایسه کنیم:

$$\bar{\sigma}=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,\ y_i,\ z_i)cos\nu_iS_i$$

که در آن ν_i، متناظر است با نقطهٔ دلخواه انتخابی $(x_i,\ y_i,\ z_i)$؛ روشن است که مجموع اخیر، همان مجموع انتگرالی برای انتگرال روی سطح نوع اول است:

$$\iint\limits_{(S)}f(x,\ y,\ z)cos\nu dS$$

باتوجه به‌پیوستگی تابع

$$cos\nu=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

اگر سطح (S) را به بخش‌های به‌اندازهٔ کافی کوچک تقسیم کنیم، آن وقت، نوسان این کسینوس در محدودهٔ هر بخش جداگانه، از هرمقدار مفروض $\varepsilon>0$ کوچکتر خواهد بود.

اگر تابع f محدود باشد: $|f|\leqslant M$، تفاضل دومجموع σ و $\bar{\sigma}$ را ارزیابی می‌کنیم:

$$|\sigma-\bar{\sigma}|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(x_i,y_i,z_i)||\cos\nu_i^*-\cos\nu_i|S_i<MS\varepsilon$$

وبنابراین $(\sigma-\bar{\sigma})\to 0$. روشن است که، دو مجموع، به‌طور همزمان، دارای حد و، در ضمن، حدی برابر هستند. بنابراین، به‌این برابری می‌رسیم:

$$\iint_{(S)}f(x,y,z)dxdy=\iint_{(S)}f(x,y,z)\cos\nu dS \qquad (۴)$$

درضمن، وجود یکی از انتگرال‌ها، به معنای وجود دیگری است. دوباره می‌بینیم که، با فرض پیوسته بودن تابع f، هردو انتگرال وجود دارند.

اگر به جای رویهٔ بالایی سطح، رویهٔ پایینی آن را در نظر بگیریم، علامت سمت چپ برابری (۴) عوض می‌شود. وقتی‌که ν را زاویهٔ بین‌قائم با محور z بگیریم، دراین حالت جهتی به سمت پایین دارد و، بنابراین‌کسینوس وهمراه با آن انتگرال سمت‌راست هم تغییر علامت می‌دهد، به‌نحوی‌که برابری بدون تغییر باقی می‌ماند.

۲°. اگر (S) بخشی از سطح استوانه‌ای با مولدهای موازی محور z باشد، تصویر همهٔ بخش‌های‌آن برصفحهٔ xy دارای مساحت صفرمی‌شود، به نحوی‌که داریم:

$$\iint_{(S)}f(x,y,z)dxdy=0 \qquad (۵)$$

روشن است‌که، دراین حالت هم، دستور (۴) به قوت خود باقی است، زیرا $\cos\nu=0$ و سمت راست برابری هم برابرصفر می‌شود.

۶۳۶. حالت کلی. به حالت‌کلی سطح هموار باز ساده برمی‌گردیم. همان‌طورکه قبلا هم شرط‌کردیم، در مجموع انتگرالی

$$\sigma'=\sum{}'f(x_i,y_i,z_i)D_i$$

جمله‌های نظیر بخش‌های «نامنظم» وجود ندارندکه یا قسمتی ازآن‌ها در بالای سطح و قسمتی در پایین سطح واقع باشند. ویا با تصویر خود برصفحهٔ xy، در تناظر یك به یك نباشند. علامت «پریم» درجلو علامت جمع را، به معنای همین کیفیت می‌گیریم.

ν را، به طورکلی، زاویهٔ بین‌محور z وقائمی ازسطح می‌گیریم‌که جهت‌آن با توجه به رویه‌ای‌که از سطح انتخاب شده است، درنظرگرفته شود. دراین‌صورت، برابری زیر،

با تقریب علامت، همیشه درست است (معنای ν_i^* مثل قبل است):

$$D_i = S_i cos\nu_i^*$$

به‌این ترتیب

$$\sigma' = \sum' f(x_i, y_i, z_i) cos\nu_i^* S_i$$

این‌مجموع را بامجموع

$$\bar{\sigma}' = \sum' f(x_i, y_i, z_i) cos\nu_i S_i$$

مقایسه می‌کنیم (ν_i نظیر نقطهٔ انتخاب شده است). به سادگی قانع می‌شویم که

$$\lim(\sigma' - \bar{\sigma}') = 0 \qquad (۶)$$

اگر به مجموع $\bar{\sigma}'$، مجموع

$$\bar{\sigma}'' = \sum'' f(x_i, y_i, z_i) cos\nu_i S_i$$

که نظیر بخش‌های «نامنظم» حذف شده است، اضافه‌کنیم، آن وقت، مجموع انتگرالی کامل σ، برای انتگرال روی سطح نوع اول، به‌دست می‌آید:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) cos\nu dS$$

می‌توان ثابت‌کرد [**۶۳۷** را ببینید]، وقتی‌همهٔ قطرهای بخش‌های (S_i) به‌سمت‌صفر میل‌کنند، مجموع $\bar{\sigma}''$ هم به سمت صفر میل می‌کند:

$$\bar{\sigma}'' \to 0 \qquad (۷)$$

دراین صورت، در ارتباط با (۶)، دوباره به برابری (۴) می‌رسیم، بااین شرط که یکی از انتگرال‌های موجود درآن، وجود داشته باشد (که در این صورت، انتگرال دوم هم وجود خواهد داشت).

اگر از نمایش پارامتری سطح (S) آغازکنیم، می‌توان انتگرال سمت راست (۴) وهم، بنابرآن چه ثابت‌کردیم، انتگرال سمت چپ را به انتگرال دوگانهٔ عادی درحوزهٔ (Δ) مربوط به تغییر پارامترها، منجر کرد. چون

$$cos\nu = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, dudv$$

بنابراین داریم:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)dxdy = \pm \iint_{(S)} f(x(u, v), y(uv), z(uv))Cdudv \qquad (۸)$$

علامت دوگانهٔ سمت راست، متناظر با دورویهٔ سطح (S) است؛ مثلا، اگر جهت درصفحهٔ uv، متناظر با جهت در سطح (S) (که با انتخاب یك رویهٔ آن معین می‌شود) باشد، آن وقت باید علامت مثبت را درنظر گرفت [۶۲۱]. دراین‌جا هم، وجود یکی‌از انتگرال‌ها، به معنای وجود انتگرال دیگراست.

همین بررسی‌ها را درمورد انتگرال‌های روی سطح نوع دوم، در تصویر برصفحه‌های دیگر مختصات هم می‌توان انجام داد. بایکی‌کردن همهٔ این‌نتیجه‌ها، می‌توان‌نوشت:

$$\iint_{(S)} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \iint_{(S)} (P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)dS \qquad (۹)$$

واین دستورکلی، برای تبدیل انتگرال سطحی‌نوع دوم به انتگرال سطحی‌نوع اول‌است. دراین‌جا، P و Q و R، تابع‌های کران‌داری هستندکه در نقطه‌های سطح (S) معین‌اند، و $\cos\lambda$ و $\cos\mu$ و $\cos\nu$، کسینوس‌های هادی قائم می‌باشندکه، جهت‌آن، متناظر باانتخاب رویهٔ سطح، درنظر گرفته شده است.

درپایان، دستوری‌کلی، برای تبدیل انتگرال سطحی نوع دوم، به انتگرال دوگانهٔ عادی، می‌دهیم:

$$\iint_{(S)} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \pm \iint_{(\Delta)} (PA+QB+RC)dudv \qquad (۱۰)$$

فرض براین است‌که، در سمت راست، در تابع‌های P و Q و R، به‌جای x و y و z، مقدار آن‌ها برحسب u و v داده شده‌است. در مورد علامت دوگانهٔ «$\pm$»، می‌توان همان مطلب قبل‌را تکرارکرد.

همهٔ این نتیجه‌ها را، می‌توان درمورد حالت کلی‌تر سطح ــ بسته یا باز ــ که از تعدادی متناهی بخش‌های هموار باز ساده وچسبیده به‌هم تشکیل شده است، تعمیم داد.

۶۳۷. شرح اثبات. به‌اثبات رابطهٔ (۷) می‌پردازیم. ثابت می‌کنیم، برای‌هر $\varepsilon > 0$ دلخواه مفروض، می‌توان $\eta > 0$ را طوری پیداکردکه اگر تنها قطرهای همهٔ بخش‌ها کمتراز η باشند، درمورد بخش‌های «نامنظم»، برابری زیر برقرار است:

$$|\cos\nu| < \varepsilon \qquad (۱۱)$$

فرض می‌کنیم، چنین‌نباشد. دراین صورت، چنان $\varepsilon_0 > 0$ وچنان دنباله‌ای از بخش‌

های «نامنظم» (s_k) ــ که قطرهای آن‌ها تا صفر نزولی‌اند ــ پیدا می‌شود که در نقطه‌ای از هر (s_k) داشته باشیم:

$$|\cos\nu| \geqslant \varepsilon_0 \qquad (۱۲)$$

اگر بخش حوزهٔ (Δ)، نظیر (s_k) را، با (δ_k) نشان‌دهیم، روشن است که قطرهای بخش‌های (δ_k) هم به سمت صفر میل می‌کنند. با توجه بـه پیش‌قضیهٔ بولزانو ــ ویرشتراس [۱۷۲]، می‌توان ازدنبالهٔ $\{(\delta_k)\}$ چنان دنباله‌ای‌را جداکرد که، عضوهای آن، به‌یك نقطهٔ (u_0, v_0) ازحوزه‌های (Δ) نزدیك شوند. درضمن، بدون این‌که به‌کلی‌بودن‌کار لطمه‌ای وارد شود، می‌توان این خاصیت را به خود دنبالهٔ $\{(\delta_k)\}$ نسبت داد.

برای زاویهٔ $\nu = \nu_0$، نظیر مقدارهای $u = u_0$ و $v = v_0$ ازپارامترهای u و v، باید داشته باشیم:

$$\cos\nu_0 = 0 \qquad (۱۳)$$

درواقع، اگرچنین نباشد، باید برای مقدارهای پارامترها داشته باشیم:

$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

ولی دراین‌صورت، در همسایگی نقطهٔ (u_0, v_0) می‌شد u و v را بـه‌عنوان تابع‌هایی یك ازشی از xoy درنظرگرفت و با جای‌گزین‌کردن آن‌ها به‌وسیلهٔ عبارت‌های برحسب xoy درتابع $z = z(u, v)$، سطح را با معادله‌ای صریح بیان‌کرد*:

$$z = f(x, y)$$

علاوه برآن، دراین همسایگی، به شرطی که آن‌را به‌قدرکافی کوچك بگیریم، $\cos\nu$ علامت معینی‌را حفظ می‌کند. ازآن‌جا که (δ_k)، به‌ازای kهای به‌قدرکافی بزرگ، به‌ناچـار در این همسایگی قرار می‌گیرد، بنابراین، بخش‌های «نامنظم» (s_k) نمی‌توانند متناظر باآن‌ها باشند.

همین تناقض، حکم ما را دربارهٔ نابرابری (۱۱) ثابت می‌کند.

اکنون فرض می‌کنیم، قطرهای همهٔ بخش‌های سطح (S)، از η کوچکتر باشند. در این‌صورت، برای بخش‌های «نامنظم» (اگر وجود داشته باشند)، نابرابری (۱۱) برقرار

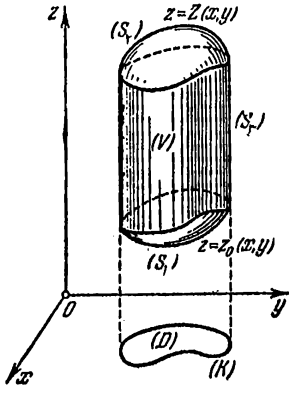
---

*) اگر نقطهٔ (x_0, y_0) متعلق به‌دورهٔ حوزهٔ (Δ) باشد، آن وقت، این‌حکم، دربارهٔ بخش‌مشترك همسایگی این‌نقطه با حوزهٔ (Δ) درست است. [۲۶۲، صفحهٔ ۷۵۶ را درجلد اول ببینید.]

است و مجموع σ'' نظیر آن‌ها، از لحاظ قدرمطلق، از $MS\varepsilon$ کمتر می‌شود (به شرطی که، مرز بالای f را M بنامیم). به‌این ترتیب، (۷) نتیجه می‌شود.

۶۳۸. بیان حجم جسم به کمك انتگرال روی سطح. همان‌طور که مساحت یك شکل مستوی را با انتگرال روی دورهٔ شکل بیان می‌کردیم [۵۵۱]، حجم جسم را هم می‌توان با انتگرال روی سطحی که این جسم را محصور می‌کند، به‌دست آورد. جسم (V) را که محدود شده است، به سطح‌های هموار

$$(S_1)\quad z=z_0(x,y)$$
$$(S_2)\quad z=Z(x,y) \qquad (z_0<Z)$$



شکل ۹۶

وسطح استوانه‌ای (S_3)، که مولدهایی موازی محور z دارد، در نظر می‌گیریم (شکل ۹۶). هادی این سطح، منحنی بستهٔ هموار (K) برصفحهٔ xy است، که حوزهٔ مسطح (D) را محدود کرده است. درحالت خاص، ممکن‌است دربارهٔ منحنی (K)، برابری $z_0(x,y)=Z(x,y)$ برقرار باشد که، دراین‌صورت، سطح (S_3) به منحنی تبدیل می‌شود.

روشن است که حجم V جسم، برابر تفاضل دوانتگرال است:

$$V=\iint\limits_{(D)}Z(x,y)\,dxdy-\iint\limits_{(D)}z_0(x,y)\,dxdy$$

باواردکردن انتگرال‌های روی سطح، این برابری را می‌توان این‌طور نوشت [(۳) و (۳*) را ببینید]:

$$V=\iint\limits_{(S_2)}z\,dxdy+\iint\limits_{(S_1)}z\,dxdy$$

درضمن، انتگرال‌ها را نسبت به رویهٔ بالایی سطح (S_2) ونسبت به‌رویهٔ پایینی سطح (S_1) درنظر گرفته‌ایم. به سمت راست، انتگرال

$$\iint\limits_{(S_3)}z\,dxdy$$

را اضافه می‌کنیم که نسبت به رویهٔ درونی سطح استوانه‌ای (S_3) درنظر گرفته شده‌است. بنابر (۵)، این انتگرال برابرصفر است و، بنابراین، با اضافه کردن آن، برابری به هم نمی‌خورد. به‌این ترتیب، سرانجام

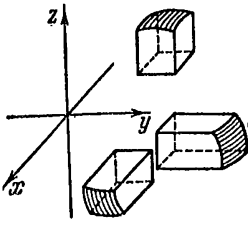
$$V=\iint_{(S)} z\,dx\,dy \qquad (۱۴)$$

که درآن، انتگرال، نسبت به رویهٔ درونی سطح $(S_3)+(S_2)+(S_1)=(S)$، که جسم را محدود می‌کند، درنظر گرفته شده است.

دستور (۱۴)، تنها برای لوله‌های استوانه‌ای‌که به‌صورت معینی‌جهت‌دار شده‌باشند، ثابت‌شد. ولی درواقع، این دستور، برای گروه وسیع‌تری ازجسم‌ها درست است: هرجا که بتوان جسم‌را به‌کمك سطح‌های استوانه‌ای با مولدهای موازی محور z، به‌بخش‌هایی تقسیم‌کرد، می‌توان از دستور (۱۴) استفاده‌کرد. درحقیقت، باانجام این تقسیم، می‌توان دستور (۱۴) را درمورد هربخش به‌کاربرد و، سپس، نتیجه‌ها را باهم جمع‌کرد. ازآن‌جا که انتگرال‌های نسبت به سطح استوانه‌ای‌کمکی، برابر صفرند، بنابراین بازهم به دستور (۱۴) می‌رسیم.

اکنون ثابت می‌کنیم‌که، این دستور، برای‌گروه بازهم وسیع‌تری ازجسم‌ها درست است، به خصوص وقتی‌که با جسم‌هایی سروکار داشته باشیم‌که به وسیلهٔ سطح‌های قطعه به قطعه هموار، محدود شده باشند.

(V) را چنین جسمی می‌گیریم. ابتدا، همه «یال‌های» سطح S آن را به‌کمك تعدادی متناهی مکعب مستطیل* جدا می‌کنیم، به‌نحوی‌که نه‌تنها حجم‌آن‌ها به دلخواه‌کوچك باشد، بلکه مساحت بخش‌هایی ازسطح (S)، که محدود به‌آن‌هاست، و همراه باآن، انتگرال $\iint z\,dx\,dy$ نسبت به این بخش‌ها هم، به دلخواه‌کوچك باشد.



شکل ۹۷

اکنون، نقطهٔ $M_0(u_0, v_0)$ از سطح را درنظر می‌گیریم، به‌نحوی‌که بر «یال» واقع نباشد. چون این نقطه، نقطه‌ای‌خاص نیست، بنابراین دست‌کم یکی از دترمینان‌های A و B و C مخالف صفراست. اگر $C\neq 0$، آن وقت، درهمسایگی‌نقطهٔ M_0 قطعهٔ متناظر سطح (S) با معادله‌ای صریح بیان می‌شود:

---

*) چه در این‌جا وچه بعد ازاین، وجه‌های مکعب مستطیل را، موازی با صفحه‌های مختصات می‌گیریم.

$$z=f(x,y)$$

درحالت $A\neq 0$ یا $B\neq 0$، به معادله‌های صریح دیگری می‌رسیم:

$$x=g(y,z),\quad \text{یا}\quad y=h(z,x)$$

به این ترتیب، نقطهٔ M_0 درچنان مکعب مستطیلی محصور است که ازجسم (V) «لوله‌ای منشوری» جداکرده است، به نحوی که این«لولهٔ منشوری» به‌پنج صفحه وقطعه‌ای ازیکی ازهمین نوع سطح‌ها محدود شده است (شکل۹۷).

اگر ازپیش قضیهٔ بورل (۱۷۵) دربارهٔ سطح (که به سادگی معلوم می‌شود، یك مجموعهٔ بسته است) استفاده‌کنیم، می‌توانیم از همهٔ این‌دستگاه نامتناهی مکعب مستطیل‌ها، تعداد محدودی از آن‌ها را جداکنیم. در نتیجه، خارج از برش‌های مکعب مستطیلی که به وسیلهٔ «یال‌ها» جدا شده‌اند، بخش باقی‌ماندهٔ (V_1) ازجسم (V) به تعداد محدودی «لوله‌های منشوری» و مکعب مستطیل‌های ساده تجزیه شده است. اگر بتوانیم درستی دستور (۱۴) را برای همهٔ این جسم‌های جزئی ثابت‌کنیم، آن وقت، با جمع‌کردن آن‌ها، به درستی‌دستور برای (V_1) و، سپس، باعبورحدی (درارتباط باانقباض همسایگی «یال‌ها»)، برای جسم اصلی (V) اطمینان پیدا می‌کنیم.

ولی برای لوله‌های نوع اول، یعنی برای مکعب‌مستطیل‌ها، دستور را دربالا ثابت کرده‌ایم. اکنون، به عنوان نمونه‌ای از «لوله‌های منشوری» نوع‌دوم ازجسم (V)، جسمی را درنظر می‌گیریم که به صفحه‌های $x=x_0$، $y=y_0$، $y=y_1$، $z=z_0$، $z=z_1$ وسطح (s)، یعنی $x=g(y,z)$، محدود شده باشد.

ازهمان روشی استفاده می‌کنیم که در **۵۵۱** برای تعمیم کاربرد دستور مساحت در شکل‌های مسطحه استفاده کرده‌ایم. دراین‌جا، به جای این‌که خط شکسته را در یك منحنی محاط‌کنیم، سطح چند وجهی (σ) را درسطح (s) محاط می‌کنیم. همان‌طورکه می‌دانیم [۶۲۷]، به‌کمك مثلث‌بندی مناسب مستطیل

$$(d)=[y_0,y_1;z_0,z_1]$$

(که تصویر جسم ما برصفحهٔ yz است)، می‌توان به وضعی رسیدکه امتداد قائم‌های بر وجه‌های سطح (σ)، به‌قدرکافی به امتداد قائم‌های برسطح، در نقطه‌های متناظر بخش‌های آن، نزدیك شود. اگر به‌جای سطح (s)، سطح چند وجهی (σ) را درنظر بگیریم، حق داریم برای جسم متغیر V، این دستور را بنویسیم:

$$\widetilde{V}=\iint_{(S)} z\,dx\,dy \qquad (۱۵)$$

که در آن، (S) عبارت است از تمامی سطحی که چندوجهی $(\widetilde{V})$ را محصور کرده است. درواقع، این چندوجهی به سادگی به چنان بخش‌هایی قابل تقسیم است که، برای آن‌ها، دستور ما ثابت شده باشد. اکنون، کافی است، در (۱۵) به سمت حد عبورکنیم (با هرچه کوچکترکردن یال‌های سطح چندوجهی وهرچه نزدیکترکردن امتداد قائم‌های بریال‌های آن، به امتداد قائم‌های برمنحنی مفروض سطح)، تا دستور (۱۴) به‌دست آید.

برای اثبات نزدیك شدن مقدارهای سمت راست دراین دستورها، تفاضل آن‌ها را، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\iint\limits_{(s)} z dx dy - \iint\limits_{(\sigma)} z dx dy + \alpha$$

که در آن، α عبارت است از انتگرال‌های نسبت به‌آن بخش‌های جانبی جسم‌های (V) و $(\widetilde{V})$ که، این سطح‌ها، در آن اختلاف دارند. روشن است‌که $\alpha \to 0$. تفاضل دو انتگرال را هم، باعبور به انتگرال‌های نوع اول، می‌توان ابتدا به این صورت نوشت:

$$\iint\limits_{(s)} z\cos\nu\, ds - \iint\limits_{(\sigma)} z\cos\tilde{\nu}\, d\sigma$$

وسپس، دوباره به انتگرال‌های نوع دوم برمی‌گردیم:

$$\iint\limits_{(s)} z\frac{\cos\nu}{\cos\lambda} dy dz - \iint\limits_{(\sigma)} z\frac{\cos\tilde{\nu}}{\cos\tilde{\lambda}} dy dz$$

دراین‌جا، $\cos\nu$، $\cos\lambda$، $\cos\tilde{\nu}$، $\cos\tilde{\lambda}$، کسینوس‌های هادی‌قائم‌های خارجی‌دوسطح می‌باشند. توجه‌کنیم‌که روی (s)

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+g'^2_y+g'^2_x}}$$

تابعی پیوسته است‌که برابر صفر نمی‌شود و، بنابراین، از طرف پایین، بایك عدد مثبت، کران‌دار است؛ وقتی‌که قائم‌های برسطح‌های (s) و (σ) به‌اندازهٔ کافی به‌هم نزدیك‌شوند، همین مطلب برای $\cos\tilde{\lambda}$، درمورد سطح چندوجهی (σ) هم درست است.

بالاخره، باوارد کردن معادلهٔ $x = \tilde{g}(y, z)$ ازسطح چند وجهی (σ)، می‌توان این عبارت را به‌صورت انتگرال دوگانهٔ عادی نسبت به مستطیل (d) نوشت:

$$\iint\left\{\left[z\frac{\cos\nu}{\cos\lambda}\right]_{x=g(y,z)}-\left[z\frac{\cos\tilde{\nu}}{\cos\tilde{\lambda}}\right]_{x=\tilde{g}(y,z)}\right\}dydz$$

با توجه به‌این‌که، نه‌تنها نقطه‌های متناظر سطح‌های (S) و (σ)، بلکه قائم‌های بر دو سطح دراین نقطه‌ها هم، به یکدیگر نزدیك می‌شوند، روشن می‌شود‌که، دراین روند حدی، مقدار این انتگرال به سمت صفر میل می‌کند و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

درکنار دستور (۱۴)، حجم جسم را، بااین دستورها هم می‌توان بیان‌کرد:

$$V=\iint_{(S)}xdydz,\quad \text{یا}\quad V=\iint_{(S)}ydzdx \qquad (۱۴^{*})$$

که با تبدیل سادهٔ نقش محورها، به دست می‌آیند. از مجموع این سه دستور، به دستور متقارن زیر می‌رسیم:

$$V=\frac{1}{3}\iint_{(S)}xdydz+ydzdx+zdxdy \qquad (۱۶)$$

در هر حالتی، انتگرال نسبت به رویهٔ بیرونی سطح (S)، که جسم را محصورکرده است، درنظر گرفته می‌شود.

اگر دوباره، کسینوس‌های هادی $\cos\lambda$، $\cos\mu$، $\cos\nu$ از قائم‌های بیرونی را وارد کنیم، می‌توان بیان اخیر را به‌صورت انتگرال سطحی نوع دوم نوشت:

$$V=\frac{1}{3}\iint_{(S)}(x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu)dS \qquad (۱۷)$$

۶۳۹. دستور ستوکس. (S) را سطحی دو رویه، هموار ساده و محدود به دورهٔ قطعه به قطعه هموار (L) فرض می‌کنیم. نقطه‌های سطح، به‌کمك رابطه‌های

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$$

با تناظری یك به یك، بانقطه‌های حوزهٔ مستوی (Δ)، با دورهٔ قطعه به‌قطعه هموار (Λ) بر صفحه uv، مربوطاند. بااین فرض‌ها، همواره داریم: $A^{2}+B^{2}+C^{2}>0$.

رویهٔ معینی از سطح و، متناظر با آن، جهتی‌را برروی آن [۶۲۰]، انتخاب می‌کنیم و، برای مشخص‌بودن وضع، فرض می‌کنیم، جهت مثبت حرکت روی دورهٔ (Λ) متناظر با جهت مثبت حرکت روی دورهٔ (L) باشد. دراین صورت، همان طورکه در ۶۲۱ ثابت کردیم، دستورهای

$$\cos\lambda=\frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\mu=\frac{B}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\nu=\frac{C}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (۱۸)$$

برای ما مشخص می‌کنند که کدام رویه از سطح (S) را انتخاب کرده‌ایم.

بعد از این ملاحظه‌ها، به دستوری می‌پردازیم که انتگرال روی سطح را با انتگرال‌های منحنی‌الخط مربوط می‌کند و تعمیمی از دستور گرین [۶۰۰] است، که با آن آشنا هستیم.

فرض کنید، درحوزه‌ای از فضا، که سطح (S) را در داخل خود دارد، این تابع داده شده باشد:

$$P=P(x, y, z)$$

که در این حوزه، همراه با مشتق‌های نسبی خود، تابعی است پیوسته. در این صورت داریم:

$$\int_{(L)}Pdx=\iint_{(S)}\frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy \qquad (۱۹)$$

درضمن، جهت حرکت روی دورهٔ (L) با رویه‌ای از سطح (S) که انتگرال سمت راست نسبت به‌آن در نظر گرفته شده است، مطابقت دارد.

قبل ازهمه، انتگرال منحنی‌الخط نسبت به منحنی (L) را به‌انتگرال نسبت به‌منحنی (Λ) تبدیل می‌کنیم:

$$\int_{(L)}Pdx=\int_{(\Lambda)}P.\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right) \qquad (۲۰)$$

اگر نمایش پارامتری منحنی (Λ) و، برحسب آن، منحنی (L) را وارد کنیم، این برابری به‌سهولت قابل تحقیق است. هردو انتگرال، منجر به‌یك انتگرال معمولی نسبت به‌پارامتر می‌شوند.

اکنون درمورد انتگرال سمت راست (۲۰)، دستور گرین را به‌کار می‌بریم:

$$\int_{(\Lambda)}P.\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)=\iint_{(\Delta)}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right\}dudv$$

ازآن‌جاکه عبارت زیر انتگرال اخیر، به‌صورت باز شدهٔ خود، چنین می‌شود:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}+P\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}-$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}-P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=$$

$$=\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)-\frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

بنابراین، به‌انتگرال دوگانهٔ زیر می‌رسیم:

$$\iint_{(\Delta)}\left\{\frac{\partial P}{\partial z}B-\frac{\partial P}{\partial y}C\right\}dudv$$

که با توجه به‌دستور (۱۰)، به سادگی، به انتگرال روی سطح تبدیل می‌شود:

$$\iint_{(S)}\frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

انتگرال‌اخیر، نسبت به‌رویه‌ای است که از سطح انتخاب‌کرده‌ایم، زیرا دستورهای (۱۸)، درست همین رویه را مشخص می‌کنند. و در همین‌جا، اثبات برابری (۱۹) تمام می‌شود.*

این دستوررا، برای سطح هموار ثابت‌کردیم؛ ولی می‌توان به‌سادگی آن را، برای سطح قطعهٔ هموار (که خودش را قطع نکرده باشد) تعمیم داد: کافی‌است آن‌را برای هر قطعهٔ جداگانه بنویسیم و، سپس آن‌ها را باهم جمع کنیم.

با تبدیل دوری حرف‌های x و y و z، دو برابری مشابه دیگرهم به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{aligned}\int_{(L)}Qdy&=\iint_{(S)}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\frac{\partial Q}{\partial z}dydz,\\ \int_{(L)}Rdz&=\iint_{(S)}\frac{\partial R}{\partial y}dydz-\frac{\partial R}{\partial x}dzdx\end{aligned}\right\}\qquad(19^*)$$

---

*) باید توجه‌کرد که، این نتیجه را، با استفاده ازوجود وپیوستگی مشتق‌های $\frac{\partial P}{\partial x}$ و $\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}$ و $\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}$ به دست‌آوردیم، که عملا، در نتیجهٔ نهـائی وارد نشده‌اند. در واقع، این دستور، بدون این فرض‌ها هم، درست است.

که در آن‌ها، Q و R، تابع‌های جدیدی از x و y و z، باهمان شرط‌های تابع P، هستند.

اگر برابری‌های (۱۹) و (۱۹*) را باهم جمع کنیم، به‌نتیجهٔ موردنظر، به‌کلی‌ترین صورت خود می‌رسیم:

$$\int_{(L)} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx \qquad (۲۱)$$

این برابری، دستور ستوکس (G. G. Stokes) نامیده‌می‌شود. یك‌بار دیگر تأکید می‌کنیم که،رویهٔ سطح وجهت حرکت‌دوره، متقابلا وباقانونی‌که درشماره ۶۲۰ آورده‌ایم، مشخص می‌شود.

اگر به عنوان قطعهٔ سطح (S)، حـوزهٔ مستوی (D) برصفحـهٔ xy را داشته باشیم $(z=0)$، آن وقت، دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_{(L)} Pdx+Qdy=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

که همان دستور گرین است؛ به‌این ترتیب، دستور گرین حالت خاصی از دستور ستوکس است*.

در پایان یادآوری می‌کنیم که، انتگرال روی سطح نوع دوم دردستور ستوکس را می‌توان به‌انتگرال روی سطح نوع‌اول تبدیل کرد. دراین‌صورت، دستور مذکور به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\int_{(L)} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{(S)}\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\lambda+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\mu+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\nu\right\}dS \qquad (۲۱^*)$$

در ضمن $\cos\lambda$، $\cos\mu$، $\cos\nu$، به معنای کسینوس‌های هادی قائم‌های متناظر با انتخاب رویه

---

*) برای این‌که بتوان دستور ستوکس را به راحتی به‌یـادآورد، اشاره می‌کنیم جملهٔ اول در انتگرال سمت راست، همان است‌که در دستور گرین وجود دارد؛ بقیهٔ جمله‌ها هم، از همین جمله، با تبدیل دوری حرف‌های x، y، z و P، Q، R به‌دست می‌آیند.

در سطح هستند.

۶۴۰. مثال‌ها. ۱) این انتگرال را محاسبه کنید:

$$I=\iint_{(S)}(x^2+y^2)dxdy$$

نسبت به‌رویهٔ پایینی دایرهٔ $x^2+y^2=R^2$.

راهنمائی. چون سطحی که نسبت به‌آن انتگرال گرفته می‌شود، همراه با تصویر خود (D)، برصفحهٔ xy قرار دارد، با درنظرگرفتن رویهٔ آن، داریم:

$$I=-\iint_{(D)}(x^2+y^2)dxdy$$

پاسخ: $I=-\frac{\pi}{2}R^4$.

۲) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$J=\iint_{(S)}x^2y^2zdxdy$$

نسبت به رویهٔ بالایی نیمهٔ پایینی کرهٔ $x^2+y^2+z^2=R^2$.

راهنمائی. تصویر نیم‌کره برصفحهٔ xy، عبارت ازسطح دایرهٔ (D) که معادلهٔ محیط آن $x^2+y^2=R^2$ است. معادلهٔ نیم‌کرهٔ پایینی $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ است. بنابراین

$$J=-\iint_{(D)}x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

پاسخ: $J=-\frac{2\pi}{105}R^7$.

۳) انتگرال $K=\iint_{(S)}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$ را نسبت به‌رویهٔ بیرونی کرهٔ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ محاسبه کنید.

حل. این انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$K_۳=\iint_{(S)} z^۲dxdy$$

چون معادلهٔ صریح کره، چنین است:

$$z-c=\pm\sqrt{R^۲-(x-a)^۲-(y-b)^۲}$$

(علامت مثبت، متناظر با نیم‌کرهٔ بالایی و علامت منفی، متناظر با نیم‌کرهٔ پایینی است)، بنابراین بهتر است، تابع $z^۲$ زیر انتگرال را، به‌این صورت نشان دهیم:

$$z^۲=(z-c)^۲+c^۲+۲c(z-c)$$

دو جملهٔ اول، اگر نسبت به رویهٔ بالائی نیم‌کرهٔ بالایی و رویهٔ پایینی نیم کرهٔ پایینی انتگرال گیری شوند، به نتیجه‌هایی با علامت‌های مختلف می‌رسند و، بنابراین، یکدیگررا حذف می‌کنند. جملهٔ آخرهم، که با عبور از نیم‌کرهٔ بالایی به نیم‌کرهٔ پایینی تغییرعلامت می‌دهد، ضمن انتگرال گیری نسبت به‌آن‌ها، به نتیجه‌های برابر می‌رسد، به‌نحوی که

$$K^۳=۴c\iint_{(x-a)^۲+(y-b)^۲\leqslant R^۲}\sqrt{R^۲-(x-a)^۲-(y-b)^۲}dxdy=\frac{۸}{۳}\pi cR^۳$$

دو انتگرال دیگر

$$K_۱=\iint_{(S)} x^۲dydz,\quad K_۲=\iint_{(S)} y^۲dzdx$$

هم، به‌همین ترتیب محاسبه می‌شوند.

پاسخ: $K=\frac{\pi}{۳}\pi R^۳(a+b+c)$.

۴) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال‌های

$$\text{a) } I_۱=\iint_{(S)} dxdy,\quad \text{b) } I_۲=\iint_{(S)} zdxdy,\quad \text{c) } I_۳=\iint_{(S)} z^۲dxdy$$

نسبت به رویهٔ بیرونی بیضوی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$.

پاسخ: a) $I_۱=۰$؛ b) $I_۲=\frac{۴}{۳}\pi abc$؛ c) $I_۳=۰$.

۵) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال‌های

$$\text{a) } L_1=\iint_{(S)} x^2\,dydz,\quad \text{b) } L_2=\iint_{(S)} yzdzdx$$

نسبت به‌رویهٔ بالایی نیمهٔ بالایی همان بیضوی.

حل. a) $x=\pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$؛ $L_1=4a^2\iint_{(D_1)}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}dydz$؛

که در آن، (D_1) عبارت است از «یک‌چهارم» اول بیضی $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. با عبور به مختصات قطبی تعمیم‌یافته، به سادگی به دست می‌آید:

$$L_1=\frac{2}{5}\pi a^2bc$$

با آغاز از نمایش پارامتری سطح مفروض‌هم، می‌توان به‌راحتی به‌همین نتیجه رسید:

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,\quad y=b\sin\varphi\sin\theta,\quad z=c\cos\varphi \qquad (۲۲)$$

$$(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2};\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

چون $A=bc\sin^2\varphi\cos\theta$، بنابراین طبق دستور (۱۰)

$$L_1=a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\frac{2}{5}\pi a^2bc$$

(رویهٔ بالایی سطح، متناظر باعلامت مثبت در دستور نامبرده است).

b) در این‌جا هم از نمایش پارامتری استفاده می‌کنیم و توجه می‌کنیم که $B=ac\sin^2\varphi\sin\theta$. بنابراین

$$L_2=abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta=\frac{\pi}{4}abc^2$$

۶) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$\iint_{(S)}\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}$$

نسبت به رویهٔ بیرونی همان بیضوی دو مسألهٔ قبل.

راهنمائی. انتگرال نامعین است، زیرا عبارت زیر انتگرال بی‌نهایت می‌شود (در برخوردهای بیضوی باصفحه‌های مختصات). به‌کمك نمایش پارامتری، خودرا به‌انتگرال دوگانهٔ متناظر آن می‌رسانیم.

پاسخ: $4\pi\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)$.

۷) اگر عبارت (۱۶)، برای حجم V جسم، به‌وسیلهٔ دستور (۱۰)، به انتگرال دوگانهٔ عادی تبدیل شود، داریم:

$$V=\pm\frac{1}{3}\iint_{(\Delta)}(Ax+By+Cz)dudv \qquad (23)$$

اگر مقدارهای A، B و C را، همچون دترمینان‌ها به‌حساب آوریم، این نتیجه به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$V=+\frac{1}{3}\iint_{(\Delta)}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}dudv$$

درضمن، وقتی A و B و C علامت کسینوس‌های هادی قائم بیرونی‌را داشته باشند، علامت مثبت، و درحالت عکس، علامت منفی‌را خواهیم داشت.

۸) با این دستور، حجم V بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

را باآغاز نمایش پارامتری (۲۲) محاسبه‌کنید ($0\leqslant\varphi\leqslant\pi$، $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$).

راهنمائی. دترمینان برابر است با $abc\sin\varphi$.

پاسخ: $V=\frac{4}{3}\pi abc$.

۹) اگر سطحی‌که جسم را محصورکرده است، با معادلهٔ قطبی داده شده باشد:

$$r=r(\varphi,\theta)$$

آن وقت، مثل ۶۲۹، ۱۴)، می‌توان به‌نمایش پارامتری سطح رفت. درضمن φ و θ، نقش

پارامترها را به عهده دارند. با آغاز ازاین نمایش، از دستور (۲۳)، عبارت زیبای زیر را برای حجم به دست آورید:

$$V=\frac{1}{3}\iint_{(\Delta)} r^3 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta \qquad (۲۴)$$

که درآن، (Δ) عبارت است ازحوزهٔ تغییر پارامترهای φ و θ.

۱۰) حجم جسمی را محاسبه کنید که محدود شده است به‌سطح

$$(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2xy$$

حل. از معادلهٔ قطبی سطح آغاز می‌کنیم:

$$r=a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta}$$

واز دستور (۲۴) استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$V=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{3}{2}}\theta\, d\theta$$

انتگرال اول را با دستور (۸) از **۳۱۲** و انتگرال دوم را با دستوری که در **۵۳۴؛ ۴**، a) داده‌ایم، محاسبه می‌کنیم. سرانجام به‌دست می‌آید:

$$V=\frac{\sqrt{2\pi}}{48}a^3\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$$

۱۱) دستور (۲۱)، ستوکس را، برای این‌تابع، مورد تحقیق قرار دهید:

$$P=x^2y^3,\quad Q=1,\quad R=z$$

به شرطی که دورهٔ (L)، دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$، $z=0$، و سطح (S)، نیم کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z>0)$ باشد. درضمن، روی سطح، رویهٔ بالایی را انتخاب می‌کنیم وجهت دوره را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت (اگر از بالا نگاه‌کنیم) می‌گیریم.

روشن است که انتگرال

$$\int_{(L)} x^2y^3dx+dy+zdz$$

منجر به‌همان جملهٔ اول می‌شود:

$$\int_{(L)} x^2 y^3 dx = -a^6 \int_0^{2\pi} \sin^4\theta \cos^2\theta d\theta = -\frac{\pi}{8} a^6$$

سپس، داریم:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2y^2, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

و به محاسبهٔ انتگرال می‌پردازیم:

$$-3\iint_{(S)} x^2y^2 dxdy = -3 \iint_{x^2+y^2 \leqslant a^2} x^2y^2 dxdy = -\frac{\pi}{8} a^6$$

و می‌بینیم، دو نتیجه، یکی است.

۱۲) دستور ستوکس را، برای تابع‌های

$$P = y, \quad Q = z, \quad R = x$$

مورد تحقیق قرار دهید، به شرطی که (L)، محیط دایرهٔ

$$x = a\cos^2 t, \quad y = a\sqrt{2}\sin t\cos t, \quad z = a\sin^2 t \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi)$$

و (S)، محدود به سطح دایرهٔ آن باشد. (این دایره، از برخورد صفحهٔ $x+z=a$ و کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ به دست می‌آید؛ وشعاع آن برابر است با $\frac{a}{\sqrt{2}}$.)

برای انتگرال منحنی‌الخط داریم:

$$\int_{(L)} ydx + zdy + xdz =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (-\sqrt{2}\sin^2 t + 2\cos^3 t \sin t) dt = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi a^2$$

و انتگرال روی سطح

$$-\iint_{(S)} dxdy + dydz + dzdx$$

برابر است بامجموع مساحت تصویرهای دایرهٔ مذکور برصفحه‌های مختصات (با علامت مخالف)، یعنی

$$-۲\frac{\pi a^۲}{۲}\cos ۴۵^\circ = -\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\pi a^۲$$

۱۳) دستور ستوکس را با فرض

$$P=y^۲+z^۲,\quad Q=z^۲+x^۲,\quad R=x^۲+y^۲$$

مورد تحقیق قرار دهید. به‌عنوان (S)، سطحی را در نظر بگیرید که به‌وسیلهٔ استوانهٔ $x^۲+y^۲=۲rx$ از کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۲Rx$ $(R>r>۰,\ z>۰)$ جدا می‌شود.

به نمایش پارامتری منحنی می‌رویم*:

$$x=r(۱+\cos t),\quad y=r\sin t,\quad z=\sqrt{۲r(R-r)}\sqrt{۱+\cos t}\quad (۰\leqslant t\leqslant ۲\pi)$$

برای انتگرال منحنی‌الخط، به عبارت کاملاً بغرنجی به صورت انتگرال عادی می‌رسیم:

$$\int_۰^{۲\pi}\Big\{[r^۲\sin^۲t+۲r(R-r)(۱+\cos t)](-r\sin t)+$$

$$+[۲r(R-r)(۱+\cos t)+r^۲(۱+\cos t)^۲]r\cos t+$$

$$+[r^۲(۱+\cos t)^۲+r^۲\sin^۲t].\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۲r(R-r)}{۱+\cos t}}(-\sin t)\Big\}dt$$

ولی جمله‌های اول و سوم داخل آکولاد، به‌صورت $f(\cos t)d\cos t$ هستند و، انتگرال آن‌ها، با توجه به متناوب بودن کسینوس، برابر صفر می‌شود. اگر بقیهٔ عمل را انجام دهیم، $۲\pi Rr^۲$ به دست می‌آید.

انتگرال روی سطح

$$۲\iint_{(S)}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

را، که نسبت به رویهٔ بالایی سطح موردنظر، در نظر گرفته شده است، ابتدا به انتگرال نوع دیگر تبدیل می‌کنیم:

---

*) اگر فرض کنیم $x-r=r\cos t$ و $y=r\sin t$، مفهوم هندسی پارامتر t روشن می‌شود؛ با قراردادن این مقدارها در معادلهٔ کره، رابطهٔ بین z و t به دست می‌آید.

$$۲\iint_{(S)}\Big[(y-z)\cos\lambda+(z-x)\cos\mu+(x-y)\cos\nu\Big]dS$$

چون

$$\cos\lambda=\frac{x-R}{R},\quad \cos\mu=\frac{y}{R},\quad \cos\nu=\frac{z}{R}$$

بنابراین، با قراردادن این‌مقدارها و انجام عمل‌های لازم، به‌این انتگرال می‌رسیم:

$$۲\iint_{(S)}(z-y)dS$$

باتوجه به‌تقارن سطح نسبت به صفحهٔ xz، انتگرال $\iint_{(S)}ydS$، برابرصفر می‌شود. انتگرال باقی‌مانده را، دوباره به انتگرال نوع دوم تبدیل می‌کنیم:

$$۲\iint_{(S)}zdS=۲\iint_{(S)}\frac{z}{\cos\nu}dxdy=۲R\iint_{(S)}dxdy=۲\pi Rr^{۲}$$

۱۴) دستور ستوکس

$$\int_{(L)}(z^{۲}-x^{۲})dx+(x^{۲}-y^{۲})dy+(y^{۲}-z^{۲})dz=$$

$$=۲\iint_{(S)}xdxdy+ydydz+zdzdx$$

را، با انتخاب (S) به‌عنوان سطح مارپیچی

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=cv$$
$$(a\leqslant u\leqslant b,\quad ۰\leqslant v\leqslant ۲\pi)$$

محدود به دو منحنی مارپیچی و دوپاره خط راست، که درمجموع، دورهٔ (L) را تشکیل می‌دهند، مورد تحقیق قرار دهید.

پاسخ: اگر انتگرال روی سطح را نسبت به رویهٔ بالایی سطح مفروض، وانتگرال منحنی‌الخط رادرجهت متناظرآن بگیریم، آن وقت، هردوانتگرال، برابر با $\pi c(b^{۲}-a^{۲})$ می‌شوند.

۶۴۱. کاربرد دستورستوکس دربررسی انتگرال‌های منحنی‌الخط درفضا. تابع‌های P، Q و R را در حوزهٔ باز (T)، همراه با مشتق‌های خود

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}; \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}; \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$$

پیوسته فرض می‌کنیم. به‌کمك دستور ستوکس می‌توان شرط‌های لازم وکافی‌را، برای این که انتگرال

$$\int_{(L)} P dx + Q dy + R dz \qquad (۲۵)$$

برابرصفر شود، پیداکرد. انتگرال، نسبت به دورهٔ قطعه به‌قطعه‌هموار بستهٔ ساده (L) (یعنی غیرمتقاطع باخود)، واقع در (T)، درنظرگرفته شده است.

درضمن، برای این‌که بتوان از دستور ستوکس استفاده‌کرد، طبعاً باید برای حوزهٔ سه‌بعدی (T)که بررسی‌ما درآن انجام می‌گیرد، محدودیت‌هایی قایل شد. به‌خصوص،این شرط‌لازم است‌که: دورهٔ‌بسته سادهٔ قطعه به‌قطعه‌هموار(L) درحوزهٔ (T) هرگونه انتخاب‌شود، بایدبتوان سطح قطعه‌به‌قطعه‌هموار (ونامتقاطع باخود)(S) را درآن «گسترد»، به‌نحوی که(L) دورهٔآن باشد و، درضمن، تمامی آن در (T) قرارگیرد. این ویژگی، شبیه ویژگی همبندی ساده در حوزه‌های مسطح است؛ وقتی این ویژگی‌برای حوزهٔ فضایی (T) وجود داشته باشد، آن را هم، «از نظرسطحی»* همبند ساده (یا مرتبط ساده) می‌گویند. به‌عنوان مثال می‌توان گفت‌که جسم محدود به دو سطح‌کروی هم مرکز، به این مفهوم، مرتبط و همبند ساده می‌شود، درحالی‌که چنبره این ویژگی‌را ندارد.

حوزهٔ (T) را مرتبط سادهٔ (سطحی) فرض‌می‌کنیم. با «گستردن» سطح(S) بردورهٔ (L)، طبق دستور ستوکس، انتگرال منحنی‌الخط (۲۵) را، به انتگرال روی سطح تبدیل می‌کنیم:

$$\iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz dx$$

و روشن است‌که، برای صفرشدن آن، کافی‌است داشته باشیم:

---

*) صفت «سطحی» را به این مناسبت اضافه‌کرده‌ایم‌که با نوع دیگرحوزهٔ فضایی مرتبط ساده مخلوط نشود [**۶۵۲** را ببینید].

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x} \qquad (B)$$

این شرط‌ها، درعین‌حال، لازم هم هستند. دراین مورد می‌توان (شبیه ۶۰۱) به‌سادگی قانع شد، اگر شکل‌های مستوی (S) را، به‌نوبت، در صفحه‌هایی موازی با یکی از صفحه‌های مختصات بگیریم.

خواننده می‌بیند که، دراین‌جا، از دستور ستوکس به همان ترتیب و با همان هدفی استفاده کرده‌ایم که، در شمارهٔ ۶۰۱، از دستور گرین استفاده کرده بودیم.

به سادگی می‌توان ثابت کرد که، همان شرط‌های (B)، لازم و کافی است برای این که انتگرال

$$\int_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz \qquad (۲۶)$$

بستگی به‌شکل منحنی (AB) نداشته باشد: (AB) دونقطهٔ دلخواه A و B ازحوزهٔ (T) را (بافرض این‌که مرتبط سادهٔ سطحی باشد) به‌هم وصل کرده است.

شرط لازم است. اگر فرض کنیم که، انتگرال (۲۶)، بستگی به‌مسیر ندارد، آن‌وقت (مثل بحث شمارهٔ ۵۶۱) نتیجه می‌شود که انتگرال (۲۵)، نسبت به دورهٔ بستهٔ سادهٔ (L) برابر صفر می‌شود و، بنابراین، شرط‌های (B) برقرارند.

شرط کافی است. از (B) نتیجه می‌شود که انتگرال (۲۵) نسبت به دورهٔ بستهٔ‌سادهٔ (L) صفر است. ازاین‌جا (شبیه شمارهٔ ۵۶۱)، این برابری به دست می‌آید:

$$\int_{(AIB)} = \int_{(AIIB)} \qquad (۲۷)$$

تنها بااین شرط که منحنی‌های (AIB) و $(AIIB)$، جز دونقطهٔ A و B، نقطهٔ مشترک‌دیگری نداشته باشند. درحالت عکس، وقتی که منحنی‌ها یکدیگررا قطع کرده باشند، مطلب خیلی ساده‌تر ازحالت مسطحهٔ آن می‌شود: در رابطه باحوزهٔ فضایی (T)، همیشه می‌توان منحنی سوم $(AIIIB)$ را طوری انتخاب کرد که هیچ‌کدام از دو منحنی قبلی‌را قطع نکند. در این‌صورت

$$\int_{(AIB)} = \int_{(AIIIB)},\ \int_{(AIIB)} = \int_{(AIIIB)}$$

که ازآن‌جا، به برابری (۲۷) می‌رسیم.

درهمین‌جا، می‌توان این پرسش را مطرح کرد که: آیا عبارت دیفرانسیلی

$$Pdx+Qdy+Rdz \qquad (۲۸)$$

می‌تواند دیفرانسیل کامل از یك تابع یك ارزشی با سه متغیر باشد؟ لازم بودن شرطهای (B)، برای این‌که به این پرسش جواب مثبت داده شود، روشن است [**۵۶۴** را ببینید]. ولی، در آن‌جا، کافی بودن شرطهای (B) را برای حالتی درنظر گرفته بودیم که، حوزهٔ اصلی (T)، یك مکعب مستطیل باشد؛ اکنون به سادگی می‌توانیم آن را در مورد هرحوزهٔ مرتبط ساده (سطحی) برقرار کنیم. تابع اولیه را می‌توان، یکباره، به صورت انتگرال منحنی‌الخط نوشت:

$$F(x, y, z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz$$

که، با توجه به شرطهای (B)، بستگی به مسیر ندارد. به این ترتیب، برای حوزهٔ (T) (از نوع نامبرده)، شرطهای (B) لازم و کافی است، برای این‌که عبارت (۲۸)، یك دیفرانسیل کامل باشد.

MATH75.IR

فصل هجدهم

انتگرال‌های سه‌گانه و چندگانه

§۱. انتگرال سه‌گانه و محاسبهٔ آن

۶۴۲. مسألهٔ مربوط به محاسبه جرم جسم. فرض کنید، جسم (V) دارای جرم باشد و در هر نقطهٔ $M(x, y, z)$ آن، چگالی

$$\rho = \rho(M) = \rho(x, y, z)$$

توزیع این جرم، معلوم باشد. می‌خواهیم تمامی جرم m جسم را پیدا کنیم.

برای حل این مساله، جسم (V) را به‌بخش‌های

$$(V_1), (V_2), \ldots, (V_n)$$

تقسیم و در محدودهٔ هریك از آن‌ها، نقطهٔ

$$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$$

را انتخاب می‌کنیم. به‌تقریب قبول می‌کنیم که درمحدودهٔ بخش (V_i)، مقدار چگالی ثابت، و برابر چگالی $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ در نقطهٔ انتخاب شده باشد. در این‌صورت، جرم m_i این بخش، به تقریب چنین است:

$$m_i \doteq \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V_i$$

و جرم تمامی جسم

$$m \doteq \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V_i$$

وقتی قطر همهٔ بخش‌ها به‌سمت صفر میل کنند، درحد، این برابری تقریبی، به برابری واقعی

تبدیل می‌شود:

$$m = \text{حد} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i \qquad (۱)$$

می‌بینیم که، در این‌جا هم، حل مسأله، منجر به بررسی حد مجموع خاصی شد، که نوعی مجموع انتگرالی است، ولی با همهٔ مجموع‌های انتگرالی دیگر ـ که تا این‌جا شناخته‌ایم ـ فرق دارد.

با این گونه حدها، اغلب در مکانیك و فیزیك برخورد می‌کنیم که به آن‌ها، نام انتگرال‌های سه‌گانه را داده‌اند و این‌طور می‌نویسند:

$$m = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dV \qquad (۲)$$

در این فصل، به‌طور عمده، به‌نظریهٔ انتگرال‌های سه‌گانه و کاربردهای آن پرداخته‌ایم. از آن‌جا که بسیاری از گزاره‌های مربوط به انتگرال‌های دوگانه، همراه با اثبات آن‌ها، برای حالت انتگرال سه‌گانه هم درست است، بنابراین، معمولا به‌تنظیم این گزاره‌ها اکتفا کرده و اثبات آن‌ها را (که درواقع، تکرار اثبات‌های گذشته است) به‌خواننده واگذاشته‌ایم.

۶۴۳. انتگرال سه‌گانه و شرط‌های وجود آن. برای تعریف نوع جدید انتگرال، یعنی انتگرال سه‌گانه، نقش اصلی به‌عهدهٔ حجم جسم است، همان طور که مفهوم مساحت شکل مستوی، اساس تعریف انتگرال دوگانه بود.

با مفهوم حجم، در جلد اول آشنا شده و بارها با آن برخورد داشته‌ایم. شرط وجود حجم برای جسم مفروض، در این بود که، سطح محصورکنندهٔ آن، حجمی برابر صفر داشته باشد [۳۴۱]. ما هم، تنها همین گونه سطح‌ها را مورد بررسی قرار خواهیم داد و، بنابراین، وجود حجم، در هر حالتی که لازم باشد، به خودی خود، تأمین است. و همان‌طور که می‌دانیم، سطح‌های هموار و یا قطعه به‌قطعه هموار، ازجملهٔ چنین سطح‌هایی هستند.

اکنون فرض کنید، دریك حوزهٔ فضایی (V)، تابع $f(x, y, z)$ داده شده باشد. به کمك شبکه‌ای ازسطح‌ها، این حجم را به‌تعداد محدودی بخش‌های (V_1)، (V_2)، ...، (V_n) به ترتیب با حجم‌های V_1، V_2، ...، V_n، تقسیم می‌کنیم. در محدودهٔ i امین بخش (V_i)، نقطهٔ دلخواه (ξ_i, η_i, ζ_i) را انتخاب، ومقدار تابع را در این نقطه، یعنی $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ را، درحجم V_i ضرب می‌کنیم و مجموع انتگرالی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i$$

حد متناهی I از این مجموع، وقتی که بزرگترین قطر از بین همهٔ قطرهای حوزه‌های (V_i) به سمت صفرمیل‌کند، انتگرال سه‌گانهٔ تابع $f(x, y, z)$ درحوزهٔ (V) نامیده می‌شود. این انتگرال را، این‌طور نشان می‌دهند:

$$I=\iiint_{(V)} f(x, y, z)dV=\iiint_{(V)} f(x, y, z)dxdydz$$

حد متناهی به‌این صورت، تنها می‌تواند برای یك تابع کران‌دار وجود داشته باشد؛ درمورد چنین تابعی، به‌جز مجموع انتگرالی σ، ازمجموع‌های داربو هم استفاده می‌شود:

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i V_i, \quad S=\sum_{i=1}^{n} M_i V_i$$

که در آن‌ها

$$m_i=\inf_{(V_i)}(f), \quad M_i=\sup_{(V_i)}\{f\}$$

به طریق عـادی می‌توان ثابت کردکه، برای وجـود انتگرال، لازم و کافی است داشته باشیم:

$$\text{حـد}(S-s)=0$$

یا

$$\text{حـد}\sum_{i=1}^{n}\omega_i V_i=0$$

که در آن، $\omega_i=M_i-m_i$، عبارت است از نوسان تابع f درحوزهٔ (V_i) [می‌بینیم، اگر انتگرال وجودداشته باشد، هردو مقدار s و S نیز، درحدخود، به‌همان‌انتگرال می‌رسند].

ازاین‌جا، به‌طور مستقیم، نتیجه می‌شودکه: هرتابع پیوستهٔ f، انتگرال‌پذیر است.

حتی‌می‌توان گفت: هرتابع کران‌داری‌که همهٔ ناپیوستگی‌های‌آن، برتعداد محدودی سطح‌های با حجم صفر واقع باشند، انتگرال‌پذیر است.

اثبات این‌حکم [با ۵۹۰ مقایسه‌کنید]، براساس پیش قضیهٔ زیرانجام می‌گیرد.

اگر حوزهٔ (V)، که شامل سطح (S) با حجم صفر است، به حوزه‌های جزئی‌تقسیم شود، آن وقت، مجموع آن حجم‌هایی‌که با سطح (S) برخورد دارند، همراه با قطرهای همهٔ حوزه‌های جزئی، به سمت صفر میل می‌کند.

۶۴۴. ویژگی‌های تابع‌های انتگرال‌پذیر و انتگرال‌های سه‌گانه. کافی‌است، از

ویژگی‌های زیر نام ببریم. برای اثبات آن‌ها، می‌توانید کاملا شبیه اثبات‌هایی که در ۵۹۲ داشتیم، استدلال کنید:

۱°. وجود و مقدار انتگرال سه‌گانه، به مقدارهایی که تابع در طول تعداد محدود سطح با حجم صفر قبول می‌کند، بستگی ندارد.

۲°. اگر $(V)=(V')+(V'')$، آن وقت

$$\iiint\limits_{(V)} f\,dV=\iiint\limits_{(V')} f\,dV+\iiint\limits_{(V'')} f\,dV$$

درضمن، وجود انتگرال سمت چپ، به‌معنای وجود انتگرال‌های سمت راست (و برعکس) است.

۳°. اگر k مقدار ثابتی باشد $(k=\text{const.})$، آن وقت

$$\iiint\limits_{(V)} kf\,dV=k\iiint\limits_{(V)} f\,dV$$

درضمن، از وجود انتگرال سمت راست، وجود انتگرال سمت چپ نتیجه می‌شود.

۴°. اگر هریك ازدو تابع f و g، درحوزهٔ (V) انتگرال‌پذیر باشند، آن وقت، تابع $f\pm g$ هم، در این حوزه، انتگرال‌پذیر است و در ضمن داریم:

$$\iiint\limits_{(V)} (f\pm g)\,dV=\iiint\limits_{(V)} f\,dV\pm\iiint\limits_{(V)} g\,dV$$

۵°. اگر برای دوتابع f و g، که در حوزهٔ (V) انتگرال‌پذیرند، نابرابری $f\leqslant g$ برقرار باشد، آن‌گاه

$$\iiint\limits_{(V)} f\,dV\leqslant\iiint\limits_{(V)} g\,dV$$

۶°. به شرط انتگرال‌پذیری تابع f، تابع $|f|$ هم انتگرال‌پذیر است و در ضمن

$$\left|\iiint\limits_{(V)} f\,dV\right|\leqslant\iiint\limits_{(V)} |f|\,dV$$

۷°. اگر برای تابع f، که در حوزهٔ (V) انتگرال‌پذیر است، داشته باشیم:

$$m\leqslant f\leqslant M$$

آن وقت داریم:

$$mV \leqslant \iiint_{(V)} f\,dV \leqslant MV$$

به زبان دیگر، قضیهٔ مربوط به مقدارهای میانگین برقرار است:

$$\iiint_{(V)} f\,dV = \mu V \quad (m \leqslant \mu \leqslant M)$$

درحالت ناپیوستگی تابع f، این دستور را می‌توان چنین نوشت:

$$\iiint_{(V)} f\,dV = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})V \qquad (۳)$$

که درآن، $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$، نقطه‌ای از حوزهٔ (V) است.

سپس، آن چه را هم‌که درشمارهٔ **۵۹۳** آورده‌ایم، می‌توان برای حالت سه بعدی تعمیم داد: مثل همان جا، در این‌جا هم، می‌توان مفهوم تابع نسبت به حوزهٔ سه بعدی و، به خصوص، تابع جمعی را تعریف کرد. نمونهٔ مهم این تابع (۲° را ببینید)، انتگرال نسبت به حوزهٔ متغیر (v) است:

$$\Phi((v)) = \iiint_{(v)} f\,dv \qquad (۴)$$

به‌همان ترتیب، می‌توان، مفهوم مشتق تابع $\Phi((v))$ را نسبت به حوزه، در نقطهٔ مفروض M، مطرح کرد. حد

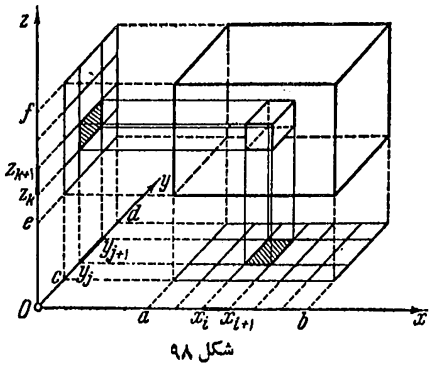
$$\lim_{(v)\to M} \frac{\Phi((v))}{v}$$

وقتی که حوزهٔ (v)، که شامل نقطهٔ M است، به سمت نقطهٔ M فشرده شود، این طور نامیده می‌شود.

۸°. اگر تابع زیر انتگرال پیوسته باشد، آن وقت، مشتق انتگرال (۴) نسبت به حوزه، در نقطهٔ $M(x, y, z)$، همان مقدار تابع زیر انتگرال در این نقطه خواهد بود، یعنی $f(M) = f(x, y, z)$.

به‌این ترتیب، با این فرض‌ها، انتگرال (۴) برای تابع f، به مفهومی، یك «تابع اولیه» است و، شبیه‌حالت مسطحه، تابع اولیهٔ جمعی منحصر به فرد است.

۶۴۵. محاسبهٔ انتگرال سه‌گانهٔ گسترده در مکعب مستطیل. محاسبهٔ انتگرال سه گانه را با حالتی آغاز می‌کنیم که، جسمی که تابع $f(x, y, z)$ در آن تعریف شده است، مکعب مستطیل $(T)=[a, b; c, d; e, f]$ باشد. (شکل ۹۸). تصویر این مکعب مستطیل را بر صفحهٔ yz، مستطیل $(R)=[c,d;e,f]$ می‌گیریم.



شکل ۹۸

قضیه: اگر برای تابع $f(x, y, z)$، انتگرال سه‌گانهٔ

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z)dT \qquad (۵)$$

و برای هرمقدار ثابت x از $[a,b]$ انتگرال دوگانهٔ

$$I(x)=\iint_{(R)} f(x, y, z)dR \qquad (۶)$$

وجود داشته باشد، آن وقت، انتگرال تکراری

$$\int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z)dR \qquad (۷)$$

نیز وجود دارد و، در ضمن، داریم:

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z)dT=\int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z)dR \qquad (۸)$$

اثبات. استدلال، شبیه شمارهٔ **۵۹۴** است. بازه‌های $[a, b]$، $[c, d]$ و $[e, f]$ را به‌کمک نقطه‌های

$$x_0=a<x_1<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b,$$
$$y_0=c<y_1<\cdots<y_j<\cdots<y_m=d,$$
$$z_0=e<z_1<\cdots<z_k<\cdots<z_l=f$$

به بخش‌هایی تقسیم می‌کنیم که، در نتیجه، مکعب‌مستطیل (T)، به مکعب مستطیل‌های جزئی

$$(T_{i,j,k})=[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$$

$$(i=0, 1, \dots, n-1;\ j=0, 1, \dots, m-1;\ k=0, 1, \dots, l-1)$$

تقسیم می‌شود. درضمن، مستطیل (R) را، به مستطیل‌های جزئی

$$(R_{j,k})=[y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$$

تقسیم می‌کنیم که، درآن، همان مقدارهای قبلی را قبول می‌کنند.

بافرض

$$m_{i,j,k}=\inf_{(T_{i,j,k})}\{f\},\quad M_{i,j,k}=\sup_{(T_{i,j,k})}\{f\}$$

با توجه به ۶۴۴، ۷°، برای همهٔ مقدارهای x از $[x_i, x_{i+1}]$، داریم:

$$m_{i,j,k}\Delta y_j\Delta z_k\leqslant\int\int_{(R_{j,k})} f(x,y,z)dydz\leqslant M_{i,j,k}\Delta y_j\Delta z_k$$

اگر مقدار دلخواه $x=\xi_i$ را دراین بازه تثبیت‌کنیم و نابرابری‌های مشابه را، برای همهٔ مقدارهای j و k، جمع کنیم، به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$\sum_j\sum_k m_{i,j,k}\Delta y_j\Delta z_k\leqslant I(\xi_i)=\int\int_{(R)} f(\xi_i, y, z)dydz\leqslant$$

$$\leqslant\sum_j\sum_k M_{i,j,k}\Delta y_j\Delta z_k$$

بالاخره، این نابرابری‌ها را، جمله به‌جمله، در Δx_i ضرب و، این‌بار، نسبت به اندیس i جمع می‌کنیم:

$$\sum_i\sum_j\sum_k m_{i,j,k}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k\leqslant\sum_i I(\xi_i)\Delta x_i\leqslant$$

$$\leqslant\sum_i\sum_j\sum_k M_{i,j,k}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$$

جمله‌های دوطرف، همان مجموع داربو برای انتگرال (۵) می‌شوند و، اگر همهٔ تفاضل‌های Δx_i و Δy_j و Δz_k به سمت صفر میل کنند، آن‌ها هم به سمت این انتگرال میل خواهند کرد. بنابراین، مجموع انتگرالی‌واقع دروسط هم، به‌سمت همان حد میل‌می‌کند. به‌این ترتیب، هم وجود انتگرال (۷)، و هم درستی برابری (۸) ثابت می‌شود.

اگر فرض کنیم، انتگرال سادهٔ

$$\int_c^f f(x, y, z)dz \qquad (۹)$$

برای هرمقدار x از $[a, b]$ و هر مقدار y از $[c, d]$ وجود دارد، آن وقت، انتگرال دوگانهٔ برابری (۸) را می‌توان به انتگرال تکراری تبدیل کرد [۵۹۴]، وسرانجام به‌دست آورد:

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z)dT = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z)dz \qquad (۱۰)$$

به‌این ترتیب، محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه، منجر به محاسبهٔ سه انتگرال سادهٔ متوالی می‌شود. روشن‌است که، در دستور (۱۰)، می‌توان نقش متغیرهای x، y و z را با هم عوض کرد.

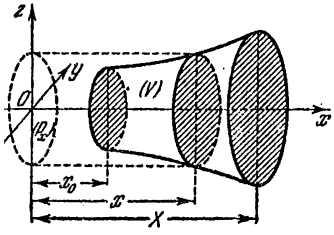
ازخواننده می‌خواهیم، ثابت کندکه، ازوجودانتگرال سه‌گانهٔ (۵) ووجود انتگرال سادهٔ (۹)، می‌توان دستور زیررا نتیجه گرفت:

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z)dT = \iint_{(Q)} dxdy \int_e^f f(x, y, z)dz \qquad (۱۱)$$

که در آن، $Q = [a, b; c, d]$. و البته، در این‌جا هم، می‌توان نقش متغیرها را با هم عوض کرد.

روشن است که، درحالت خاص تابع پیوستهٔ $f(x, y, z)$، همهٔ دستورهای (۸)، (۱۰) و (۱۱)، و دستورهای مشابهی که از تبدیل متغیرها به‌دست می‌آیند، به قوت خود باقی‌اند.

۶۴۶. محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه نسبت به حوزهٔ دلخواه. شبیه مورد شمارهٔ **۵۹۶**، دراین‌جا هم، می‌توان حالت کلی انتگرال گسترده برجسم دلخواه (V) را، به همان حالتی منجر کردکه هم اکنون بررسی کردیم. اگر تابع $f(x, y, z)$ در حجم (V) معین باشد، آن وقت، به جای آن، تابع $f^*(x, y, z)$ را در نظر می‌گیریم که در مکعب مستطیل (T) با شرط زیر، معین باشد:



شکل ۹۹

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{درداخل } (V): \\ 0 & \text{درخارج } (V): \end{cases}$$

ازاین راه، می‌توان همهٔ دستورهای زیررا به دست آورد. دراین‌جا، تنها به حالت‌هایی می‌پردازیم که، بیشتر از بقیه، جالب‌اند.

(V) را جسمی می‌گیریم که بین صفحه‌های $x=x_0$ و $x=X$ واقع باشد و هر صفحهٔ موازی باآن‌ها، که متناظر با مقدار ثابت x باشد $(x_0 \leqslant x \leqslant X)$، جسم را درشکلی که دارای مساحت است قطع کند؛ (P_x) را تصویر آن، برصفحهٔ yz فرض می‌کنیم (شکل ۹۹). دراین صورت

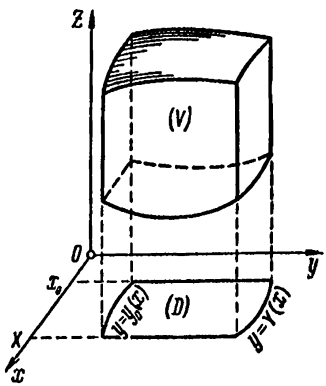
$$\iiint_{(V)} f(x, y, z)dV = \int_{x_0}^{X} dx \iint_{(P_x)} f(x, y, z)dydz \qquad (8^*)$$

با این فرض که، انتگرال‌های سه‌گانه و دوگانه وجود داشته باشند. و این، مشابه دستور (۸) است.

اکنون، فرض می‌کنیم، (V) «لولهٔ استوانه‌ای» باشد که ازبالا و پایین، به ترتیب، باسطح‌های زیر محدود شده است:

$$z=Z(x, y), \quad z=z_0(x, y)$$

واگراین دوسطح را برصفحهٔ xy تصویر کنیم، شکلی مثل (D) به‌دست می‌آید که به‌منحنی (K) با مساحت صفر، محدود است؛ جسم (V) از طرفین، به سطحی استوانه‌ای محدود است که مولدهای آن موازی محور z ومنحنی هادی آن، منحنی (K) است (شکل ۹۶). در این‌صورت، شبیه دستور (۱۱) داریم:



شکل ۱۰۰

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z)dV =$$

$$\iint_{(D)} dxdy \int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x, y, z)dz \quad (11^*)$$

درضمن، فرض براین است که انتگرال سه‌گانه وانتگرال ساده درونی در سمت راست، وجود دارند.

اگر حوزهٔ (D)، ذوزنقهٔ منحنی‌الخطی باشد که به دو منحنی

$$y=y_0(x) \quad و \quad y=Y(x)$$
$$(x_0 \leqslant x \leqslant X)$$

و خطهای راست $x=x_0$ و $x=X$ محدود شده باشد (شکل ۱۰۰)، آن‌وقت، جسم (V)، رفتاری شبیه دونوع بالا دارد. اگر انتگرال دوگانه را، چه در دستور (*۸) و چه در دستور (*۱۱)، به‌انتگرال تکراری تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z)dV = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0(x)}^{Y(y)} dy \int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x, y, z)dz \quad (10^*)$$

که درواقع، تعمیم دستور (۱۰) است.

مثل حالت ساده‌ای که در شمارهٔ قبل بررسی کردیم، در این‌جا هم، دستورهای (*۸)، (*۱۰) و (*۱۱)، و دستورهای مشابه آن‌ها، که از تبدیل متغیرهای x و y و z در آن‌ها به دست می‌آیند، برای تابع پیوستهٔ $f(x, y, z)$ درست‌اند.

۶۴۷. انتگرال‌های سه‌گانهٔ ناویژه. در حالت‌هایی که حوزهٔ انتگرال‌گیری تا بی‌نهایت گسترده باشد، یا تابع زیر انتگرال، در نزدیکی نقطه‌ها، منحنی‌ها یا سطح‌های ویژه، محدودنشود، باانتگرال سه‌گانهٔ ناویژه سروکار داریم که به‌کمک عبورحدی تکمیلی و شروع از انتگرال ویژه، محاسبه می‌شود. خصلت حالت چند بعدی، در مقایسهٔ با حالت‌های خطی‌را، ضمن مطالعهٔ انتگرال‌های دوگانه بررسی کرده‌ایم و، دراین‌جا، چیزی نداریم که به‌آن اضافه کنیم.

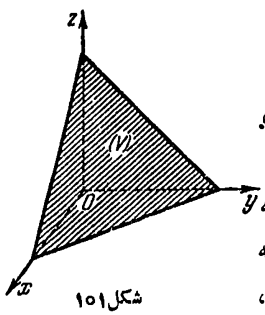
برای انتگرال‌های سه‌گانهٔ ناویژه هم، تقارب مطلق ضرورت دارد؛ و این وضع، تمامی وجود و محاسبهٔ این انتگرال‌ها را، به‌حالت تابع مثبت (غیرمنفی) زیر انتگرال منجر می‌کند.

با توجه به این فرض، می‌توان، مثل حالت انتگرال‌های دوگانه، رابطهٔ بین انتگرال سه‌گانه را با گونه‌های مختلف انتگرال‌های تکراری، پیدا کرد. ولی ما به‌این مطلب نمی‌پردازیم.

۶۴۸. مثال‌ها. ۱) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$I=\iiint \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$$

نسبت به چهاروجهی (V)، محدود به‌صفحه‌های $x=0$، $y=0$، $z=0$ و $x+y+z=1$ (شکل ۱۰۱).



شکل ۱۰۱

حل. تصویر جسم بر صفحهٔ xy، مثلثی است محدود به خطهای راست $x=0$، $y=0$، $x+y=1$. روشن است که x درفاصلهٔ ۰ تا ۱ تغییرمی‌کند و، به‌ازای هر x ثابت‌ازاین‌فاصله، متغیر y از ۰ تا $1-x$ تغییر می‌کند. اگرهم x وهم y تثبیت شوند، نقطه می‌تواند روی

قائم (از $z=0$ تا صفحهٔ $x+y+z=1$) تغییر مکان‌دهد. به‌این ترتیب، فاصلهٔ تغییر z عبارت است از ۰ تا $1-x-y$.

باتوجه به دستور (*۱۰) داریم:

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$

محاسبه را از انتگرال درونی آغاز می‌کنیم:

$$\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right];$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]dy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4}\right);$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$$

۲) مطلوب است محاسبهٔ

$$K=\iiint_{(V)} z\,dx\,dy\,dz$$

که درآن، (V) عبارت است از نیمهٔ بالایی بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

حل. تصویر جسم برصفحهٔ xy، عبارت است ازبیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. بنابراین، x در فاصلهٔ از $-a$ تا a تغییر می‌کند و، با ثابت بودن x، فاصلهٔ تغییر y، از $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ تا $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ است. جسم، ازپایین به صفحهٔ xy و از بالا به سطح بیضوی محدود است، به‌نحوی‌که با ثابت گرفتن x و y، فاصلهٔ تغییر z چنین است:

$$0\text{ و }c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

با توجه به دستور (*۱۰)، به ترتیب، داریم:

$$K=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_{0}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}zdz=$$

$$=\frac{c^2}{2}\int_{-a}^{a}dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=$$

$$=c^2\int_{-a}^{a}dx\int_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})dy^*=\frac{2bc^2}{3a^3}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=$$

$$=\frac{4bc^2}{3a^3}\int_{0}^{a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx^*=\frac{\pi}{4}abc^2$$

محاسبه را به‌طریق دیگری هم می‌توانستیم دنبال کنیم. بنا بر دستور (*۸)، به‌شرطی که نقش متغیرهای x و y را در آن عوض کنیم، داریم:

$$K=\int_{0}^{c}dz\iint_{(R_z)}zdxdy=\int_{0}^{c}zdz\iint_{(R_z)}dxdy$$

که در آن، (R_z) عبارت است از تصویر مقطع بیضوی با صفحهٔ $Z=z$، برصفحهٔ xy. ولی انتگرال دوگانهٔ

$$\iint_{(R_z)}dxdy$$

چیزی جزمساحت R_z این تصویر نیست. معادلهٔ محیط این‌تصویر، برصفحه xy چنین‌است:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}=1$$

یعنی، یك بیضی با نیم قطرهای

---

*) با توجه به‌زوج بودن تابع زیر انتگرال.

$$a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}} \quad و \quad b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$$

و بنابراین، همان‌طور که می‌دانیم

$$R_z=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

در نتیجه

$$K=\pi ab\int_0^c z\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{\pi abc^2}{4}$$

می‌بینید که، با استفاده از محاسبهٔ مساحت بیضی، مقدار محاسبه، تا حد زیادی کمتر می‌شود.

۳) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$L=\iiint_{(T)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$$

که در آن، (T) عبارت است از تمامی بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$

حل. اگر از روش دومی که برای حل مسألهٔ قبل به‌کار بردیم، استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$L=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}dx\iint_{(P_x)}dydz+\int_{-b}^{b}\frac{y^2}{b^2}dy\iint_{(Q_y)}dzdx+\int_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}dz\iint_{(R_z)}dxdy$$

و از آن‌جا

$$L=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx+\frac{\pi ca}{b^2}\int_{-b}^{b}y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy+$$

$$+\frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^{c}z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{5}\pi abc$$

۴) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$I=\iiint_{(A)} z\,dx\,dy\,dz$$

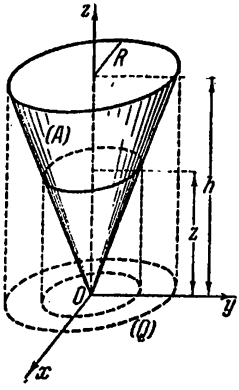
که در آن، (A)، محدود به سطح مخروطی $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ و صفحهٔ $z=h$ است (شکل ۱۰۲).

حل. الف) تصویر (Q) مخروط برصفحهٔ xy، دایرهٔ $x^2+y^2\leqslant R^2$ است. بنابر دستور (*۱۱)

$$I=\iint_{Q} dx\,dy\int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\,dz=\frac{1}{2}\iint_{(Q)}\left[h^2-\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\right]dx\,dy$$

واگر به مختصات قطبی برویم:

$$I=\frac{h^2}{2R^2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R (R^2-r^2)r\,dr=\frac{\pi R^2h^2}{4}$$



شکل ۱۰۲

ب) با روش دیگری برای حل، می‌توان نوشت:

$$I=\int_0^h z\,dz\iint_{(D)} dx\,dy$$

که در آن، (D) عبارت است از تصویر مقطع مخروط با صفحه‌ای موازی با xy وبه‌ارتفاع z، برصفحهٔ xy. این تصویر دایره‌ای است به شعاع $\frac{Rz}{h}$، به‌نحوی که، انتگرال دوگانه، برابر مساحت آن، یعنی $\frac{\pi R^2}{h^2}z^2$ می‌شود. درنتیجه

$$I=\int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2}z^3\,dz=\frac{\pi R^2h^2}{4}$$

۵) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$K=\iiint_{(V)} x\,dx\,dy\,dz$$

که در آن، (V) منشوری است محدود به صفحه‌های $x=0$، $y=0$، $z=0$، $y=h$ و $x+z=a$.

راهنمائی. ازدستور (*۸) استفاده کنید. (P_n) مستطیلی است باضلع‌های h و $a-x$.

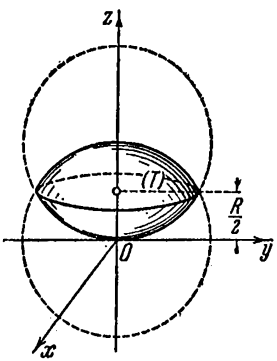
پاسخ: $K=\frac{1}{6}a^3h$.

۶) مقدار این انتگرال را پیداکنید:

$$J=\iiint_{(T)} z^2\,dx\,dy\,dz$$

که در آن، (T)، فصل مشترك دو کرهٔ زیر است (شکل ۱۰۳):

$$x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz \quad \text{و} \quad x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$$



شکل ۱۰۳

حل. مقطع سطح‌های دو کره، بر صفحهٔ $z=\frac{R}{2}$ قرار دارد. مقطع‌های جسم (T) باصفحه‌های موازی صفحهٔ xy، دایره‌هایی را تشکیل می‌دهند. در این‌جا هم، باعبور به انتگرال تکراری، به دست می‌آید:

$$J=\pi\int_0^{\frac{1}{2}R} z^2(2Rz-z^2)\,dz+\pi\int_{\frac{1}{2}R}^{R} z^2(R^2-z^2)\,dz=\frac{59}{480}\pi R^5$$

۷) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$S=\iiint_{(V)}(x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz$$

که در آن، (V)، فصل مشترك سهموی $x^2+y^2\leqslant 2az$ و کرهٔ $x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2$ است.

حل. ابتدا یادآوری می‌کنیم که، با بازکردن پرانتز زیرانتگرال، متوجه می‌شویم

که انتگرال جمله‌های $2xy$، $2xz$ و $2yz$، بنا بر ملاحظه‌های تقارنی، حذف می‌شوند*. به‌این ترتیب

$$S=\iiint_{(T)}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

و با توجه به‌دستور (*۸) (با جا به‌جا کردن نقش‌های x و z)

$$S=\int_0^a dz\iint_{x^2+y^2\leqslant 2az}(x^2+y^2+z^2)dxdy+\int_a^{a\sqrt{3}}dz\iint_{x^2+y^2\leqslant 3a^2-z^2}(x^2+y^2+z^2)dxdy$$

انتگرال‌های دوگانه، به‌سادگی و با عبور به‌مختصات قطبی، محاسبه می‌شوند:

$$2\pi\int_0^{\sqrt{2az}}(r^2+z^2)rdr=2\pi(a^2z^2+az^3),$$

$$2\pi\int_0^{\sqrt{3a^2-z^2}}(r^2+z^2)rdr=\frac{1}{2}\pi(9a^4-z^4)$$

و از آن‌جا

$$S=2\pi\int_0^a(a^2z^2+az^3)dz+\frac{1}{2}\pi\int_a^{a\sqrt{3}}(9a^4-z^4)dz=\frac{\pi a^5}{5}(18\sqrt{3}-\frac{97}{6})$$

۸) این انتگرال را محاسبه کنید:

$$I=\iiint_{(T)}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

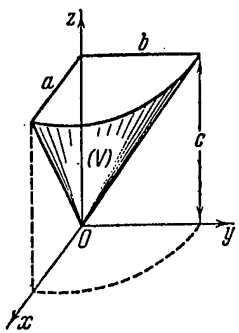
که در آن، (T) عبارت است از بخش مشترک مخروط $y^2+z^2\leqslant x^2$ و کرهٔ $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ $(x\geqslant 0)$.

پاسخ: $I=\frac{\pi R^5}{5}(2-\sqrt{2})$.

---

*) با تبدیل انتگرال مکرر و با توجه به ویژگی‌های انتگرال‌های ساده و دوگانه، می‌توان به این نتیجه رسید.

۹) مخروط $\left(\frac{z}{c}\right)^2=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2$ مفروض است. صفحهٔ $z=c$، مخروط را در یک بیضی قطع می‌کند که، تصویر آن بر صفحهٔ xy، به معادلهٔ $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ است. جسم (V) واقع در یک هشتم اول دستگاه مختصات را در نظر می‌گیریم که به سطح مخروطی مفروض، صفحهٔ $z=c$ و، همچنین، صفحه‌های مختصاتی $x=0$ و $y=0$ محدوداست (شکل ۱۰۴).



شکل ۱۰۴

می‌خواهیم انتگرال زیر را، نسبت به این جسم، محاسبه کنیم:

$$A=\iiint_{(V)}\frac{xy}{\sqrt{z}}dxdydz$$

حل. الف) با انتگرال‌گیری، ابتدا نسبت به z، سپس نسبت به y و بالاخره نسبت به x، حدود تغییرها را پیدا می‌کنیم:

برای x: 0 و a؛ برای y: 0 و $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$؛

برای z: c و $c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}$

دراین صورت، داریم:

$$A=\int_0^a xdx\int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} ydy\int_{c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{c}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

و به ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$\int_{c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{c}\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{c}\left[1-\sqrt[4]{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right];$$

$$۲\sqrt{c}\int_{۰}^{b\sqrt{۱-\left(\frac{x}{a}\right)^{۲}}}\left[۱-\sqrt[۴]{\left(\frac{x}{a}\right)^{۲}+\left(\frac{y}{b}\right)^{۲}}\right]y\,dy=$$

$$=\frac{b^{۲}\sqrt{c}}{a}(a^{۲}-x^{۲})-\frac{۴}{۵}b^{۲}\sqrt{c}\left[۱-\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{۵}{۲}}\right];$$

$$A=\frac{۱}{۳۶}a^{۲}b^{۲}\sqrt{c}$$

ب) اگر به ردیف عکس عمل کنیم، محاسبه، تاحد زیادی ساده‌تر می‌شود. تصویر جسم برصفحهٔ yz، مثلثی است محدود به خطهای راست $y=۰$، $z=c$ و $y=\frac{b}{c}z$.

بنابراین، حدود تغییرها، چنین می‌شود:

برای z: ۰ و c؛ برای y: ۰ و $\frac{b}{c}z$؛

برای x: ۰ و $a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^{۲}-\left(\frac{y}{b}\right)^{۲}}$

وانتگرال مفروض، به‌این صورت در می‌آید:

$$A=\int_{۰}^{c}\frac{dz}{\sqrt{z}}\int_{۰}^{\frac{b}{c}z}y\,dy\int_{۰}^{a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^{۲}-\left(\frac{y}{b}\right)^{۲}}}x\,dx$$

دراین حالت، به ترتیب، داریم:

$$\int_{۰}^{a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^{۲}-\left(\frac{y}{b}\right)^{۲}}}x\,dx=\frac{a^{۲}}{۲}\left[\left(\frac{z}{c}\right)^{۲}-\left(\frac{y}{b}\right)^{۲}\right];$$

$$\frac{a^{۲}}{۲}\int_{۰}^{\frac{b}{c}z}\left[\left(\frac{z}{c}\right)^{۲}-\left(\frac{y}{b}\right)^{۲}\right]y\,dy=\frac{۱}{۸}\cdot\frac{a^{۲}b^{۲}}{c^{۴}}z^{۴};$$

$$A=\frac{۱}{۸}\ \frac{a^۲b^۲}{c^۲}\int_۰^c z^{\frac{۷}{۲}}dz=\frac{۱}{۳۶}a^۲b^۲\sqrt{c}$$

۱۰) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال‌های

الف) $I_۱=\iiint_{(V)} z^m dxdydz$؛ ب) $I_۲=\iiint_{(V)} x^m dxdydz$

که در آن، (V) همان جسم مسألهٔ قبل و m، عددی طبیعی است.

راهنمائی. انتگرال‌گیری را به‌ردیف حالت ب) ازمسألهٔ ۹) انجام دهید. درحالت دوم، انتگرال

$$\int_۰^{\frac{b}{c}z}\left[\left(\frac{bz}{c}\right)^۲-y^۲\right]^{\frac{m+۱}{۲}}dy$$

منجر به انتگرال معلوم $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}cos^{m+۲}\theta d\theta$ می‌شود [۳۰۰، ۱)].

پاسخ: الف) $I_۱=\frac{\pi}{۴}\cdot\frac{abc^{m+۱}}{m+۳}$

ب)
$$I_۲=\begin{cases}\dfrac{a^{m+۱}bc}{m+۳}\cdot\dfrac{(m-۱)!!}{(m+۲)!!}\cdot\dfrac{\pi}{۲} & (m\text{ عددی زوج})\\ \dfrac{a^{m+۱}bc}{m+۳}\cdot\dfrac{(m-۱)!!}{(m+۲)!!} & (m\text{ عددی فرد})\end{cases}$$

۱۱) این انتگرال را محاسبه کنید:

$$H=\iiint_{\substack{x,\,y,\,z\geqslant ۰\\ x^۲+y^۲+z^۲\leqslant R^۲}}\frac{xyzdxdydz}{\sqrt{\alpha^۲x^۲+\beta^۲y^۲+\gamma^۲z^۲}}$$

حل. داریم:

$$H=\int_۰^R xdx\int_۰^{\sqrt{R^۲-x^۲}}ydy\int_۰^{\sqrt{R^۲-x^۲-y^۲}}\frac{zdz}{\sqrt{\alpha^۲x^۲+\beta^۲y^۲+\gamma^۲z^۲}};$$

$$\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \cdots dz = \frac{1}{\gamma^2}\Big[\sqrt{\gamma^2R^2+(\alpha^2-\gamma^2)x^2+(\beta^2-\gamma^2)y^2}-$$

$$-\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2}\Big];$$

$$\frac{1}{\gamma^2}\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}[\cdots]ydy=\frac{1}{3\beta^2(\beta^2-\gamma^2)}[\beta^2R^2+(\alpha^2-\beta^2)x^2]^{\frac{3}{2}}-$$

$$-\frac{1}{3\gamma^2(\beta^2-\gamma^2)}[\gamma^2R^2+(\alpha^2-\gamma^2)x^2]^{\frac{3}{2}}+\frac{a^3}{3\beta^2\gamma^2}x^3$$

و بالاخره، بعد از تبدیل‌های مقدماتی (والبته، کمی طولانی):

$$H=\frac{R^5}{15}\cdot\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}$$

۱۲) ثابت کنید، دستورهای مربوط به محاسبهٔ: الف) حجم لولهٔ استوانه‌ای محدود به سطح $z=z(x,y)$،

$$V=\iint_{(P)} z\,dx\,dy$$

و ب) حجم جسم با مقطع عرضی:

$$V=\int_{a}^{b} Q(x)\,dx$$

نتیجه‌هایی از دستور اساسی زیر هستند:

$$V=\iiint_{(V)} dV=\iiint_{(V)} dx\,dy\,dz$$

راهنمائی. دستورهای (*۱۱) و (*۸) را درمورد انتگرال اخیر به‌کار ببرید*.

---

*) مثال‌های بعدی را درمورد انتگرال‌های سه‌گانه، می‌توانید در شمارهٔ **۶۷۵** پیدا کنید. در آن‌جا، می‌توانید در انتگرال‌های چندگانهٔ مرتبهٔ n، با فرض $n=3$ به انتگرال سه‌گانه برسید.

۶۴۹. کاربردهای مکانیکی. طبیعی است که هرجا، یك کمیت هندسی یا مکانیکی، بستگی به‌توزیع جرم در محدودهٔ جسمی مثل (V) ازفضا داشته باشد، معمولا این کمیت به کمك انتگرال سه‌گانه نسبت به‌جسم (V) بیان می‌شود. دراین‌جا هم، ساده‌تر ازهمه‌آن است که‌از نظام «جمع عنصرهای بی‌نهایت کوچك» استفاده کنیم [با **۳۴۸** تا **۳۵۶** و **۵۹۸** مقایسه کنید].

اگرچگالی توزیع جرم را در نقطهٔ دلخواه جسم (V)، با ρ نشان دهیم، تابعی از مختصات نقطه می‌شود: این تابع را همیشه، پیوسته فرض می‌کنیم. با جمع کردن عنصرهای جرم $dm=\rho dV=\rho dx\,dy\,dz$، برای مقدار تمامی جرم، خواهیم داشت:

$$m=\iiint\limits_{(V)}\rho dV=\iiint\limits_{(V)}\rho dx\,dy\,dz \qquad (۱۲)$$

[با **۶۴۲** مقایسه کنید.]

با آغاز از گشت‌آورهای ستاتیك جزئی

$$dM_{yz}=x\,dm=x\rho dV,\quad dM_{zx}=y\,dm=y\rho dV,$$

$$dM_{xy}=z\,dm=z\rho dV$$

خود گشت‌آورهای ستاتیك را پیدا می‌کنیم:

$$M_{yz}=\iiint\limits_{(V)}x\rho dV,\quad M_{zx}=\iiint\limits_{(V)}y\rho dV,\quad M_{xy}=\iiint\limits_{(V)}z\rho dV \qquad (۱۳)$$

و به‌کمك آن‌ها، مختصات مرکز ثقل را

$$\xi=\frac{\iiint\limits_{(V)}x\rho dV}{m},\quad \eta=\frac{\iiint\limits_{(V)}y\rho dV}{m},\quad \zeta=\frac{\iiint\limits_{(V)}z\rho dV}{m} \qquad (۱۴)$$

درحالت جسم همگن، $\rho=\text{const}$، این رابطه‌ها، ساده‌تر می‌شوند:

$$\xi=\frac{\iiint\limits_{(V)}x dV}{V},\quad \eta=\frac{\iiint\limits_{(V)}y dV}{V},\quad \zeta=\frac{\iiint\limits_{(V)}z dV}{V}$$

ودستورهای مربوط به‌گشت‌آور ماند، به‌خودی خود، به‌دست می‌آیند:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \iiint_{(V)} (y^2+z^2)\rho dV, \quad I_y = \iiint_{(V)} (z^2+x^2)\rho dV, \\ I_z &= \iiint_{(V)} (x^2+y^2)\rho dV \end{aligned}\right\} \qquad (۱۵)$$

ویا نسبت به صفحه‌های مختصاتی:

$$I_{zy} = \iiint_{(V)} x^2\rho dV, \quad I_{xz} = \iiint_{(V)} y^2\rho dV, \quad I_{xy} = \iiint_{(V)} z^2\rho dV \qquad (۱۶)$$

بالاخره، فرض کنید، جرمی که جسم (V) را پر کرده است، بر نقطهٔ $A(\xi, \eta, \zeta)$ (به جرم‌واحد)، طبق قانون نیوتون، اثر جاذبه‌ای داشته باشد. تصویرهای نیروی جاذبهٔ جزء $dm = \rho dV$، بر محورهای مختصات، چنین‌اند*:

$$dF_x = \frac{x-\xi}{r^3}\rho dV, \quad dF_y = \frac{y-\eta}{r^3}\rho dV, \quad dF_z = \frac{z-\zeta}{r^3}\rho dV$$

که در آن $r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$، عبارت است ازفاصلهٔ جزء (یا نقطه‌ای که جرم را متمرکز در آن به‌حساب می‌آوریم) تا نقطهٔ A. با جمع کردن، برای تصویرهای تمامی نیروی جاذبهٔ $\overrightarrow{F}$، بر محورهای مختصات، به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \iiint_{(V)} \frac{x-\xi}{r^3}\rho dV, \quad F_y = \iiint_{(V)} \frac{y-\eta}{r^3}\rho dV, \\ F_z &= \iiint_{(V)} \frac{z-\zeta}{r^3}\rho dV \end{aligned}\right\} \qquad (۱۷)$$

به‌همین ترتیب، پتانسیل جسم بر نقطه هم، به‌دست می‌آید:

$$W = \iiint_{(V)} \frac{\rho dV}{r} \qquad (۱۸)$$

وقتی، نقطهٔ A در بیرون جسم باشد، همهٔ این انتگرال‌ها، انتگرال‌های ویژه هستند. دراین حالت، می‌توان مشتق‌انتگرال W را، نسبت به هرکدام از متغیرهای ξ ،η ،ζ، شبیه

---

*) پاورقی مربوط به شمارهٔ ۶۳۲ را ببینید.

مورد انتگرال‌های ساده [۵۰۷]، به‌دست‌آورد. در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial W}{\partial \xi}=F_x,\quad \frac{\partial W}{\partial \eta}=F_y,\quad \frac{\partial W}{\partial \zeta}=F_z \qquad (۱۹)$$

درحالتی‌که، نقطهٔ A، متعلق به جسم (V) باشد، مقدار r دراین نقطه برابرصفر می‌شود و تابع زیر انتگرال، در (۱۷) و (۱۸)، در نزدیکی این نقطه، محدودبودن خود را از دست می‌دهد. در شمارهٔ **۶۶۳** روشن خواهیم‌کرد که، این انتگرال‌ها هم، به عنوان انتگرال‌های ناویژه، وجود دارند و دستورهای اصلی (۱۹) را دربارهٔ آن‌ها می‌توان به‌کار برد.

۶۵۰. مثال‌ها. ۱) در **۵۹۸**، برای گشت‌آورهای ستاتیك لولهٔ استوانه‌ای همگن $(\rho=۱)$، این دستورها را داشتیم:

$$M_{yz}=\int\limits_{(P)}\int zx\,dx\,dy,\quad M_{zx}=\int\limits_{(P)}\int zy\,dx\,dy,\quad M_{xy}=\frac{۱}{۲}\int\limits_{(P)}\int z^{۲}\,dx\,dy$$

آن‌ها را، از دستورهای کلی (۱۳) شمارهٔ پیش، به‌دست آورید.

به عنوان نمونه داریم:

$$M_{xy}=\int\limits_{(V)}\int\int z\,dV=\int\limits_{(P)}\int dx\,dy\int_{۰}^{z(x,y)} z\,dz;$$

ولی

$$\int_{۰}^{z(x,y)} z\,dz=\frac{۱}{۲}z^{۲}\Big|_{z=۰}^{z=z(x,y)}$$

که ما را به‌نتیجهٔ مطلوب می‌رساند.

در **۵۹۸**، به‌جای محاسبهٔ انتگرال اخیر، از برخی ملاحظه‌های مکانیکی استفاده کردیم (در رابطه با گشت‌آور ستاتیك ستون جزئی).

۲) به‌همین ترتیب، با این فرض‌که مساحت‌مقطع عرضی جسم (V)، به موازات‌یك صفحه، به‌صورت تابعی از فاصلهٔ x مقطع تا این صفحه داده شده باشد: $P(x)$، در **۳۵۶**، ۱) برای گشت‌آور ستاتیك، این دستور را نتیجه گرفتیم:

$$M=\int_{a}^{b} xP(x)\,dx$$

که‌آن را هم، می‌توان ازدستور کلی به دست‌آورد.

درواقع، بنابر دستور (*۸) داریم:

$$M=\iiint_{(V)} xdV=\int_a^b xdx\iint_{P(x)} dydz$$

ولی، انتگرال درونی، معرف مساحت مقطع است که، از پیش داده شده است.

یادداشت. این مثال‌ها، توجه ما را به‌این واقعیت جلب می‌کنند که، برخی از کمیت‌های مکانیکی مربوط به توزیع فضائی جرم را می‌توان با انتگرال‌های دوگانه وحتی ساده بیان کرد. این تنزل چندگانگی انتگرال‌ها، ناشی از آن است که، در حالت‌های ساده، انتگرال درونی ساده، دوگانه، با توجه به برخی ویژگی‌های هندسی یا مکانیکی، ازقبل معلوم است ونیازی به محاسبهٔ آن‌ها نیست.

۳) در مسأله‌های ۲)، ۴) و ۱۰) ازشمارهٔ ۶۴۸، موضع مرکز ثقل جسم‌های مورد بررسی را پیدا کنید.

۴) جسمی با سهموی $x^2+y^2=2az$ وکرهٔ $x^2+y^2+z^2=3a^2$ محدود شده است. مرکز ثقل آن را پیدا کنید.

حل. گشت‌آور ستاتیك نسبت به‌صفحهٔ xy را، با توجه به‌دستوری که در ۲) دیدیم، راحت‌تر می‌توان محاسبه کرد، به‌شرطی که، در آن، x و z را با هم عوض کنیم. مساحت $R(z)$ مقطع عرضی، برای z از ۰ تا a برابر $\pi\cdot 2az^2$، وبرای z از a تا $a\sqrt{3}$ برابر $\pi(3a^2-z^2)$ می‌باشد. به‌این ترتیب

$$M_{xy}=2\pi a\int_0^a z^2dz+\pi\int_a^{a\sqrt{3}}(3a^2-z^2)dz=\frac{5}{3}\pi a^4$$

چون حجم جسم را می‌دانیم: $V=\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5)$ [(۶، ۳۴۳)]، بنابراین

$$\zeta=\frac{5}{83}(6\sqrt{3}+5)$$

وباتوجه به ملاحظه‌های تقارنی: $\xi=\eta=0$.

۵) مطلوب است جرم و موضع مرکز ثقل کرهٔ

$$x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$$

به شرطی که چگالی نقطه‌های کره، با فاصلهٔ این نقطه‌ها از مبداء مختصات، نسبت معکوس داشته باشد:

$$\rho=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

حل. باتوجه به دستور (۱۲) ازشمارهٔ ۶۴۸، مقدار جرم

$$m=k\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2az}\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

اگر انتگرال سه‌گانه را، شبیه (*۸) تبدیل کنیم، می‌توان آن را به‌صورت یك انتگرال‌ساده ازیك انتگرال دوگانه نشان داد:

$$m=k\int_0^{2a}dz\iint\limits_{(R_z)}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

که در آن، (R_z)، دایره‌ای است بـه شعاع $\sqrt{2az-z^2}$. اگر به مختصات قطبی برویم، انتگرال درونی، به سادگی محاسبه می‌شود:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2az-z^2}}\frac{rdrd\theta}{\sqrt{r^2+z^2}}=2\pi\left(\sqrt{2az}-z\right)$$

و ازآن‌جا

$$m=\frac{4}{3}\pi ka^2$$

به همین ترتیب، می‌توان گشتآور ستاتیك را هم محاسبه کرد:

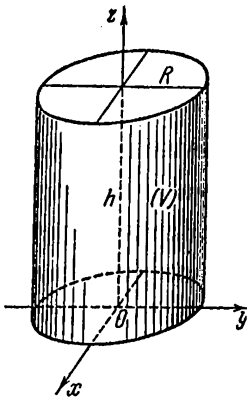
$$M_{xy}=k\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2az}\frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{16}{15}\pi ka^3$$

بنابراین $\zeta=\frac{4}{5}a$. و روشن است که دومختص دیگر مرکز ثقل، برابر ۰ است.

۶) اگرهمان مسأله را، با قانون دیگری ازتوزیع جرم در نظر بگیریم:

$$\rho=\frac{k}{x^2+y^2+z^2}$$

به‌این نتیجه‌ها می‌رسیم:



شکل ۱۰۵

$$m=2\pi ka;\quad M_{xy}=\pi ka^2;\quad \zeta=\frac{a}{2}$$

در مسأله‌های بعدی، چگالی ρ توزیع جرم را، ثابت گرفته‌ایم.

۷) مطلوب است نیروی جاذبهٔ مرکز قاعدهٔ استوانه از همهٔ جرم استوانه (شکل ۱۰۵).

با توجه به نام‌گذاری‌های شکل داریم [با ۶۴۸، (۱۷) مقایسه کنید]:

$$F_z=\iiint\limits_{(V)}\frac{\rho z\,dV}{r^3}=$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}dx\,dy\int_0^h\frac{\rho z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=$$

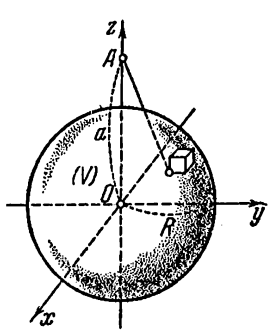
$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\rho\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}\right)dx\,dy=$$

$$=2\pi\rho(R+h-\sqrt{R^2+h^2})$$

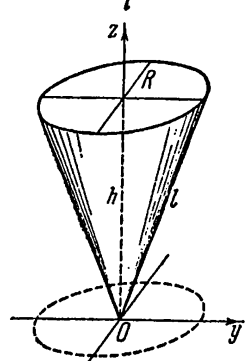
دو مؤلفهٔ دیگر جاذبه برابر صفرند، یعنی جاذبه در امتداد خط قائم و به‌طرف بالاست.

۸) جاذبهٔ رأس مخروط به‌وسیلهٔ خود مخروط را پیدا کنید (شکل ۱۰۶).

پاسخ. $F=F_z=\dfrac{2\pi h\rho}{l}(l-h)$.



شکل ۱۰۷



شکل ۱۰۶

۹) جاذبه‌ای را پیدا کنید که از طرف کره، به نقطهٔ دلخواه A (به جرم واحد) اثر می‌کند (شکل ۱۰۷).

حل. شعاع کره را R و فاصلهٔ OA را a می‌نامیم. محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که جهت مثبت محور z، از نقطهٔ A بگذرد. داریم:

$$F_z=\iiint_{(V)}\frac{\rho(z-a)}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}dxdydz=$$

$$=\rho\cdot\int_{-R}^{R}(z-a)dz\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2}\frac{dxdy}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

انتگرال درونی را، به سادگی و با عبور به‌مختصات قطبی‌می‌توان محاسبه کرد. این‌انتگرال برابر است با

$$2\pi\left(\frac{1}{|z-a|}-\frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right)$$

سپس

$$F_z=2\pi\rho\int_{-R}^{R}\left[\frac{z-a}{|z-a|}-\frac{z-a}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right]dz$$

ولی

$$\int_{-R}^{R}\frac{z-a}{|z-a|}dz=\int_{-R}^{R}\operatorname{sign}(z-a)dz=\begin{cases}-2R & (a\geqslant R)\\ -2a & (a\leqslant R)\end{cases}$$

با تبدیل $t=\sqrt{R^2-2az+a^2}$، انتگرال دوم هم، به دست می‌آید:

$$\int_{-R}^{R}\frac{z-a}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}dz=\begin{cases}\frac{2R^3}{3a^2}-2R & (a\geqslant R)\\ -\frac{4}{3}a & (a\leqslant R)\end{cases}$$

وسرانجام به دست می‌آید:

$$F_z=\begin{cases}-\frac{4\pi}{3}R^3\rho\cdot\frac{1}{a^2} & (a\geqslant R)\\ -\frac{4}{3}\pi a\rho & (a\leqslant R)\end{cases}$$

درعین‌حال، روشن است که $F_x=F_y=0$. بنابراین، در هرحالتی، جهت جاذبه به‌طرف

مرکز است.

درضمن، وقتی نقطه دربیرون کره باشد ($a \geqslant R$)، جاذبه‌ای که ازطرف کره اعمال می‌شود، مثل حالتی است که تمامی جرم کره ($m = \frac{۴}{۳}\pi R^۳\rho$) درمرکز آن متمرکز شده باشد. ازطرف دیگر، از آن‌جاکه، برای نقطهٔ واقع در درون کره ($a < R$)، مقدار جاذبه، به R بستگی ندارد (و با مقدار جاذبه برای حالت $R = a$ برابر است)، بنابراین روشن است که، قشر بیرونی کره، هیچ‌اثری برنقطهٔ درونی ندارد.

۱۰) مطلوب است محاسبهٔ پتانسیل استوانه، برمرکز قاعدهٔ آن.

راهنمائی. ساده‌تر این است که انتگرال‌گیری را نسبت به x و y آغاز کنیم و، در ضمن، انتگرال دوگانه را، بااستفاده از مختصات قطبی محاسبه کنیم:

$$W = \int_{۰}^{h} \rho dz \iint_{x^۲+y^۲\leqslant R^۲} \frac{dxdy}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} = ۲\pi\rho \int_{۰}^{h} (\sqrt{R^۲+z^۲} - z)dz =$$

$$= \rho\pi R^۲ . \ln\frac{h+\sqrt{R^۲+h^۲}}{R} + \rho\pi h(\sqrt{R^۲+h^۲} - h)$$

۱۱) مطلوب است محاسبهٔ پتانسیل مخروط: الف) برراس آن؛ ب) برمرکز قاعدهٔ آن.

پاسخ: الف) $W = \pi h(l-h)\rho$؛

ب) $W = \frac{\pi R^۲h^۳}{l^۳}\rho \cdot \ln\frac{R(l+R)}{h(l-h)} + \frac{\pi R^۲h}{l^۲}\rho(R-h)$.

۱۲) پتانسیل کره را، برنقطهٔ دلخواه A پیدا کنید.

حل. باتوجه به نام‌گذاری‌های مسألهٔ ۹) داریم:

$$W = \rho \int_{-R}^{R} dz \iint_{x^۲+y^۲\leqslant R^۲-z^۲} \frac{dxdy}{\sqrt{R^۲+y^۲+(z-a)^۲}} =$$

$$= ۲\pi\rho \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^۲-۲az+a^۲} - |z-a|)dz$$

وبرای حالت‌های مختلف a نسبت به R داریم:

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^۲-۲az+a^۲}dz = \frac{۱}{۳a}[(R+a)^۳ - |R-a|^۳] =$$

$$= \begin{cases} \frac{۲}{۳}R^۳.\frac{۱}{a}+۲Ra & (a \geqslant R) \\ \frac{۲}{۳}a^۲+۲R^۲ & (a \leqslant R) \end{cases}$$

$$\int_{-R}^{R}|z-a|dz = \begin{cases} ۲Ra & (a \geqslant R) \\ a^۲+R^۲ & (a \leqslant R) \end{cases}$$

و بنا بر این

$$W = \begin{cases} \frac{۴}{۳}\pi R^۳\rho.\frac{۱}{a} & (a \geqslant R) \\ (۲\pi R^۲-\frac{۲}{۳}\pi a^۲)\rho & (a \leqslant R) \end{cases}$$

می‌بینیم که: پتانسیل هر نقطهٔ واقع در بیرون کره، چنان است که، اگر همهٔ جرم کره در مرکز آن متمرکز شده باشد.

از دستور دوم هم، به‌این نتیجه می‌رسیم: اگر یك لایهٔ کروی را با شعاع درونی $R_۱$ و شعاع بیرونی $R_۲$ در نظر بگیریم، آن وقت، پتانسیل آن بر نقطهٔ واقع در درون $(a<R_۱)$؛ به‌صورت تفاضل زیر درمی‌آید:

$$W = W_۲-W_۱ = (۲\pi R_۲^۲-\frac{۲}{۳}\pi a^۲)\rho-(۲\pi R_۱^۲-\frac{۲}{۳}\pi a^۲)\rho =$$

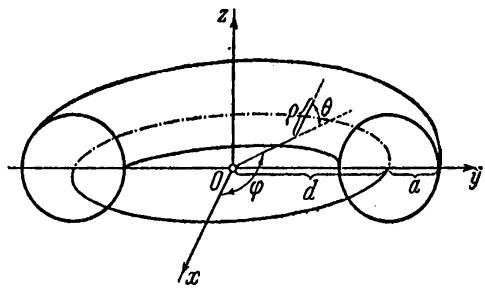
$$= ۲\pi(R_۲^۲-R_۱^۲)\rho$$

و بستگی به a ندارد. پتانسیل کرهٔ میان تهی، در محدودهٔ حفرهٔ درونی آن، مقدار ثابتی است.

۱۳) با توجه به نام‌گذاری‌های شکل ۱۰۸، گشت‌آور مساند چنبره را پیدا کنید: I_z و I_x [۶۴۸، (۱۵) را ببینید].

راهنمائی. داریم:

$$I_z = ۲\rho\int_{۰}^{a}dz\iint\limits_{R_۱^۲\leqslant x^۲+y^۲\leqslant R_۲^۲}(x^۲+y^۲)dxdy;$$



شکل ۱۰۸

$$I_x = 2\rho \int_0^a dz \iint\limits_{R_1^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant R_2^2} (y^2+z^2)\,dx\,dy$$

که در آن، $R_1 = d - \sqrt{a^2-z^2}$ و $R_2 = d + \sqrt{a^2-z^2}$. انتگرال‌های دوگانه، با عبور به مختصات قطبی محاسبه می‌شوند.

پاسخ: $I_z = \frac{\pi^2}{2} a^2 d(4d^2+3a^2)\rho$ و $I_x = \frac{\pi^2}{4} a^2 d(4d^2+5a^2)\rho$.

۱۴) جسم (V) با سرعت زاویه‌ای ω، دور محور z دوران می‌کند. دراین‌صورت، برای جزء $dm = \rho dV$، که از محور دوران به فاصلهٔ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ واقع است، سرعت خطی $v = r\omega$ به دست می‌آید و، در نتیجه، انرژی جنبشی (سینتیک) آن چنین می‌شود:

$$dT = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \rho dV$$

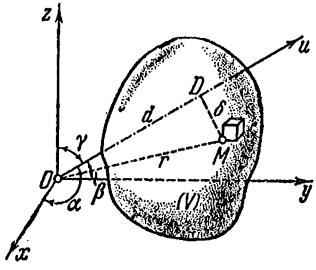
وازاین‌جا، انرژی جنبشی T، همهٔ جسم دوار، به‌سادگی به دست می‌آید:

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \iiint\limits_{(V)} r^2 \rho dV = \frac{1}{2}\omega^2 \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\rho dV$$

انتگرال اخیر، چیزی جز گشتاور ماند I_z این جسم، نسبت به محور دوران نیست. [۶۴۸، (۱۵)]. به‌این ترتیب

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

۱۵) اکنون به مسألهٔ محاسبهٔ گشت‌آور ماند جسم مفروض (V)، نسبت به‌محور u (شکل ۱۰۹) می‌پردازیم، به شرطی‌که محور u، با محورهای مختصات، به ترتیب، زاویه‌های α، β و γ را بسازد.



شکل ۱۰۹

برای فاصلهٔ $MD=\delta$، نقطهٔ دلخواه $M(x, y, z)$ جسم ازمحور، داریم: $\delta=r^2-d^2$. ازهندسهٔ تحلیلی، می‌دانیم:

$$r^2=x^2+y^2+z^2, \quad d=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma^*$$

چون $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$، بنابراین

$$\delta^2=x^2(\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+y^2(\cos^2\gamma+\cos^2\alpha)+z^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)-$$
$$-2yz\cos\beta\cos\gamma-2zx\cos\gamma\cos\alpha-2xy\cos\alpha\cos\beta$$

اکنون، روشن است که

$$I_u=\iiint_{(V)}\delta^2\rho dV=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-$$
$$-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma-2K_{zx}\cos\gamma\cos\alpha-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta;$$

که در آن، داریم:

$$K_{yz}=\iiint_{(V)}yz\rho dV, \quad K_{zx}=\iiint_{(V)}zx\rho dV, \quad K_{xy}=\iiint_{(V)}xy\rho dV$$

انتگرال‌های اخیر، حاصل ضرب ماندها یا گشت‌آورهای گریز از مرکز نامیده می‌شوند [با ۵۹۹، ۵) مقایسه کنید].

اگر بخواهیم، توزیع گشت‌آورهای ماند جسم را، نسبت به محورهای مختلفی که از مبداء می‌گذرند، به‌طور عینی، نشان دهیم، باید شبیه‌آن چه درمورد شکل‌های مسطحه عمل کرده‌ایم، پاره خط

---

*) رابطهٔ اخیر، این واقعیت را بیان می‌کند که نقطهٔ M، برصفحه‌ای قرار دارد که از عمود برمحور می‌گذرد و به فاصلهٔ d ازمبداء واقع است.

$$ON=\frac{1}{\sqrt{I_u}}$$

را برمحور u جداکنیم. فرض کنید:

$$X=ON\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{I_u}},\quad Y=\frac{\cos\beta}{\sqrt{I_u}},\quad Z=\frac{\cos\gamma}{\sqrt{I_u}}$$

مختصات نقطهٔ N، انتهای این پاره خط، باشند. آن‌وقت، به‌کمك رابطه‌ای که برای I_u پیداکردیم، می‌توان مکان هندسی نقطهٔ N را به دست‌آورد:

$$I_xX^2+I_yY^2+I_zZ^2-2K_{yz}YZ-2K_{zx}ZX-2K_{xy}XY=1$$

ازآن‌جاکه ON نمی‌تواند بی‌نهایت بشود، بنابراین، این سطح درجـه دوم، حتماً بیضوی است و آن را بیضوی ماند گویند. محورهای بیضوی ماند، که محورهای اصلی ماند نامیده می‌شوند، در بررسی حرکت جسم صلب، نقش مهمی به عهده دارند. اگر O را مرکز ثقل (گرانیگاه) جسم بگیریم، آن وقت، محورهای ماند متناظر با آن، محورهای مرکزی اصلی ماند نامیده می‌شوند.

این‌که، کدام محور مختصات، محور اصلی ماند می‌شود، بستگـی به گشت‌آورهای گریز از مرکز دارد. مثلا، برای آن‌که، محور x، محور اصلی مانـد باشد، لازم و کافی است‌که داشته باشیم:

$$K_{xy}=0\quad و\quad K_{zx}=0$$

و، به خصوص، این شرطها، وقتی برقرارند که جرم، به طور متقارن نسبت به صفحهٔ yz قرار گرفته باشد.

۱۶) درپایان به مسألهٔ مربوط به‌نیروی گریز از مرکزی می‌پردازیم‌که ضمن‌دوران جسم صلب، دور محور، به‌دست‌آمده باشد.

اگرجسم (V)، با سرعت زاویه‌ای ω، دور z دوران‌کند، نیروی گریز ازمرکزی‌که برحجم جزئی $dm=\rho dV$ عمل می‌کند، چنین است:

$$dF=\omega^2rdm=\omega^2r\rho dV$$

که درآن، r عبارت است از فاصلهٔ جزء، تا محور دوران. تصویرهای آن، بر محورهای مختصات، چنین‌اند:

$$dF_x=\omega^2x\rho dv,\quad dF_y=\omega^2y\rho dV,\quad dF_z=0$$

به نحوی که، تصویرهای نیروی گریز از مرکز حاصل، یعنی $\overrightarrow{F}$، با این انتگرال‌ها بیان می‌شوند:

$$F_x=\omega^2\iiint_{(V)} x\rho dV=\omega^2 M_{yz},\quad F_y=\omega^2 M_{zx},\quad F_z=0$$

که در آن‌ها، M_{yz} و M_{zx}، گشت‌آورهای ستاتیك جسم‌اند. اگر مختصات مرکز ثقل جسم را (ξ,η,ζ) بنامیم، دستورهای اخیر را می‌توان این‌طور نوشت:

$$F_x=\omega^2\xi m,\quad F_y=\omega^2\eta m,\quad F_z=0$$

از این‌جا دیده می‌شود که: نیروی گریز از مرکز $\overrightarrow{F}$، دقیقاً همان طور است که، اگر تمامی جرم جسم در مرکز ثقل آن متمرکز می‌شد.

نیروی گریز از مرکز جزئی، که دربارهٔ آن صحبت کردیم، نسبت به محورهای مختصات، این گشت‌آورهای جزئی را دارد:

$$d\mathbf{M}_x=zdF_y=\omega^2 yz\rho dV,\quad d\mathbf{M}_y=zdF_x=\omega^2 zx\rho dV,\quad d\mathbf{M}_z=0$$

بنابراین، گشت‌آورهای نتیجه، نسبت به‌این محورها، چنین‌اند:

$$\mathbf{M}_x=\omega^2\iiint_{(V)} yz\rho dV=\omega^2 K_{yz},\quad \mathbf{M}_y=\omega^2 K_{zx},\quad \mathbf{M}_z=0$$

برای آن‌که نیروهای گریز ازمرکز یکدیگررا به‌حالت تعادل درآورند وهیچ کنشی برمحور (وتوسط آن، بر یاتاقانی که در آن محکم شده است) نداشته باشند، لازم و کافی است داشته باشیم:

$$M_{yz}=0,\quad M_{zx}=0,\quad K_{yz}=0,\quad K_{zx}=0$$

دو رابطهٔ اول به‌این معناست که باید، مرکز ثقل جسم برمحور z قرار گیرد (مثلا در مبداء). دو رابطهٔ آخرهم، نشان می‌دهند که، محور z، باید یکی از محورهای اصلی ماند باشد. بنابراین، تنها با این شرط که محور دوران بر یکی‌از محورهای اصلی مرکزی ماند منطبق باشد، نیروی گریز از مرکز، هیچ فشاری بریاتاقان وارد نمی‌کند.

§۲. دستور گوس ـ استروگرادسکی

۶۵۱. دستور استروگرادسکی. در نظریهٔ انتگرال‌های دوگانه، با دستور گرین

آشنا شدیم که، انتگرال دوگانهٔ نسبت به حوزهٔ مسطح را، با انتگرال نسبت به منحنی دورهٔ حوزه، ارتباط می‌داد. شبیه آن، در نظریهٔ انتگرال‌های سه‌گانه، دستور استروگرادسکی است که، انتگرال سه‌گانهٔ فضایی را، با انتگرال نسبت به سطح، نسبت به سطح محصور‌کنندهٔ حوزه، ارتباط می‌دهد.

جسم V را در نظر می‌گیریم (شکل ۹۶) که محدود به سطح‌های قطعه به قطعه هموار

$$\begin{matrix}(S_1) & z=z_0(x,y)\\ (S_2) & z=Z(x,y)\end{matrix}\quad (z_0\leqslant Z)$$

و سطح استوانه‌ای (S_3)، با مولدهای موازی محور z باشد. در این‌جا، هادی عبارت‌است از منحنی بسته و قطعه به‌قطعه هموار (K) برصفحهٔ xy، که حوزهٔ (D)، تصویر جسم (V) براین صفحه را محصور می‌کند.

فرض می‌کنیم، تابع $R(x,y,z)$، که در خوزهٔ (V) تعریف شده است، همراه با مشتق خود $\frac{\partial R}{\partial z}$، در تمامی حوزهٔ (V) و روی مرز آن، پیوسته باشد. در این‌صورت، دستور زیر برقرار است:

$$\iiint_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint_{(S)}Rdxdy \qquad (۱)$$

درضمن، S، سطحی است که جسم را محدودکرده و انتگرال سمت راست، نسبت به رویهٔ بیرونی آن، در نظر گرفته شده است.

درواقع، بنابر دستور (*۱۱) شمارهٔ **۶۴۵** داریم:

$$\iiint_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint_{(D)}dxdy\int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz=$$

$$=\iint_{(D)}R(x,y,Z(x,y))dxdy-\iint_{(D)}R(x,y,z_0(x,y))dxdy$$

اگر انتگرال‌های روی سطح را واردکنیم، با توجه به دستورهای (۳) و (۳*) از شمارهٔ **۶۳۵**:

$$\iiint_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint_{(S_2)}R(x,y,z)dxdy+\iint_{(S_1)}R(x,y,z)dxdy$$

درضمن، در سمت راست، انتگرال اول نسبت به رویهٔ بالایی سطح (S_2) وانتگرال دوم، نسبت به رویهٔ پایینی سطح (S_1) در نظر گرفته شده است. برابری به هم نمی‌خورد، اگر انتگرال

$$\iint_{(S_3)} R(x, y, z)dxdy$$

را به سمت راست آن اضافه کنیم که نسبت به رویهٔ بیرونی سطح (S_3) درنظر گرفته شده است، زیرا این انتگرال برابر صفر است [۶۳۵، (۵)]. اگراین سه انتگرال روی سطح را، به یك انتگرال تبدیل کنیم، به همان دستور (۱) می‌رسیم که حالت خاصی از دستور استروگرادسکی است.

به احتمال زیاد، خواننده متوجه شباهتی که بین استدلال فوق، با استدلالی که در شمارهٔ ۶۳۸ برای به‌دست آوردن دستور (۱۴) درمورد حجم جسم (V) به‌کار بردیم، شده باشد؛ دستور اخیر را می‌توان به‌کمك دستور (۱)، بافرض $R(x, y, z) = z$ پیدا کرد.

خود به خود معلوم است که، دراین‌جا هم، مثل مورد قبل، دستور (۱) برای گروه وسیع‌تری ازجسم‌هایی‌درست است که قابل‌تجزیه به‌بخش‌هایی ازنوع مورد بررسی باشند. حتی می‌توان ثابت‌کرد که، دستور (۱)، برای هرجسمی که محدود به سطح دلخواه قطعه به‌قطعه هموار باشد، درست است.

استدلال، دراساس، همان است که درشمارهٔ ۶۳۸، باگسترش‌شرط‌های‌کاربردپذیری رابطه‌های حجم، مورد استفاده قرارگرفت. تنها یك یادداشت را اضافه می‌کنیم. اگرجسم مورد مطالعهٔ (V)، یك «لولهٔمنشوری» باشدکه، مثلا، ازسمت راست به‌سطح $x = g(y, z)$ محدود باشد، آن وقت، می‌توان استدلال مربوط به‌شمارهٔ ۶۳۸ را، تنها با فرض معین و پیوسته‌بودن R و $\frac{\partial R}{\partial z}$ درحوزه‌ای از سمت راست سطح مذکور، به‌این‌جا هم منتقل کرد (زیرا، سطح چندوجهی محاطی، ممکن است از محدودهٔ جسم مورد بررسی تجاوزکند)*.

شبیه دستور (۱)، این دستورها هم درست‌اند:

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \iint_{(S)} Pdydz, \qquad (۲)$$

---

*) درعمل، برای درستی دستور، این‌فرض اهمیت زیادی ندارد.

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_{(S)} Q dzdx \qquad (۳)$$

به شرطی که تابع‌های P و Q، همراه با مشتق‌های خود $\frac{\partial P}{\partial x}$ و $\frac{\partial Q}{\partial y}$، درحوزهٔ (V)، پیوسته باشند.

اگر سه رابطهٔ (۱)، (۲) و (۳) را با هم جمع کنیم، به دستور استروگرادسکی می‌رسیم:

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$= \iint_{(S)} P dydz + Q dzdx + R dxdy \qquad (۴)$$

این دستور، معرف صورت کلی انتگرال روی سطح نوع دوم، نسبت به‌رویهٔ بیرونی سطح بسته است، که برحسب انتگرال سه‌گانه، نسبت به جسمی که محدود به‌این سطح است، داده شده است.

اگر انتگرال‌های سطحی نوع اول را به خدمت بگیریم، دستور دیگری به دست می‌آید که کاربرد زیادی دارد و دستور استروگرادسکی را به خاطر می‌آورد:

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_{(S)} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu) dS \qquad (۵)$$

که در آن، λ و μ و ν، عبارتند از زاویه‌هایی که قائم بیرونی برسطح (S) بامحورهای مختصات می‌سازد.

یادداشت. دستورهای گرین، ستوکس‌واستروگرادسکی، یك اندیشه را بیان می‌کنند: آن‌ها، انتگرال نسبت به‌شکل هندسی را، برحسب انتگرال نسبت به مرز این شکل، بیان می‌دارند. دستور گرین، به حالت فضای دوبعدی، دستور ستوکس هم به حالت فضای دوبعدی، ولی فضای «خمیده»؛ و دستور استروگرادسکی به حالت فضای سه بعدی مربوط می‌شوند.

درضمن، دستور محاسبهٔ انتگرالی

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

را، می‌توان، حالتی ازهمین دستورها، منتهی درفضای یك بعدی دانست.

۶۵۲. کاربرد دستور استروگرادسکی دربررسی انتگرال‌های روی سطح. فرض کنید، درحوزهٔ باز (T) ازفضای سه‌بعدی، تابع‌های پیوستهٔ P، Q و R داده شده‌باشند. باانتخاب هرسطح بستهٔ (S) واقع دراین حوزه، که جسمی‌را محصورمی‌کند، این انتگرال روی سطح را درنظر می‌گیریم:

$$\iint\limits_{(S)} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy =$$

$$=\iint\limits_{(S)}(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)\,dS \qquad (۶)$$

تابع‌های P و Q و R با چه شرط‌هایی سازگار باشند، تا انتگرال (۶)، همیشه برابر صفر شود؟

این مسأله، شبیه مسأله‌ای است که قبلا، دربارهٔ صفرشدن انتگرال منحنی‌الخط‌نسبت به‌یك دورهٔ بسته داشتیم [۶۰۱، ۶۴۱]، که به سادگی و به‌کمك دستور گرین یا ستوکس محل می‌شد. در این‌جا هم، به دستور استروگرادسکی متوسل می‌شویم، البته با این فرض که، مشتق‌های پیوسته‌ای از تابع‌های P و Q و R، که در این دستور آمده‌اند، وجود داشته باشند.

باوجود این، برای آن که، حق تبدیل انتگرال (۶) را، با دستور استروگرادسکی داشته باشیم، باید درحال حاضر، بعضی محدودیت‌ها، در مورد حوزهٔ اصلی (T) قایل شویم. درواقع، وقتی‌که سطح بسته و سادهٔ (S)، متعلق به حوزهٔ (T)، جسم(V) را از بیرون محدود می‌کند، باید این جسم هم، به طور کامل دراین حوزه قرار گیرد. حوزه‌ای که دارای این ویژگی باشد، («از نظر فضایی»)، همبند ساده (یا مرتبط ساده) نامیده می‌شود [با ۶۴۱ مقایسه کنید]. ماهیت این‌نوع همبندی ساده، مربوط به فقدان «سوراخ» می‌شود، اگرچه، به شرطی که نقطه‌هایی ازجسم به بی‌نهایت کشیده نشده باشند، می‌توان خیلی‌ساده شرط کرد که مرز جسم را یك سطح بستهٔ منحصر به‌فرد تشکیل داده باشد [با ۶۵۹ مقایسه کنید]. به این مناسبت، مثلاً برای تمایز با آن چه دربارهٔ «سطح» همبند ساده در ۶۴۱ گفته شد، دراین‌جا، چنبره، یك‌جسم همبند ساده می‌شود، درحالی که، کرهٔ میان تهی، همبند ساده نیست.

دستور گرین ــ استروگرادسکی، بلافاصله، منجر به شرط مطلوب می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0 \qquad (B)$$

کافی بودن شرط روشن است و لازم بودن شرط، به سادگی و به کمك مشتق‌گیری از انتگرال سه‌گانه نسبت به حوزه ثابت می‌شود [۶۴۴، ۸°].

شبیه حالت مربوط به‌انتگرال‌های منحنی‌الخط، دراین‌جا هم، مسألهٔ مربوط به صفر-شدن انتگرال نسبت به سطح بسته، هم‌ارز است بامسألهٔ مربوط به مستقل بودن انتگرال نسبت به سطح بازی که بردورهٔ مفروض «کشیده شده» است، از شکل سطح. روی این مطالب متوقف نمی‌شویم.

در پایان، یادآوری می‌کنیم، اگرپیوستگی تابع‌های P و Q و R ومشتق‌های آن‌ها، دریك یا چند نقطه ازحوزهٔ (T) نقض شود، آن وقت ممکن‌است، باوجود برقراری برابری (B)، انتگرال (۶) مخالف صفرباشد. ولی در این حالت، به سادگی ثابت می‌شود که، انتگرال (۶)، برای همهٔ سطح‌های بستهٔ (S)، که نقطهٔ خاص معینی را دربرگرفته باشند، مقداری است ثابت [با **۵۶۲** مقایسه‌کنید].

همهٔ این‌ها را می‌توان روی نمونهٔ انتگرال گوس روشن‌کرد، که ما هم‌اکنون به‌آن می‌پردازیم.

۶۵۳. انتگرال گوس. انتگرال گوس، به انتگرال

$$G=\iint_{(S)}\frac{\cos(r,n)}{r^2}dS$$

گفته می‌شود، که درآن، r عبارت است ازشعاع حاملی که نقطهٔ ثابت $A(\xi,\eta,\zeta)$ را به نقطهٔ متغیر $M(x,y,z)$ از سطح وصل می‌کند:

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

و منظور از (r,n)، زاویهٔ بین این‌شعاع حامل وقائم برسطح درنقطهٔ M است. در ضمن، سطح (S)، دو رویه درنظر گرفته می‌شود، قائم n، متناظر رویهٔ معینی از آن است.

اگر کسینوس‌های هادی قائم را $\cos\lambda$، $\cos\mu$، $\cos\nu$ بگیریم، آن وقت

$$\cos(r,n)=\cos(x,r)\cos\lambda+\cos(y,r)\cos\mu+\cos(z,r)\cos\nu=$$

$$=\frac{x-\xi}{r}\cos\lambda+\frac{y-\eta}{r}\cos\mu+\frac{z-\zeta}{r}\cos\nu$$

بنابراین، انتگرال گوس، به‌این صورت در می‌آید:

$$G=\iint_{(S)}\left(\frac{x-\xi}{r^3}\cos\lambda+\frac{y-\eta}{r^3}\cos\mu+\frac{z-\zeta}{r^3}\cos\nu\right)dS=$$

$$=\iint_{(S)}\frac{x-\xi}{r^3}dydz+\frac{y-\eta}{r^3}dzdx+\frac{z-\zeta}{r^3}dxdy$$

از آن جا: $P=\frac{x-\xi}{r^3}$، $Q=\frac{y-\eta}{r^3}$، $R=\frac{z-\zeta}{r^3}$؛ به نحوی که

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(x-\xi)^2}{r^5},\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(y-\eta)^2}{r^5},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که، شرط (B)، در همهٔ فضا، به استثنای نقطهٔ $A(\xi,\eta,\zeta)$، که در آن‌جا، تابع‌های P و Q و R ناپیوسته‌اند، برقرار است. بنابراین، انتگرال گوس، نسبت به‌سطح بسته برابر صفر است، به شرطی که این‌سطح، نقطهٔ A را در بر نگرفته‌باشد. برای همهٔ سطح‌هایی هم که، این نقطه را در درون خودداشته باشند، انتگرال مقدار ثابتی دارد. مثلا، اگر این سطح را کره‌ای به شعاع R و به مرکز نقطهٔ A بگیریم، می‌توان این مقدار ثابت را محاسبه کرد. دراین‌جا، شعاع حامل نقطهٔ واقع بر کره، طول ثابتی دارد و جهت آن، با جهت قائم بیرونی بر کره، یکی است، به نحوی که $\cos(r,n)=1$. داریم:

$$G=\iint_{(S)}\frac{dS}{R^2}=\frac{S}{R^2}=4\pi$$

مقدار انتگرال گوس، برای همهٔ سطح‌هایی که نقطهٔ A را در برگرفته باشند، همین مقدار است.

همهٔ این نتیجه‌گیری‌ها را می‌توان مستقیماً هم به دست آورد. برای این منظور، کافی است مفهوم هندسی انتگرال گوس را، به عنوان اندازهٔ زاویه مجسمه‌ای*، که تحت آن سطح (S) از نقطهٔ A دیده می‌شود، درنظر بگیریم.

برای اثبات، ابتدا فرض می‌کنیم که، سطح (S)، با هر نیم‌خطی که از نقطهٔ A آغاز

---

*) زاویهٔ مجسمه، به بخشی از فضا گفته می‌شود که به یک سطح مخروطی، محدود شده باشد؛ رأس مخروط، رأس زاویهٔ مجسمه است. اگر کره‌ای به مرکز رأس مخروط و شعاع واحد درنظر بگیریم، سطح مخروطی شکلی را از آن جدا می‌کند که مساحت آن، اندازهٔ زاویهٔ مجسمه است.

شده باشد، بیش‌از یك نقطهٔ برخورد نداشته باشد. قائم n را در جهتی می‌گیریم که مقابل نقطهٔ A باشد. با اختیار جزء (dS) روی (S)، نقطهٔ M را بر آن انتخاب می‌کنیم و از این نقطه، کره‌ای می‌گذرانیم که مرکز آن، در نقطهٔ A باشد. اگر جزء (dS) را از A بر این کره تصویر کنیم، مساحت تصویر، برابر است با*

$$\cos(r, n)dS$$

به‌نحوی که، مساحت شکلی که روی کرهٔ به‌شعاع واحد به‌وسیلهٔ نیم‌خط‌های به‌مبداء A جدا می‌شود، چنین خواهد شد:

$$\frac{\cos(r, n)}{r^2}dS$$

و این، همان زاویهٔ (مجسمهٔ) رویت جزء (dS) است. درنتیجه، اندازهٔ زاویهٔ رویت تمامی سطح (S)، عبارت است از مجموع این زاویه‌های جزئی، یعنی انتگرال G.

اگر سطح S، با نیم خط‌هایی که از A آغاز می‌شوند، در بیش از یك نقطه برخورد داشته باشد، می‌توان سطح (S) را، به بخش‌هایی تقسیم کرد که، هرکدام از آن‌ها، با این نیم خط‌ها، تنها یك نقطهٔ برخورد داشته باشند؛ آن وقت، باید انتگرال‌های گوس مربوط به این بخش‌ها را باهم جمع کرد.

معمولا رویهٔ معینی از سطح را انتخاب می‌کنند و جهت قائم‌های n را، مطابق با این انتخاب درنظر می‌گیرند. دراین صورت، برای بعضی از بخش‌های سطح، این قائم در جهت مقابل A قرار می‌گیرد و زاویهٔ رؤیت، مثبت به‌دست می‌آید؛ برای بخش‌های دیگری از سطح، که جهت قائم درهمان سمت A است، مقدار زاویهٔ رویت منفی می‌شود. انتگرال گوس، مجموع جبری این زاویه‌های رویت است.

از تعبیر هندسی انتگرال گوس، بلافاصله روشن می‌شود که، اگر سطح (S) بسته، و نقطهٔ A در درون حوزهٔ محدود به‌آن باشد، آن وقت $G = 4\pi$. برعکس، اگر نقطه در بیرون این حوزه باشد، آن وقت، زاویه‌های رویت، که علامت‌های مختلفی دارند، یکدیگر را حذف می‌کنند و به‌دست می‌آید: $G = 0$

اگر نقطهٔ A، برسطح (S) واقع باشد، انتگرال گوس، ناویژه می‌شود. به سادگی

---

*) در ضمن، هم جزء (dS) و هم تصویر آن را، به تقریب، مسطح به‌حساب آورده‌ایم و از رابطهٔ مربوط به‌تصویر قائم (و نه‌تصویر مرکزی) استفاده کرده‌ایم. خطای نسبی، که دراین‌جا برای جزء بی‌نهایت کوچك (dS) حاصل می‌شود، بی‌نهایت کوچك است.

می‌توان فهمید که، اگر سطح (S)، در نقطهٔ A، صفحهٔ مماس مشخصی داشته باشد، آن وقت $G=2\pi$.

۶۵۴. مثال‌ها. ۱) این انتگرال‌های روی سطح را، به‌کمک دستور استروگرادسکی، تبدیل کنید:

الف) $I_1=\iint\limits_{(S)} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy;$

ب) $I_2=\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}(\cos\lambda+\cos\mu+\cos\nu)dS;$

ج) $I_3=\iint\limits_{(S)} xdydz+ydzdx+zdxdy$

به شرطی که سطح (S)، جسم (V) را محصور کند.

پاسخ: الف) $I_1=2\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)dV$؛

ب) $I_2=\iiint\limits_{(V)}\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV$؛

ج) $I_3=3V$ [با ۶۳۸، (۱۶) مقایسه کنید].

۲) به‌کمک دستور استروگرادسکی ثابت کنید:

الف) $\iiint\limits_{(V)}\Delta u\,dxdydz=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial u}{\partial n}dS;$

ب) $\iiint\limits_{(V)} v\Delta u\,dxdydz=$

$$=-\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz+\iint\limits_{(S)} v\frac{\partial u}{\partial n}dS;$$

ج) $\iiint\limits_{(V)}(v\Delta u-u\Delta v)dxdydz=\iint\limits_{(S)}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS$

به شرطی که فرض کنیم:

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial x}cos(x, n)+\frac{\partial f}{\partial y}cos(y, n)+\frac{\partial f}{\partial z}cos(z, n)$$

ومنظور از n، قائم بیرونی برسطح است.

راهنمائی. حل این مسأله ومسأله‌های نزدیك بعدی، کاملاً شبیه حل مسأله‌های ۳)، ۴)، ۵)، ۶) و ۷) درشمارهٔ ۶۰۲ است.

۳) اگر تابع u، همراه بامشتق‌های خود، پیوسته و درحوزهٔ (V) بامعادلهٔ $\Delta u=0$ سازگار باشد، تابع همساز در این حوزه نامیده می‌شود. ثابت کنید، تابع همساز را می‌توان با شرط

$$\iint_{(S)}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$$

برای هر سطح بسته و سادهٔ (S)، که در حوزهٔ (V) واقع باشد، مشخص کرد.

۴) این حکم را ثابت کنید:

اگر تابع u، در حوزهٔ بستهٔ (V)، همساز باشد، مقدارهای آن را در درون حوزه، می‌توان به‌صورت یك ارزشی، به‌کمك مقدارهای روی سطح (S)، که بااین حوزه‌محدود شده است، معین کرد.

۵) u را تابعی‌همساز درحوزهٔ (V)، (x_0, y_0, z_0) را نقطه‌ای درونی ازاین‌حوزه، و (S_R) را، کره‌ای به شعاع R وبه مرکز نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) فرض‌می‌کنیم. ثابت کنید:

$$u(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{(S_R)}u(x, y, z)dS$$

راهنمائی. اثبات ۶) را درشمارهٔ ۶۰۲ ببینید؛ فقط دراین‌جا، به‌عنوان تابع‌همساز کمکی، $v=\frac{1}{r}$ را انتخاب کنید، که در آن

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

۶) ثابت کنید، تابع $u(x, y, z)$، که درحوزهٔ بستهٔ (V) پیوسته و در درون این‌حوزه همساز است، نمی‌تواند به مقدار حداکثر (حداقل) خود در درون حوزه برسد (تنها بااین شرط که مقدار ثابتی نباشد).

با استفاده از این حکم، نتیجه‌ای را که در ۴) به دست آورده‌ایم، شبیه ۶۰۲، ۷)، تقویت کنید.

۷) ثابت کنید، سطح بستهٔ صلب، که تحت فشار یکنواخت همه‌جانبه باشد، در حالت تعادل می‌ماند.

برای این منظور، ثابت می‌کنیم، بردار اصلی و گشتاور اصلی (نسبت به هر نقطهٔ دلخواه)، برای همهٔ دستگاه‌های نیروئی که نسبت به سطح به‌کار می‌روند، برابر صفرند.

جزء (dS) سطح را جدا می‌کنیم. اگر فشار، یعنی نیروی مؤثر بر واحد مساحت را با $p=\text{const}$. نشان دهیم، آن وقت، نیروی جزئی مؤثر بر (dS)، روی قائم به این جزء، دارای تصویرهای زیر برمحورها خواهد بود:

$$-p\cos\lambda dS,\quad -p\cos\mu dS,\quad -p\cos\nu dS \qquad (۷)$$

(علامت‌های منفی را به‌این مناسبت گذاشته‌ایم که، فشار درجهت درون سطح عمل می‌کند، درحالی که λ، μ و ν، زاویه‌هایی هستند که قائم بیرونی با محورهای مختصات تشکیل می‌دهند).

تصویرهای R_x، R_y، R_z از بردار اصلی، از مجموع تصویرهای (V) نیروهای جزئی به دست می‌آیند:

$$R_x=-p\iint_{(S)}\cos\lambda dS,\quad R_y=-p\iint_{(S)}\cos\mu dS,\quad R_z=-p\iint_{(S)}\cos\nu dS$$

ولی، همهٔ این انتگرال‌ها برابر صفرند. این نتیجه را می‌توان از دستور استروگرادسکی به دست آورد، به شرطی که در آن قرار دهیم:

$$P=۱,\ Q=R=۰;\quad Q=۱,\ P=R=۰;\quad R=۱,\ P=Q=۰$$

به‌این ترتیب، بردار اصلی فشار، برابر صفر است.

برای تعیین گشتاور اصلی دستگاه نیروهای جزئی، مثلا، نسبت به مبداء مختصات، مؤلفه‌های گشتاورهای این نیروهای جزئی نسبت به محورها را، باهم جمع می‌کنیم*.

---

*) به‌یاد بیاوریم که اگر نیروهای وارد برمحورها را X، Y و Z بگیریم، و آن‌ها را در نقطهٔ (x, y, z) به کار بریم، آن وقت تصویرهای گشتاور نیرو نسبت به نقطه (ξ, η, ζ)، بر محورها، چنین خواهند بود:

$$L_x=(y-\eta)Z-(z-\zeta)Y,\quad L_y=(z-\zeta)X-(x-\xi)Z,$$
$$L_z=(x-\xi)Y-(y-\eta)X$$

$$p(z\cos\mu - y\cos\nu)dS,\quad p(x\cos\nu - z\cos\lambda)dS,\quad p(y\cos\lambda - x\cos\mu)dS$$

به‌این ترتیب، تصویرهای گشت‌آور اصلی فشار، نسبت به مبداء چنین‌اند:

$$L_x = p\iint_{(S)}(z\cos\mu - y\cos\nu)dS,\quad L_y = p\iint_{(S)}(x\cos\nu - z\cos\lambda)dS,$$

$$L_z = p\iint_{(S)}(y\cos\lambda - x\cos\mu)dS$$

اگر در دستور استروگرادسکی فرض کنیم: $P = 0$، $Q = pz$، $R = -py$، آن وقت به دست می‌آید: $L_x = 0$. به همین ترتیب، ثابت می‌شود: $L_y = L_z = 0$. گشت‌آور اصلی فشار (نسبت به مبداء) برابر صفر است.

۸) به‌عنوان آخرین مثال ازکاربرد دستور استروگرادسکی، قانون ارشمیدس را، که یکی‌از قانون‌های اصلی هیدروستاتیك است، می‌آوریم.

می‌دانیم، فشار مایع برقطعه سطحی‌که درآن غوطه‌ور شده، در جهت قائم برقطعه سطح قرار دارد و برابراست با وزن ستونی ازمایع‌که قاعدهٔ‌آن همین‌قطعه سطح وارتفاع آن، عمق غوطه‌وری قطعه سطح است. اکنون فرض می‌کنیم، جسم صلب (V) در مایع غوطه‌ور باشد؛ فشار مایع، برهر جزء (dS) از سطح (S)آن وارد می‌شود. می‌خواهیم برآیند فشارهای جزئی و نقطهٔ اثرآن را پیداکنیم.

برای حل این‌مسأله، دستگاه مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که، صفحهٔ xy آن، برسطح آزاد مایع، و محور z آن، درجهت قائم‌آن و به طرف پائین، واقع باشد.

وزن مخصوص مایع را ρ و عمق مایع را برای جزء (dS)، z می‌گیریم؛ دراین صورت، فشاری‌که این‌جزء تحمل می‌کند، برابر است با

$$\rho z dS$$

و مولفه‌های‌آن برمحورها:

$$-\rho z\cos\lambda dS,\quad -\rho z\cos\mu dS,\quad -\rho z\cos\nu dS$$

دراین حالت، برای تصویرهای بردار اصلی برمحورها، داریم:

$$R_x = -\rho\iint_{(S)} z\cos\lambda dS,\quad R_y = -\rho\iint_{(S)} z\cos\mu dS,$$

$$R_z = -\rho \iint_{(S)} z\cos\nu\, dS$$

به‌کمک دستور استروگرادسکی، شبیه مسأله قبل، به‌دست می‌آید:

$$R_x = R_y = 0,\quad R_z = -\rho \iiint_{(V)} dV = -\rho V$$

بنابراین، بردار اصلی فشار، در جهت قائم و به طرف بالا قرار دارد و برابر است با وزن مایع جابه‌جا شده به وسیلهٔ جسم.

اکنون، گشتاور نیروهای جزئی‌را نسبت به‌مرکز ثقل جسم، $C(\xi, \eta, \zeta)$، در نظر می‌گیریم (چه در این‌جا وچه بعد، به‌مرکز ثقل جسم هندسی با توزیع یکنواخت جرم‌نظر داریم، که ممکن است برمرکز ثقل جسم فیزیکی منطبق نباشد). مؤلفه‌های گشتاورهای جزئی، نسبت به‌محورها، چنین‌اند:

$$\rho z[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu],\quad \rho z[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda],$$

$$\rho z[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]$$

و برای مولفه‌های گشتاور اصلی (نسبت به نقطهٔ C) به‌دست می‌آید:

$$L_x = \rho \iint_{(S)} z[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]\, dS,$$

$$L_y = \rho \iint_{(S)} z[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda]\, dS,$$

$$L_z = \rho \iint_{(S)} z[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]\, dS$$

که اگر درمورد انتگرال اول، دستور استروگرادسکی را به‌کار ببریم، به‌دست می‌آید:

$$L_x = \rho \iiint_{(V)} \left[\frac{\partial z(z-\zeta)}{\partial y} - \frac{\partial z(y-\eta)}{\partial z}\right] dV =$$

$$= \rho \iiint_{(V)} (\eta - y)\, dV = \rho\left[\eta V - \iiint_{(V)} y\, dV\right] = 0$$

زیرا انتگرال $\iiint_{(V)} y\,dV$ ، گشت‌آور ستاتیك جسم نسبت به‌صفحهٔ xz و برابر ηV است. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود $L_y = 0$ و $L_z = 0$.

بنابراین، گشت‌آور اصلی فشار نسبت به‌مرکز ثقل جسم، برابر صفر است؛ که اگر آن را با آن چه دربارهٔ بردار اصلی به‌دست آوردیم، مقایسه کنیم، به‌این نتیجه می‌رسیم: اگر جسمی در مایع غوطه‌ور باشد، از طرف مایع، نیروئی برای وزن مایع جا به‌جا شده، بر جسم وارد می‌شود؛ این نیرو بر مرکز ثقل (هندسی) جسم اثر می‌کند و در جهت قائم و به‌طرف بالاست.

§۳. تغییر متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه

۶۵۵. تبدیل فضا و مختصات منحنی‌الخط. طبیعی است که می‌توان اندیشه‌های شمارهٔ ۶۰۳ را، در ارتباط با تبدیل حوزه‌های مسطحه، دربارهٔ حوزه‌های فضایی‌هم مورد استفاده قرار داد.

فضایی‌را نسبت به دستگاه مختصات قائم xyz و فضای دیگری را نسبت به دستگاه مختصات $\xi\eta\zeta$ درنظر می‌گیریم. دوحوزهٔ بستهٔ (D) و (Δ) را در این فضاها، به ترتیب، محدود به سطح‌های (S) و $(\sum)$، که همیشه قطعه به قطعه هموار فرض می‌شوند، مفروض می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم، این حوزه‌ها، با تناظر پیوستهٔ یك به یك، به هم مربوط باشند و این ارتباط، با دستورهای زیرمشخص شده باشد:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta) \\ y = y(\xi, \eta, \zeta) \\ z = z(\xi, \eta, \zeta) \end{cases} \qquad (۱)$$

در ضمن، نقطه‌های سطح $(\sum)$ تنها پاسخ‌گوی نقطه‌های سطح (S) هستند و برعکس.

فرض می‌کنیم، تابع‌های (۱)، دارای مشتق‌های نسبی پیوسته‌ای در حوزه (Δ) باشند، دراین صورت، ژاکوبین

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \qquad (۲)$$

نیز، یك تابع پیوسته در (Δ) خواهد بود. دراین‌جا هم، این دترمینان را مخالف صفر و با علامتی معین به‌حساب می‌آوریم [با ۶۰۳ مقایسه کنید].

اگر درحوزهٔ (Δ)، سطح قطعه به قطعه هموار

$$\xi=\xi(u,v),\quad \eta=\eta(u,v),\quad \zeta=\zeta(u,v) \qquad (۳)$$

را انتخاب کنیم (بااین فرض که، پارامترها، در حوزه‌ای مثل E ازصفحهٔ uv تغییرمی‌کنند): آن‌وقت، به‌کمك رابطه‌های (۱)، به‌سطح‌قطعه به‌قطعه هموارى درحوزهٔ (D) می‌رسیم. این سطح، بامعادله‌های زیرمشخص‌می‌شود:

$$x=x(\xi(u,v),\eta(u,v),\zeta(u,v))=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v) \qquad (۴)$$

به‌حالت سطح هموار (۳) اکتفا می‌کنیم: روی آن نقطه‌های خاص وجـود ندارد، به‌نحوی که دترمینان‌های

$$\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)},\quad \frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)},\quad \frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)} \qquad (۵)$$

به‌طور هم زمان برابرصفر نمی‌شوند. اکنون تحقیق می‌کنیم که برسطح(۴) هم، نقطه‌های خاص وجود ندارد.

باتوجه به دستور (۶) ازشمارهٔ ۲۰۴، برابری‌های خطی زیررا نسبت به مقدارهای (۴) داریم:

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\frac{D(y,z)}{D(\eta,\zeta)}\cdot\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)}+\frac{D(y,z)}{D(\zeta,\xi)}\cdot\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)}+$$

$$+\frac{D(y,z)}{D(\xi,\eta)}\cdot\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)};$$

$$\frac{D(z,x)}{D(u,v)}=\frac{D(z,x)}{D(\eta,\zeta)}\cdot\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)}+\frac{D(z,x)}{D(\zeta,\xi)}\cdot\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)}+$$

$$+\frac{D(z,x)}{D(\xi,\eta)}\cdot\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)};$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\cdot\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)}+\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\cdot\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)}+$$

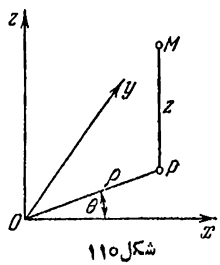
$$+\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\cdot\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}$$

دترمینانی که از ضریب‌های این مقدارها، یعنی از مکمل‌های جبری عضوهـای دترمینان

(۲)، تشکیل می‌شود، بنابر قضیهٔ معروف جبر، برابرمجذور دترمینان اخیراست و، بنابراین، همراه با آن، مخالف صفراست. درحالتی هم که، سمت چپ این برابری‌ها، در یك نقطهٔ (u, v)، باهم برابر صفر باشند، آن وقت، هرسه دترمینان (۵) برابر صفر می‌شوند که خلاف فرض است.

عددهای ξ، η، ζ، که به‌طور یك‌ارزشی موضع نقطه را در فضای xyz مشخص می‌کنند، مختصات منحنی‌الخط این نقطه نامیده می‌شوند. نقطه‌هایی از فضای xyz، که برای آن‌ها، یکی ازاین مختصات، مقدار ثابتی باشد، سطح مختصاتی را تشکیل می‌دهند. سه خانواده ازاین سطح‌های مختصاتی وجود دارد؛ ازهر نقطهٔ حوزهٔ (D)، یك‌سطح ازهر خانواده عبور می‌کند.

همهٔ این‌ها، ناشی از وجود تناظر متقابل یك ارزشی، بین حوزه‌های (D) و (Δ) است. درعمل، اغلب، این «یك ارزشی بودن» ازبین می‌رود.



شکل ۱۱۵

۶۵۶. مثال‌ها. ۱) مختصات استوانه‌ای، با الحاق مختصات قطبی در صفحهٔ xy، به رقوم (ارتفاع) معمولی دکارتی z، به دست می‌آید (شکل ۱۱۵). دستورهایی که، این مختصات را، با مختصات دکارتی مربوط می‌کنند، چنین‌اند:

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z \qquad (۱)$$

این دستورها، حوزهٔ

$$0\leqslant\rho<+\infty,\quad 0\leqslant\theta<2\pi,\quad -\infty<z<+\infty$$

را برتمامی فضای xyz، تصویر می‌کنند. باوجود این، توجه کنیم که خط $\rho=0$، $z=z$، بریك نقطه $(z, 0, 0)$ تصویر می‌شود؛ واین، یك‌ارزشی بودن متقابل تناظررا ازبین می‌برد.

سطح‌های مختصاتی دراین حالت، عبارتند از

الف) $\rho=\text{const}$.: سطح‌های استوانه‌ای با مولدهای موازی محور z؛ دایره‌های واقع برصفحهٔ xy به مرکز مبداء، هادی‌های آن‌ها را تشکیل می‌دهند؛

ب) $\theta=\text{const}$.: نیم صفحه‌هایی که از محور z می‌گذرند؛

ج) $z=\text{const}$.: صفحه‌های موازی صفحهٔ xy.

وژاکوبین تبدیل:

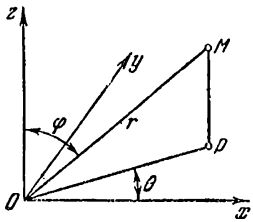
$$J=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\rho$$

به استثنای حالت $\rho = 0$، ژاکوبین همیشه، علامت مثبت دارد.

۲) مختصات کروی که آن را، مختصات قطبی در فضا هم می‌نامند، بادستورهای زیر، به مختصات دکارتی مربوط می‌شود:

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi$$

که در آن، $0 \leqslant r < +\infty$، $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ و $0 \leqslant \theta < 2\pi$.



شکل ۱۱۱

مفهوم هندسی مقدارهای r، φ و θ، از شکل ۱۱۱ روشن است: r عبارت است از شعاع حامل OM که مبداء (قطب) را به نقطهٔ مفروض M وصل می‌کند؛ φ، زاویه‌ای است که این شعاع حامل بامحور z (محورقطبی) تشکیل‌می‌دهد؛ θ،زاویه‌ای است‌که تصویر $OP = r\sin\varphi$ از شعاع حامل OM بر صفحهٔ xy، بامحور Ox می‌سازد.

دراین حالت هم، با ازبین رفتن تناظر متقابل یك ارزشی، روبه‌رو می‌شویم: صفحهٔ $r = 0$ از فضای $r\varphi\theta$، بر مبداء مختصات $x = y = z = 0$ تصویر می‌شود، خط راست $\varphi = 0(\pi)$، $r = r$ هم روی یك نقطه تصویر می‌شود:

$$x = y = 0, \quad z = r$$

سطح‌های مختصاتی، سه خانواده را تشکیل می‌دهند:

الف) $r = \text{const.}$: کره‌های هم مرکز به مرکز مبداء مختصات؛

ب) $\varphi = \text{const.}$: مخروط‌های دایره‌ای،که محور z، محور آن‌هاست؛

ج) $\theta = \text{const.}$: نیم‌صفحه‌هایی که ازمحور z می گذرند.

ژاکوبین این تبدیل:

$$J = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi$$

ژاکوبین همیشه مثبت است، به استثنای حالت‌های $r = 0$ یا $\varphi = 0(\pi)$ که، در آن‌ها، ژاکوبین برابرصفر می‌شود.

۳) تبدیل فضا به‌خودش (تبدیل همانی فضا)، با دستورهای

$$x = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad z = \frac{\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2>0)$، به‌طور یك ارزشی برگشت‌پذیر است:

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\ \eta=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\ \zeta=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

این تبدیل هم، مثل حالت مسطحهٔ آن [۶۰۴، ۲)]، انعکاس نامیده می‌شود و تعبیر هندسی مشخصی دارد؛ از خواننده می‌خواهیم، این تعبیررا پیداکند. همچنین، سه خانوادهٔ صفحه‌های مختصاتی متناظر بااین تبدیل‌را، مشخص کند.

۴) مختصات بیضوی. خانوادهٔ سطح‌های هم‌کانون و هم‌محور درجهٔ دوم را درنظر می‌گیریم:

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-h^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-k^2}=1 \qquad (0<h<k) \qquad (2)$$

که از بیضوی‌ها (به‌ازای $\lambda>k$)، هذلولوی‌های تك دامن (به‌ازای $k>\lambda>h$) و بالاخره، هذلولوی‌های دو دامن (به‌ازای $h>\lambda>0$) تشکیل شده‌است.

از هرنقطهٔ (x, y, z) فضا، که برصفحه‌های مختصات واقع نباشد، ازهریك ازاین نوع سطح‌ها، یکی می‌گذرد. در واقع، سمت چپ معادلهٔ زیر، که از (۲) به دست آمده است:

$$\lambda^2(\lambda^2-h^2)(\lambda^2-k^2)-(\lambda^2-h^2)(\lambda^2-k^2)x^2-\lambda^2(\lambda^2-k^2)y^2-$$
$$-\lambda^2(\lambda^2-h^2)z^2=0$$

به‌ازای $\lambda=0$ منفی، به‌ازای $\lambda=h$ مثبت، به‌ازای $\lambda=k$ دوباره منفی و، سرانجام، به ازای λهای بزرگتر، مثبت می‌شود. ازاین‌جا، معلوم می‌شودکه، معادله، سه ریشهٔ مثبت‌دارد: یکی $\lambda>k$ (متناظربا بیضوی)، دومی $\mu<k$، ولی $\mu>h$ (متناظر با هذلولوی تك‌دامن) و سومی $\nu<h$ (هذلولوی دو دامن).

با توجه به ویژگی‌های ریشه‌های این‌معادله، که می‌توانیم آن را معادله‌ای درجه سوم نسبت به λ^2 درنظر بگیریم، داریم:

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=x^2+y^2+z^2+h^2+k^2;$$
$$\lambda^2\mu^2+\mu^2\nu^2+\nu^2\lambda^2=(h^2+k^2)x^2+k^2y^2+h^2z^2+h^2k^2;$$
$$\lambda^2\mu^2\nu^2=h^2k^2x^2$$

وازآن‌جا به‌دست می‌آید:

$$x=\pm\frac{\lambda\mu\nu}{hk},\qquad y=\pm\frac{\sqrt{(\lambda^2-h^2)(\mu^2-h^2)(h^2-\nu^2)}}{h\sqrt{k^2-h^2}},$$

$$z=\pm\frac{\sqrt{(\lambda^2-k^2)(k^2-\mu^2)(k^2-\nu^2)}}{k\sqrt{k^2-h^2}}$$

اگر به یك هشتم اول مختصاتی اکتفا کنیم، آن وقت، در این رابطه‌ها، باید تنها علامت‌های مثبت را درنظر گرفت. عددهای λ، μ، ν، می‌توانند به‌عنوان مختصات منحنی‌الخط نقطه‌های این یك هشتم به‌حساب آیند. آن‌ها را، مختصات بیضوی می‌گویند. سه خانوادهٔ سطح‌های مختصاتی، عبارتند ازخانواده‌های بیضوی‌ها، هذلولوی‌های تك دامن ودودامن.

ژاکوبین تبدیل، به این صورت است:

$$J=\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{(\lambda^2-h^2)(\lambda^2-k^2)(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}}$$

۶۵۷. بیان حجم درمختصات منحنی‌الخط. به‌فرض‌ها وعلامت‌های شمارهٔ **۶۵۵** برمی‌گردیم ومسالهٔ بیان حجم (محدود) جسم (D) درفضای xyz را، با انتگرال سه‌گانه نسبت به‌جسم متناظر (Δ) در فضای $\xi\eta\zeta$، مطرح می‌کنیم*.

حجم مطلوب، قبل ازهمه، با انتگرال روی سطح نوع دوم [**۶۱۳**، (۱۴) را ببینید]

$$D\equiv\iint_{(\Delta)}z\,dx\,dy$$

نسبت به رویهٔ بیرونی سطح (S)، بیان می‌شود. می‌کوشیم تا، از همین‌جا، به انتگرال دوگانهٔ معمولی برسیم.

از معادله‌های پارامتری (۳) آغاز می‌کنیم (u و v در حوزهٔ (E) روی صفحهٔ uv تغییر می‌کنند). دراین صورت، روشن‌است که معادله‌های (۴)، سطح (S) را بیان‌می‌کنند. بافرض

---

*) مثل مورد **۶۰۵**، دراین‌جا هم، وجود و پیوستگی مشتق‌های نسبی، یعنی

$$x''_{\xi\eta},\ x''_{\eta\xi},\ \dots,\ y''_{\xi\eta},\ y''_{\eta\xi},\ \dots$$

را مفروض می‌گیریم. این‌فرض، اثبات را ساده می‌کند، اگرچه برای درستی نتیجه‌گیری، اساسی نیست.

$$C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

بنا بر دستور (۸) شمارهٔ ۶۳۶ داریم:

$$D=\iint_{(E)} zC\,du\,dv$$

درضمن، انتگرال را با علامت مثبت می‌گیریم، به شرطی که جهت سطح (S)، باتوجه به رویهٔ بیرونی آن، باجهت روی صفحهٔ uv تطبیق کند و، روشن است، که همیشه می‌توان به همین ترتیب درنظر گرفت [۶۲۰، ۶۲۱].

چون x و y و z، باواسطهٔ متغیرهای ξ و η و ζ، به u و v بستگی دارند، باتوجه به‌ویژگی معلوم دترمینان‌های تابعی [۲۰۴، (۶)]:

$$C=\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\,\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}+\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\,\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)}+\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\,\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)}$$

اگر مقدار C را در انتگرال بالا قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$D=\iint_{(E)} z\left[\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\,\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}+\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\,\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)}+\right.$$

$$\left.+\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\,\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)}\right]du\,dv \qquad (۶)$$

این انتگرال را، با انتگرال روی سطح نوع دوم زیر، که نسبت به رویهٔ بیرونی سطح $(\sum)$ است، مقایسه می‌کنیم:

$$\iint_{(\Sigma)} z\left[\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}d\xi\,d\eta+\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}d\eta\,d\zeta+\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}d\zeta\,d\xi\right] \qquad (۷)$$

اگر به‌کمک دستورمشابه دستور(۱۰) ازشمارهٔ ۶۳۶، وبا شروع از معادلهٔ پارامتری (۳) این انتگرال را به انتگرال دوگانهٔ عادی تبدیل کنیم، به انتگرال (۴) می‌رسیم. تنها اختلاف این انتگرال‌ها، ممکن است در علامت باشد: اگرجهت صفحهٔ uv با جهت سطح $(\sum)$، نسبت به رویهٔ بیرونی آن، تطبیق کند، آن وقت، انتگرال‌ها برابرند و، درغیر این‌صورت، علامت‌های مختلف دارند.

بالاخره، به‌کمک دستور استروگرادسکی، می‌توان ازانتگرال (۷) به‌انتگرال‌سه‌گانه

نسبت به حوزهٔ (Δ) رسید:

$$D=\pm\iiint_{(\Delta)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[z\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[z\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[z\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]\right\}d\xi d\eta g\zeta$$

عبارت زیر انتگرال برابر است با

$$\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}+\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}+$$

$$+z\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}+\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]$$

مجموعی که، دراین‌جا، در سطر اول قرار دارد، برابراست با ژاکوبین

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi}&\frac{\partial x}{\partial\eta}&\frac{\partial x}{\partial\zeta}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi}&\frac{\partial y}{\partial\eta}&\frac{\partial y}{\partial\zeta}\\ \frac{\partial z}{\partial\xi}&\frac{\partial z}{\partial\eta}&\frac{\partial z}{\partial\zeta}\end{vmatrix}$$

که اگر دترمینان را نسبت به جمله‌های سطر آخر بازکنیم، به‌این مطلب اطمینان پیدا می‌کنیم. مجموع داخل کروشه هم، با محاسبهٔ مستقیم به‌دست می‌آید و برابر صفراست*.

---

*) روشن است که

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}=\frac{\partial^2x}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\zeta}+\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2y}{\partial\zeta\partial\xi}-\frac{\partial^2x}{\partial\zeta\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial^2y}{\partial\eta\partial\xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}=\frac{\partial^2x}{\partial\zeta\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial^2y}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial^2x}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\zeta}-\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2y}{\partial\zeta\partial\eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}=\frac{\partial^2x}{\partial\xi\partial\zeta}\frac{\partial y}{\partial\eta}+\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2y}{\partial\eta\partial\zeta}-\frac{\partial^2x}{\partial\eta\partial\zeta}\frac{\partial y}{\partial\xi}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2y}{\partial\xi\partial\zeta}$$

واز مجموع آن‌ها، معلوم می‌شود که سمت راست متحد با صفراست.

به‌این ترتیب، به‌دستور زیر می‌رسیم:

$$D=\pm\iiint_{(\Delta)}\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}d\xi d\eta d\zeta$$

اگر به‌خاطر بیاوریم که، بنابر فرض، علامت ژاکوبین با علامت انتگرال تطبیق می‌کند، آن وقت روشن می‌شود که (چون در این‌جا $D>0$ به حساب می‌آوریم)، علامت جلو انتگرال باید باعلامت ژاکوبین تطبیق کند و، در نتیجه، می‌توانیم حاصل را به صورت نهایی خود بنویسیم:

$$D=\iiint_{(\Delta)}\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right|d\xi d\eta d\zeta \qquad (۸)$$

که اگر ژاکوبین را با $J(\xi,\eta,\zeta)$ نشان دهیم، به‌طور خلاصه

$$D=\iiint_{(\Delta)}|J(\xi,\eta,\zeta)|d\xi d\eta d\zeta \qquad (۸^*)$$

عبارت زیر انتگرال

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right|d\xi d\eta d\zeta=|J(\xi,\eta,\zeta)|d\xi d\eta d\zeta$$

را معمولا حجم جزئی در مختصات منحنی‌الخط می‌نامند.

۶۵۸. یادداشت‌های تکمیلی ۱۰. روی سطح‌های $(\sum)$ و (S)، رویه‌های مشخصی را تثبیت کردیم؛ در واقع، این رویه‌ها، نسبت به جسم‌هایی که به وسیلهٔ $(\sum)$ و (S) محدود شده‌اند، رویه‌های بیرونی بودند. در ارتباط باانتخاب همین رویه بودکه، جهت را روی سطح‌های مذکور، معین کردیم [۶۲۰]. اگر نقطه‌ای برسطح $(\sum)$، دورهٔ بستهٔ ساده‌ای را (که سطح را تقسیم می‌کند) بپیماید، و یکی از دوحوزه‌ای را در نظر بگیریم که به‌وسیلهٔ این دوره محدود شده است، آن وقت، باتوجه به دستور (۱)، نقطهٔ متناظر آن، دورهٔ مشابهی را برسطح (S) می‌پیماید و، درضمن، این‌بار نیازی به‌انتخاب یکی از دو حوزه نیست، زیرا این انتخاب، به‌خودی خود، وباهمان تناظر (۱) انجام می‌گیرد. اگر مثلا، جهت حرکت روی دورهٔ اول، از دیدگاه جهتی‌که روی صفحهٔ $(\sum')$ انتخاب شده است، مثبت باشد، آن وقت جهت حرکت روی دورهٔ دوم، به شرطی‌که به جهت در سطح (S) توجه داشته باشیم، می‌تواند مثبت باشد یا منفی. درحالت اول، جهت مربوط

به دوسطح را، بنابر رابطهٔ تبدیل، متناظر می‌نامیم، درحالی‌که درحالت دوم، این دوجهت متناظر نیستند.

چون، از همان ابتدا، جهت سطح (S) را متناظر با جهت صفحهٔ uv گرفته‌ایم، بنابراین، بسته به‌این‌که، جهت سطح $(\sum)$ متناظر باجهت صفحهٔ uv باشد یا متناظر با آن نباشد، یکی‌از دو حالت می‌تواند پیش‌آید. همین‌مطلب، به‌انتخاب این یا آن علامت،جلو انتگرال مربوط به‌حجم، بستگی‌داشت. ولی، درپایان، روشن شدکه، این‌علامت، باعلامت ژاکوبین مطابقت دارد.

باتوجه به‌همهٔ این‌ها، نتیجه می‌گیریم:

بسته به‌این‌که علامت ژاکوبین را مثبت یا منفی بگیریم، جهت روی دوسطح $(\sum)$ و (S)، بنابر رابطهٔ تبدیل (۱)، متناظر یکدیگرند، یا متناظر یکدیگر نیستند.

۲°. اگر قضیهٔ میانگین‌را دربارهٔ دستور (*۸) به‌کار بریم، به‌این دستور می‌رسیم:

$$D=|J(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\zeta})|\Delta \qquad (۹)$$

که درآن، $(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\zeta})$، نقطه‌ای ازحوزهٔ (Δ) است و Δ، حجم این حوزه است. ازاین‌جا به سادگی نتیجه می‌شودکه، اگر حوزهٔ (Δ) را بـه سمت نقطهٔ (ξ,η,ζ) منقبض کنیم، خواهیم داشت [با **۶۴۴**، ۸° مقایسه کنید]:

$$|J(\xi,\eta,\zeta)|=\text{حد}\frac{D}{\Delta}$$

به‌نحوی‌که، قدر مطلق ژاکوبین، عبارت است از ضریب انبساط فضای $\xi\eta\zeta$ (در نقطهٔ مفروض)، ضمن تبدیل‌آن به فضای xyz.

۳°. دستور (۸) یا (*۸) را، باتوجه به فرض‌های مشخصی به دست‌آوردیم (تناظر یك به‌یك وپیوسته بین‌جزءهای (D) و (Δ) وغیره). باوجوداین، شبیه **۴۰۶**، ۴°، می‌توان ثابت‌کردکه: اگر این‌شرط‌ها درنقطه‌های جداگانه یادرطول منحنی‌ها وسطح‌های‌جداگانه برقرار نباشند، به‌شرطی‌که ژاکوبین محدودباشد، یادست‌کم انتگرال‌پذیر (ولو به‌صورت ناویژه) بماند، بازهم این دستورها به قوت خود باقی هستند.

۶۵۹. نتیجه‌گیری هندسی. دستور (۶) را می‌تـوان براساس ملاحظه‌های خالص هندسی به دست‌آورد (که م. و. استروگرادسکی هم، برای نخستین‌بار به‌همین ترتیب عمل کرد، با **۶۰۹** مقایسه‌کنید). مکعب مستطیل بی‌نهایت‌کوچك واقع درفضای $\xi\eta\zeta$ باندازه‌های $d\xi$، $d\eta$، $d\zeta$ را با جسم جزئی فضای xyz واقع بین سطح‌های «ξ» و «$\xi+d\xi$»، «η» و «$\eta+d\eta$»، «ζ» و «$\zeta+d\zeta$»، کـه به‌تقریب می‌توان همچون یك متوازی‌السطوح

با زاویه‌های حاده در نظر گرفت، مقایسه می‌کنیم. حجم آن برابراست باشش برابر حجم چهاروجهی با رأس‌های

$$P_1(x,y,z);\quad P_2\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi,\ y+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi,\ z+\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi\right);$$

$$P_3\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi,\ y+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta,\ y+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta,\ z+\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta\right);$$

$$P_4\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial x}{\partial \zeta}d\zeta,\ y+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta,\right.$$

$$\left.z+\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta\right)$$

واز هندسهٔ تحلیلی می‌دانیم که (از نظر قدرمطلق)، با دترمینان زیر بیان می‌شود:

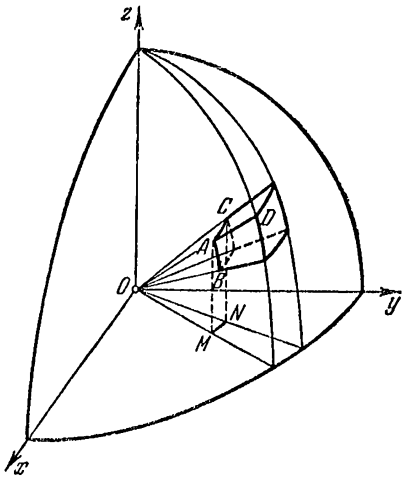
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta & \frac{\partial x}{\partial \zeta}d\zeta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta & \frac{\partial y}{\partial \zeta}d\zeta \\ \frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta & \frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta \end{vmatrix} = \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\,d\xi d\eta d\zeta$$

وبا جمع این حجم‌های جزئی، به دستور (۶) می‌رسیم.

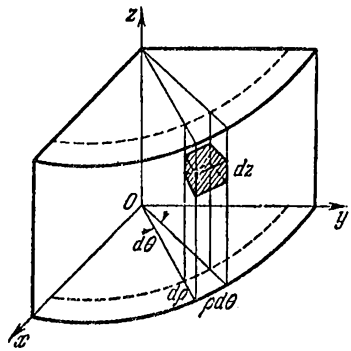
به این ترتیب، دراین‌جا مهم این است که، برای تعیین حجم جسم، آن را به‌بخش‌های جزئی تقسیم می‌کنیم، ولی نه به‌کمک صفحه‌های دو به دو عمود برهم، بلکه به کمک شبکه‌ای از سطح‌های مختصاتی.

درحالت‌های ساده، می‌توان «حجم جزئی»را، به‌طور مستقیم، درمختصات منحنی‌الخط به‌دست آورد.

به عنوان مثال، در حالت مختصات استوانه‌ای، حوزه‌ای جزئی (در فضای xyz) را درنظر می‌گیریم که محدود باشد به سطح‌های استوانه‌ای با شعاع‌های ρ و $\rho+d\rho$، صفحه‌های افقی به ارتفاع‌های z و $z+dz$ ونیم صفحه‌هایی که از z می‌گذرند وباصفحهٔ xz زاویه‌های θ و $\theta+d\theta$ را می‌سازند (شکل ۱۱۲–a). اگر این حوزه جزیی را به تقریب، مکعب مستطیل به‌حساب آوریم، به سادگی روشن می‌شود که بعدهای آن برابر



شکل ۱۱۲b



شکل ۱۱۲a

$d\rho$، $\rho d\theta$، dz و حجم آن برابر $\rho d\rho d\theta dz$ است. در ضمن، ژاکوبین، که معرف نسبت این حجم به $d\rho d\theta dz$، یعنی حجم متوازی‌السطوح جزئی در فضای $z\theta\rho$، است، برابر ρ می‌شود.

به‌همین ترتیب، می‌توان، در حالت مختصات کروی، حوزهٔ جزئی (در فضای xyz) را محدود به کره‌های با شعاع‌های r و $r+dr$، مخروط‌های φ و $\varphi+d\varphi$ و نیم‌صفحه‌های θ و $\theta+d\theta$ در نظر گرفت (شکل ۱۱۲–b). این حوزه را هم می‌توان مکعب مستطیلی با بعدهای $AD=dr$، $AB=rd\varphi$ و AC به‌حساب آورد. چون کمان AC برابر تصویر خود MN است و، این تصویر، شعاعی برابر $OM=r\sin\varphi$ دارد و نظیر زاویهٔ مرکزی $d\theta$ است، بنابراین $AC=r\sin\varphi d\theta$. در نتیجه، حجم حوزهٔ مورد نظر، برابر $r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$ و ژاکوبین برابر $r^2\sin\varphi$ می‌شود.

هردو نتیجه را با ملاحظه‌های مقدماتی هندسی به‌دست آوردیم که با آن‌چه در **۶۵۶**–۱) و ۲) آورده بودیم، مطابقت دارند.

۶۶۰. مثال‌ها. ۱) حجم جسمی را پیدا کنید که محدود باشد به سطح

الف) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$؛

ب) $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3xyz$؛

ج) $(x^2+y^2+z^2)^n=x^{2n-1}$.

حل. الف) جسم نسبت به صفحه‌های yz و zx متقارن است، زیرا توان x و y،

در معادلهٔ مفروض، زوج‌اند. ازآن‌جاکه سمت‌چپ معادله غیرمنفی است، بنابراین $z \geqslant 0$، یعنی تمامی جسم در بالای صفحهٔ xy قرار دارد. به‌این ترتیب، کافی است حجم بخشی‌از جسم راکه دریك هشتم‌اول قرار دارد، محاسبه کنیم.

وجود عبارت $x^2+y^2+z^2$ در معادله، به ما تلقین می‌کندکه به مختصات کروی برویم. اگر درمعادلهٔ الف)، مقدارهای

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi$$

را قرار دهیم، به‌معادلهٔ سطح در مختصات کروی می‌رسیم:

$$r=a\sqrt[3]{\cos\varphi}$$

ازآن‌جاکه در یك هشتم اول داریم: $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ و $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$، با توجه به مقدار ژاکوبین $J=r^2\sin\varphi$ [۶۵۶، ۲)]، خواهیم داشت:

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}}r^2\sin\varphi\,dr=\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\frac{1}{3}\pi a^3$$

ب) جسم دریك هشتم‌های اول، سوم، ششم وهشتم قرار دارد، که برای آن‌ها، به ترتیب داریم:

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0;\quad x\leqslant 0,\ y\leqslant 0,\ z\geqslant 0;$$
$$x\leqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\leqslant 0;\quad x\geqslant 0,\ y\leqslant 0,\ z\leqslant 0$$

جسم، از چهار بخش تشکیل شده است‌که دو به دو، نسبت به‌یکی‌از محورهای مختصات، متقارن‌اند (اگر علامت دو متغیر ازسه متغیر x و y و z را تغییر دهیم، درسمت چپ و سمت راست معادله، تغییری به وجود نمی‌آید).

اگر به مختصات کروی برویم، به‌دست می‌آید:

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}}r^2\sin\varphi\,dr=$$

$$=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{a^3}{6}$$

ج) رابطه‌های عبور به مختصات کروی، چنین‌اند:

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi\cos\theta,\quad z = r\sin\varphi\sin\theta$$

بنابراین، معادلهٔ سطح، به صورت $r = \cos^{2n-1}\varphi$ در می‌آید.

پاسخ: $V = \dfrac{\pi}{3(3n-1)}$

۲) حجم جسمی را پیدا کنید که محدود باشد به سطح

الف) $(x^2+y^2)^2+z^4 = y$؛

ب) $(x^2+y^2)^3+z^6 = 3a^3$.

حل. الف) گرچه نوع مسأله، با مسأله‌های قبل، کمی متفاوت است، در این‌جا هم بهتر است خود را به مختصات کروی برسانیم. معادلهٔ سطح، به این صورت درمی‌آید:

$$r^3(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi) = \sin\varphi\sin\theta$$

با توجه به تقارن، خواهیم داشت:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin\varphi\sin\theta}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}}} r^2\sin\varphi\, dr =$$

$$= \frac{4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi} = \frac{4}{3}\int_0^{\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\, dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}$$

ب) راهنمائی:

$$V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi}{\sin^6\varphi+\cos^6\varphi} = \pi\int_0^1 \frac{u\, du}{3u^2-3u+1}$$

(با فرض $u = \cos^2\varphi$). پاسخ: $V = \dfrac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}$.

۳) حجم جسمی را پیدا کنید که محدود باشد به سطح

الف) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2y}{h^3}$؛

ب) $\left(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}\right)^۲=\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}$؛

ج) $\left(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}\right)^۲=\left(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}\right)\frac{z}{c}$

حل. الف) وقتی عبارت $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}$ درمعادلهٔ سطح وجود داشته باشد، اغلب بهتراست به مختصات کروی تعمیم یافته*، عبور کنیم، با این دستورها

$$x=ar\sin\varphi\cos\theta,\quad y=br\sin\varphi\sin\theta,\quad z=cr\cos\varphi$$

دراین حالت، ژاکوبین برابراست با $J=abcr^۲\sin\varphi$. باتوجه به‌تقارن داریم:

$$V=۴\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}d\theta\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}d\varphi\int_۰^{\frac{a^۲b\sin^۳\varphi\cos^۲\theta\sin\theta}{h^۳}}abcr^۲\sin\varphi dr=$$

$$=\frac{۴}{۳}\frac{a^۷b^۴c}{h^۹}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۶\theta\sin^۳\theta d\theta\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{۱۰}\varphi d\varphi=\frac{\pi}{۱۹۲}\frac{a^۷b^۴c}{h^۹}$$

ب) پاسخ: $V=\frac{\pi^۲}{۴}abc$؛ ج) پاسخ: $V=\frac{\pi}{۶۰}abc$.

۴) حجم جسمی‌را پیداکنیدکه به سطح‌های زیرمحدود باشد:

$$x^۲+y^۲+z^۲=۱,\quad x^۲+y^۲+z^۲=۱۶,\quad z^۲=x^۲+y^۲,$$

$$z=۰,\quad y=۰,\quad y=x$$

راهنمائی. این سطح‌ها، فاصله‌های تغییررا برای مختصات کروی، معین‌می‌کنند:

$$۱\leqslant r\leqslant ۴,\ \frac{\pi}{۴}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{۲},\ ۰\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{۴}\ \left(\text{یا}\ \pi\leqslant\theta\leqslant\frac{۵\pi}{۴}\right)$$

جسم از دوتکهٔ مجزا (دریك هشتم اول ویك هشتم سوم) تشکیل شده است.

پاسخ: $V=\frac{۲۱\sqrt{۲}\pi}{۴}$.

۵) حجم جسم محدود به سطح زیررا پیداکنید:

---

*) که مشابه مختصات قطبی تعمیم یافته درصفحه است.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{۲}{۳}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{۲}{۳}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{۲}{۳}}=۱$$

حل. مختصات جدید را، به‌کمك رابطه‌های زیر، وارد می‌کنیم:

$$x=ar\sin^{۳}\varphi\cos^{۳}\theta,\quad y=br\sin^{۳}\varphi\sin^{۳}\varphi,\quad z=cr\cos^{۳}\varphi$$

$$(۰\leqslant r\leqslant ۱,\quad ۰\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad ۶\leqslant\theta\leqslant ۲\pi)$$

در این حالت، برای ژاکوبین داریم:

$$J=۹abcr^{۲}\sin^{۵}\varphi\cos^{۲}\varphi\sin^{۲}\theta\cos^{۲}\theta$$

به نحوی که

$$V=۹abc\int_{۰}^{۱}r^{۲}dr\int_{۰}^{\pi}\sin^{۵}\varphi\cos^{۲}\varphi d\varphi\int_{۰}^{۲\pi}\sin^{۲}\theta\cos^{۲}\theta d\theta=\frac{۴}{۳۵}\pi abc$$

۶) مطلوب است محاسبهٔ حجم جسم محدود به سطح‌های زیر

$$(x+y+z)^{۲}=ay,\quad x=۰,\quad y=۰,\quad z=۰$$

راهنمائی. فرض کنید:

$$x=r\sin^{۲}\varphi\cos^{۲}\theta,\quad y=r\sin^{۲}\varphi\sin^{۲}\theta,\quad z=r\cos^{۲}\varphi$$

$$(r\geqslant ۰,\quad ۰\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{۲},\quad ۰\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{۲},)$$

ژاکوبین، چنین است:

$$J=۴r^{۲}\sin^{۳}\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta$$

پاسخ: $V=\frac{۱}{۶۰}a^{۳}$.

۷) حجم متوازی‌السطوحی را پیدا کنید که محدود به‌شش صفحهٔ زیر باشد:

$$a_{۱}x+b_{۱}y+c_{۱}z=\pm h_{۱},$$

$$a_{۲}x+b_{۲}y+c_{۲}z=\pm h_{۲}$$

$$a_{۳}x+b_{۳}y+c_{۳}z=\pm h_{۳}$$

والبته؛ بااین شرط که دترمینان زیر مخالف صفر باشد:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

حل. متغیرهای جدید را وارد می‌کنیم:

$$\xi=a_1x+b_1y+c_1z,$$

$$\eta=a_2x+b_2y+c_2z,$$

$$\zeta=a_3x+b_3y+c_3z$$

$$(-h_1\leqslant\xi\leqslant h_1,\quad -h_2\leqslant\eta\leqslant h_2,\quad -h_3\leqslant\zeta\leqslant h_3)$$

دترمینان $\dfrac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}$ را، باتوجه به‌این‌که عکس دترمینان $\dfrac{D(\xi,\eta,\zeta)}{D(x,y,z)}$ است، پیدا می‌کنیم. داریم:

$$V=\frac{1}{|\Delta|}\int_{-h_1}^{h_1}d\xi\int_{-h_2}^{h_2}d\eta\int_{-h_3}^{h_3}d\zeta=\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$$

۸) مطلوب است حجم جسمی‌که محدود باشد به

الف) استوانهٔ $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2=R^2$ وصفحه‌های

$$a_3x+b_3y+c_3z=0 \quad و \quad a_3x+b_3y+c_3z=h$$

ب) بیضوی

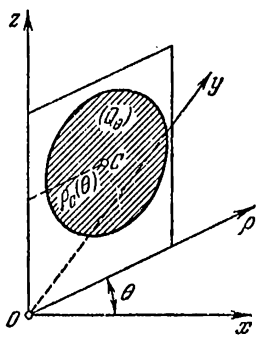
$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=R^2$$

(با این‌فرض قبلی‌که دترمینان $\Delta\neq 0$).

پاسخ: الف) $V=\dfrac{\pi R^2h}{|\Delta|}$؛ ب) $V=\dfrac{4\pi R^3}{3|\Delta|}$.

۹) با به کاربردن مختصات استوانه‌ای در محاسبهٔ حجم جسم، دستور جالبی به‌دست می‌آید.

جسم (V) را محدود به‌سطحی‌قطعه به‌قطعه هموار در نظرمی‌گیریم وفرض می‌کنیم، صفحه‌ای‌که ازمحور z می-



شکل ۱۱۳

گذرد (برای $\theta = \text{const.}$)، وقتی‌که θ از α تا β تغییر می‌کند، جسم را درشکل مستوی (Q_θ) قطع کند (شکل ۱۱۳). دراین‌صورت

$$V = \iiint\limits_{(V)} \rho d\rho d\theta dz = \int_\alpha^\beta d\theta \iint\limits_{(Q_\theta)} \rho d\rho dz$$

درضمن، با دوران شکل (Q_θ) همراه باصفحهٔ مذکور، دور محور z، به‌راحتی به دستگاه مختصات قائم می‌رسیم*.

اکنون به‌سادگی دیده می‌شودکه انتگرال دوگانهٔ $\iint\limits_{(Q_\theta)} \rho d\rho dz$، گشت‌آور ستاتیک شکل (Q_θ) نسبت به محور z است‌که برابر می‌شود با حاصل‌ضرب مساحت $Q(\theta)$ این شکل، درفاصلهٔ $\rho_C(\theta)$ مرکز ثقل‌آن از محور z:

$$\iint\limits_{(Q_\theta)} \rho d\rho dz = Q(\theta)\rho_C(\theta)$$

اگر ازاین عبارت برای حجم استفاده‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$V = \int_\alpha^\beta Q(\theta)\rho_C(\theta)d\theta$$

این دستور را پ. پ. کوسکوو (P. P. Kouskov) پیداکرده است. ازاین رابطه می‌توان برای محاسبهٔ حجم جسمی‌که ضمن حرکت مارپیچی شکل مسطحه به‌دست می‌آید، استفاده‌کرد.

اگر شکل بی‌تغییر (Q) و غیرمتقاطع بامحور z، به‌طور ساده دور محور z دوران کند، آن وقت $Q = \text{const.}$، $\rho_C = \text{const.}$، $\alpha = 0$ و $\beta = 2\pi$؛ و دستور به‌این‌صورت در می‌آید:

$$V = Q \cdot 2\pi\rho_C$$

این دستور، قضیهٔ معروف گولدن [۳۵۱] را بیان می‌کند: حجم جسمی‌که از دوران شکل مسطحه‌ای دورمحوری غیرمتقاطع باآن، به‌دست‌آید، برابراست‌باحاصل‌ضرب مساحت‌این

---

*) به‌جای‌آن‌که، شکل متحد با آن درصفحهٔ بی‌حرکت ρz، به‌فضای $\rho\theta z$ برده شود.

شکل، درمحیط دایره‌ای‌که مرکز ثقل این شکل می‌پیماید. به‌این ترتیب، دستور کوسکـود، تعمیم طبیعی این قضیه است (و برعکس، می‌تواند ازآن به‌سادگی به‌دست آید).

۱۰) حجم بیضوی سه محوری

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>b>c)$$

را، بارها محاسبه کرده‌ایم. این حجم برابر است با $\frac{4}{3}\pi abc$. باوجود این یکبار دیگـر، محاسبهٔ این‌حجم را بااستفاده از مختصات‌بیضوی λ، μ، ν [۶۵۵، ۴)] آزمایش می‌کنیم. اگر فرض‌کنیم:

$$h^2=a^2-b^2,\quad k^2=a^2-c^2$$

آن وقت، خود بیضوی مفروض به‌ازای $\lambda=a$ به‌دست می‌آید.

یك هشتم اول بیضوی، متناظر است با تغییر λ از k تا a، μ از h تا k و ν از ۰ تا h. بنابراین

$$\frac{1}{8}V=\int_0^h d\nu\int_h^k d\mu\int_k^a \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{(\lambda^2-h^2)(\lambda^2-k^2)(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}}d\lambda$$

ولی مقدار این‌حجم را می‌دانیم:

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi abc=\frac{\pi}{6}a\sqrt{(a^2-h^2)(a^2-k^2)}$$

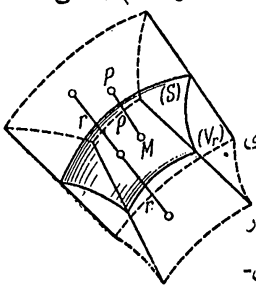
و ازاین راه می‌توان مقدار انتگرال فوق را ــ که به طریق‌عادی دشوار است ــ پیداکرد.

درپایان، دوکاربرد جالب از دستور (۸) را می‌آوریم، که رابطه بین‌مفهوم مساحت سطح خمیده و طول منحنی را با مفهوم حجم جسم (که معمولا ساده‌تراست) به‌نمایش‌دهد.

۱۱) سطح هموار (S) را درنظر می‌گیریم:

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$$

درضمن، در حوزهٔ (Δ) تغییر پارامترهای u و v، این‌تابع‌دارای مشتق‌های پیوستهٔ مرتبهٔ دوم هم می‌باشد.



شکل۱۱۴

روی قائم برسطح، درهر نقطهٔ M آن، به‌طور متقارن در هردو طرف سطح، پاره خطهایی به طول $r>0$ را جدا می‌کنیم. این‌پاره خطها، جسمی مثل (V_r) را پرمی‌کنند که، سطح

مفروض هم، در آن واقع است*.

مختصات نقطهٔ M سطح را (x, y, z) و مختصات نقطهٔ دلخواه P واقع برپاره‌خط قائم دراین نقطه را (X, Y, Z) می‌گیریم. به روشنی خواهیم داشت:

$$X=x+\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\rho,\quad Y=y+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\rho,$$

$$Z=z+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\rho$$

که در آن، A و B و C مقدارهای عادی و ρ به‌معنای فاصلهٔ MP است (باعلامت مربوطه، به نحوی که $-r\leqslant\rho\leqslant r$). به‌این ترتیب، پارامترهای (u, v, ρ)، مختصات منحنی‌الخط نقطه‌های مفروض (V_r) می‌شوند. با توجه به دستور (۸)، حجم V_r این جسم، برابر است با

$$V=\iiint\left|\frac{D(X, Y, Z)}{D(u, v, \rho)}\right|dudvd\rho$$

ازطرف دیگر داریم:

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(u, v, \rho)}=\begin{vmatrix} x'_u+\alpha_1(u, v)\rho & y'_u+\alpha_2(u, v)\rho & z'_u+\alpha_3(u, v)\rho \\ x'_v+\beta_1(u, v)\rho & y'_v+\beta_2(u, v)\rho & z'_v+\beta_3(u, v)\rho \\ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{vmatrix}=$$

$$=\sqrt{A^2+B^2+C^2}+\gamma_1(u, v)\rho+\gamma_2(u, v)\rho^2$$

که در آن، α_1، α_2، α_3، β_1، β_2، β_3، γ_1 و γ_2، تابع‌های پیوسته‌ای از u و v هستند. روشن است که، این‌عبارت، برای‌مقدارهای به‌اندازهٔ کافی کوچک r (با توجه به $|\rho|\leqslant r$)، همان علامت جمله اول‌را خواهد داشت، یعنی مثبت است. بنابراین

$$V_r=\int_{-r}^{r}d\rho\iint_{(\Delta)}[\sqrt{A^2+B^2+C^2}+\gamma_1\rho+\gamma_2\rho^2]dudv=$$

$$=2r\iint_{(\Delta)}\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv+Lr^3\quad(L=\text{const.})$$

---

*) می‌توان ثابت کرد که، اگر rها را به‌قدر کافی کوچک بگیریم، پاره‌خط‌های مفروض یکدیگر را قطع نمی‌کنند، به‌نحوی که هر نقطهٔ جسم، متناظر با یک قائم است.

وسرانجام، به سادگی، به‌این نتیجه می‌رسیم:

$$\lim_{r\to 0}\frac{V_r}{2r}=\iint_{(\Delta)}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv.$$

ومی‌دانیم که انتگرال اخیر همان مساحت S سطح‌خمیده است. به‌این‌ترتیب، این مساحت را می‌توان باآغاز از حجم به‌دست آورد.

۱۲) منحنی هموار زیررا درنظر می‌گیریم:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T)$$

درضمن، فرض‌می‌کنیم، تابع‌های x و y و z، دارای مشتق‌های‌دوم پیوسته باشند. برصفحهٔ قائم برمنحنی در نقطهٔ دلخواه M، دایره‌ای به‌شعاع $r>0$ و به مرکز نقطهٔ M در نظرمی‌گیریم. ازمجموعهٔ این دایره‌ها، جسم (V_r) تشکیل می‌شودکه شامل منحنی مفروض است*.

بدون این‌که به‌کلی بودن مطلب لطمه‌ای واردشود، می‌توان فرض‌کردکه درهربخش مورد نظر از منحنی داشته باشیم: $x_t'^2+y_t'^2>0$. دراین صورت، اگربخواهیم در صفحهٔ مفروض، که قائم بر منحنی است، دستگاه مختصات دکارتی را بسازیم، می‌توانیم به عنوان محورهای مختصات، دوقائم عمود برهم را باکسینوس‌های هادی زیرانتخاب‌کنیم:

$$\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\ -\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\ 0\quad\text{و}\quad \frac{x'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

$$\frac{y'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\ -\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

اگر مختصات را با u و v نشان دهیم، می‌توانیم مختصات X و Y و Z هرنقطهٔ P ازجسم (V_r) را، به‌این ترتیب، بیان‌کنیم:

$$X=x+\frac{y'u}{\sqrt{x'^2+y'^2}}+\frac{x'z'v}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

$$Y=y-\frac{x'u}{\sqrt{x'^2+y'^2}}+\frac{y'z'v}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

---

*) دراین‌جا هم می‌توان ثابت‌کردکه، اگر r را به‌قدرکافی کوچك بگیریم، این دایره‌ها، نقطه‌های مشترکی نخواهند داشت، به‌نحوی‌که هرنقطهٔ جسم، تنها به‌یکی‌از دایره‌ها، تعلق‌دارد.

$$Z=z-\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}v$$

در این‌جا (t, u, v)، نقش مختصات منحنی‌الخط نقطهٔ P را به‌عهده دارند، به نحوی‌که

$$V_r=\iiint\left|\frac{D(X, Y, Z)}{D(t, u, v)}\right|dtdudv$$

ولی به‌سادگی معلوم می‌شود که

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(t, u, v)}=$$

$$=\begin{vmatrix} x'+\alpha_1(t)u+\beta_1(t)v & y'+\alpha_2(t)u+\beta_2(t)v & z'+\alpha_3(t)u+\beta_3(t)v \\ \dfrac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} & \dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} & 0 \\ \dfrac{x'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} & \dfrac{y'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} & -\dfrac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \end{vmatrix}=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}+\alpha(t)u+\beta(t)v$$

که در آن، α_1، ...، β، تابع‌های پیوسته‌ای از t هستند. این عبارت، برای مقدارهای به قدر کافی کوچك r، مثبت خواهد بود (زیرا $|v|\leqslant r$ و $|u|$). در این صورت

$$V_r=\int_{t_0}^{T}dt\iint_{u^2+v^2\leqslant r^2}[\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}+\alpha(t)u+\beta(t)v]dudv=$$

$$=\pi r^2\int_{t_0}^{T}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt+\iint_{u^2+v^2\leqslant r^2}(Ku+Lv)dudv$$

که در آن، K و L، مقدارهایی ثابت‌اند. انتگرال اول، طول s کمان است و انتگرال دوم به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین:

$$V_r = \pi r^2 s, \quad s = \frac{V_r}{\pi r^2}$$

طول کمان، به‌طور مستقیم از روی حجم به دست می‌آید، حتی بدون این‌که نیازی به عبور حدی باشد.

۶۶۱. تغییر متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه. به کمک عبارت حجم در مختصات منحنی‌الخط، به سادگی می‌توان دستور تغییر متغیر را در انتگرال‌های سه‌گانه به دست آورد.

فرض کنید، بین حوزه‌های (D) و (Δ) از فضاهای xyz و $\xi\eta\zeta$، تناظری برقرار باشد که در شمارهٔ ۶۵۵ مشخص شده است. با رعایت همهٔ شرط‌هایی که، به ازای آن‌ها، دستور (۸) را پیدا کردیم، ثابت می‌کنیم که، برابری زیر برقرار است:

$$\iiint\limits_{(D)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \tag{۱۰}$$

$$= \iiint\limits_{(\Delta)} f\Big(x(\xi, \eta, \zeta),\ y(\xi, \eta, \zeta),\ z(\xi, \eta, \zeta)\Big)\Big|J(\xi, \eta, \zeta)\Big|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

(که در آن، $J(\xi, \eta, \zeta) = \dfrac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$)؛ و این، کاملا شبیه دستور تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه است. در ضمن، تابع $f(x, y, z)$ را پیوسته می‌گیریم، و یا بیشتر از آن، فرض می‌کنیم، تنها در طول تعداد محدودی سطح‌های قطعه به قطعه هموار، ناپیوسته باشد (ولی در هر حال، محدود بودن خود را حفظ کند). به این ترتیب، در وجود هر دو انتگرال، در برابری (۱۰)، تردیدی پیدا نخواهد شد؛ تنها باید خود برابری را ثابت کرد.

برای اثبات، کاملا شبیه شمارهٔ ۶۵۹ عمل می‌کنیم. اگر حوزه‌های با سطح‌های قطعه به قطعه هموار (D) و (Δ) را، به بخش‌های جزئی (ومتناظر یکدیگر) (D_i) و (Δ_i) تقسیم کنیم $(i = ۱, ۲, \dots, n)$، و برای هر زوج حوزهٔ (D_i) و (Δ_i)، دستور (۷) را به‌کار بریم، به دست می‌آید:

$$D_i = |J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)|\Delta_i \tag{۱۱}$$

که در آن، $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)$، نقطه‌ای است از حوزهٔ (Δ_i)، بدون ارتباط به انتخاب ما. نقطهٔ متناظر آن را، $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم:

$$\bar{x}_i = x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i),\quad \bar{y}_i = y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i),\quad \bar{z}_i = z(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i) \tag{۱۲}$$

و مجموع انتگرالی را، برای انتگرال اول (۱۰)، تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma=\sum_i f(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i,\ \bar{z}_i)D_i$$

به‌جای $\bar{x}_i$، $\bar{y}_i$، $\bar{z}_i$، از (۱۲) و به جای D_i از (۱۱) قرار می‌دهیم؛ به‌مجموع

$$\sigma=\sum_i f(x(\bar{\xi}_i,\ \bar{\eta}_i,\ \bar{\zeta}_i),\ y(\bar{\xi}_i,\ \bar{\eta}_i,\ \bar{\zeta}_i),\ z(\bar{\xi}_i,\ \bar{\eta}_i,\ \bar{\zeta}_i))|J(\bar{\xi}_i,\ \bar{\eta}_i,\ \bar{\zeta}_i)|\Delta_i$$

می‌رسیم که مجموع انتگرالی برای انتگرال دوم از (۱۰) است.

اگر قطرهای حوزهٔ (Δ_i) را به سمت صفر میل دهیم، با توجه به پیوستگی تناظر، قطرهای حوزهٔ (D_i) هم به سمت صفرمیل می‌کنند. مجموع σ، باید در عین حال، به سمت هردو انتگرال میل کند و، درنتیجه، به برابری مطلوب می‌رسیم.

مثل حالت انتگرال‌های دوگانه، دراین‌جا هم، دستور (۱۰) با نادیده‌گرفتن پیش‌شرط‌هایی که برای اثبات دستور (۸)، برای نقطه‌های جداگانه یا درطول تعداد محدود منحنی‌ها وسطح‌های قطعه‌به‌قطعه هموار داشتیم، به قوت خود باقی‌است، تنها به‌این‌شرط که ژاکوبین همیشه محدود باشد.

می‌توان شرط‌های کاربرد پذیری دستور (۱۰) را وسیع‌ترکرد وتا انتگرال‌های ناویژه پیش رفت. ازخواننده می‌خواهیم، باتوجه به‌آن چه درشمارهٔ **۶۱۷** دیده‌ایم، مطلب را دراین مورد تنظیم کند. براین نکته تأکید می‌کنیم که، وجود یکی‌از انتگرال‌های (۱۰) به معنای وجود دیگری‌است و، بنابراین، بافرض وجود یکی‌ازانتگرال‌های (۱۰)، دستور (۱۰)، با توجه به شرط‌های لازم، برقرار است.

درپایان یادآوری می‌کنیم که دستورهای (۸) و(۱۰) را می‌توان بدون علامت‌قدر-مطلق، برای ژاکوبین نوشت. برای این منظور، باید مفهوم جسم توجیه شده (جسمی که دارای جهت باشد) را، در رابطه باتوجیه محدودهٔ آن، واردکرد، سپس، باتوجه به جهت آن، علامت موردنظر را برای حجم و انتگرالی‌که نسبت به‌جسم در نظرگرفته شده است، انتخاب‌کرد. تفصیل بحث را، باتوجه به شمارهٔ **۶۱۶** ویادداشت ۱° در شمارهٔ **۶۵۸** به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۶۶۲. مثال‌ها. ۱) این انتگرال را محاسبه‌کنید:

$$I=\iiint_{(V)}\frac{xyz}{x^2+y^2}dxdydz$$

که درآن، (V) جسمی است‌که ازبالا محدود به‌سطح

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$$

واز پایین محدود به‌صفحهٔ $z=0$ است.

حل. به مختصات کروی می‌رویم. معادلهٔ سطح، به‌این‌صورت در می‌آید:

$$r^2 = a^2 \sin^2\varphi \sin\theta\cos\theta$$

و انتگرال، با توجه به تقارن جسم نسبت به‌محور z، چنین می‌شود:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} r^3 \sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\, dr =$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^3\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \frac{a^4}{144}$$

۲) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$H = \iiint_{\substack{x,y,z\geqslant 0 \\ x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}} \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2}} \quad (\alpha>\beta>\gamma>0)$$

[با ۶۴۸، ۱۱) مقایسه کنید].

حل. در مختصات کروی

$$H = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R} r^4 \frac{r^4\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+\gamma^2\cos^2\varphi}}$$

بهتر است $\sin^2\varphi = u$ و $\sin^2\theta = v$ بگیریم. در این‌صورت

$$H = \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 r^4 \frac{u\,dr\,du\,dv}{\sqrt{\beta^2u(1-v)+\beta^2uv+\gamma^2(1-u)}} =$$

$$= \frac{R^5}{20}\int_0^1 u\,du \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{[\gamma^2+(\alpha^2-\gamma^2)u]+(\beta^2-\alpha^2)uv}} =$$

$$= \frac{R^5}{15}\,\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}$$

۳) این انتگرال‌را محاسبه کنید:

$$K=\iiint_{(V)}\frac{xyzdxdydz}{x^2+y^2+z^2}$$

که در آن، (V) عبارت است از بیضوی سه محوری

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$$

حل. اگر با توجه به رابطه‌های زیر، به مختصات کروی تعمیم یافته برویم:

$$x=ar\sin\varphi\cos\theta,\quad y=br\sin\varphi\sin\theta,\quad z=cr\cos\varphi$$

$$J=abcr^2\sin\varphi$$

آن وقت، انتگرال به‌این صورت درمی‌آید:

$$K=a^2b^2c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\frac{\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta dr d\varphi d\theta}{a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+C^2\cos^2\varphi}$$

$\sin^2\varphi=u$ و $\sin^2\theta=v$ می‌گیریم، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$K=\frac{a^2b^2c^2}{8(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}\left(b^2c^2\ln\frac{c}{b}+c^2a^2\ln\frac{a}{c}+a^2b^2\ln\frac{b}{a}\right)$$

۴) انتگرال تکراری زیررا محاسبه کنید:

$$\int_1^{\infty}dz\int_1^{\infty}ydy\int_0^{\frac{1}{yz}}e^{xyz}x^2dx$$

حل. آن را به انتگرال سه‌گانهٔ زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\iiint_{\substack{x\geqslant 0,\ y,z\geqslant 1\\ xyz\leqslant 1}}e^{xyz}x^2ydxdydz$$

سپس، این تبدیل‌ها را انجام می‌دهیم:

$$x=u,\quad y=\frac{u+v}{u},\quad z=\frac{u+v+w}{u+v}$$

$$J=\frac{1}{u(u+v)}$$

انتگرال، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\iint\limits_{\substack{u,\,v,\,w\geqslant 0\\ u+v+w\leqslant 1}} e^{u+v+w}\,du\,dv\,dw$$

که به سادگی قابل محاسبه است. پاسخ: $\frac{e}{2}-1$.

۵) به محاسبهٔ انتگرال دوگانهٔ

$$B=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}\cos x\xi\cos y\eta\,dx\,dy$$

برمی‌گردیم [با ۶۱۷، ۲۱) مقایسه کنید]. چون برای $b>0$ داریم:

$$\int_0^\infty e^{-\theta^2-\frac{b}{4\theta^2}}\,d\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\sqrt{b}}$$

[۴۹۷، ۸)]، بنابراین با فرض $b=a\sqrt{x^2+y^2}$، به دست می‌آید:

$$e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\theta^2-\frac{a^2(x^2+y^2)}{4\theta^2}}\,d\theta$$

که اگر آن را در انتگرال B قراردهیم، با تغییر ردیف انتگرال‌ها، به‌دست می‌آید:

$$B=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\theta^2}\,d\theta\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{a^2(x^2+y^2)}{4\theta^2}}\cos x\xi\cos y\eta\,dx\,dy$$

و با فرض $u=\frac{ax}{2\theta}$, $v=\frac{ay}{2\theta}$:

$$B=\frac{8}{\sqrt{\pi}a^2}\int_0^\infty e^{-\theta^2}\theta^2\,d\theta\left[\int_0^\infty e^{-u^2}\cos\frac{2\theta u\xi}{a}\,du\int_0^\infty e^{-v^2}\frac{2\theta v\eta}{a}\,dv\right]=$$

$$=\frac{8}{\sqrt{\pi}a^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\int_0^\infty e^{-\frac{\theta^2}{a^2}(a^2+\xi^2+\eta^2)}\theta^2\,d\theta$$

[۵۱۹، ۶) a)]. با انتگرال‌گیری جزء به جزء، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$B=\frac{\pi}{۲}\frac{a}{(a^۲+\xi^۲+\eta^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

تبدیل انتگرال‌گیری، براساس وجود انتگرال سه‌گانه، انجام گرفت.

۶) مطلوب است جرم و تعیین موضع مرکز ثقل کرهٔ

$$x^۲+y^۲+z^۲\leqslant ۲az$$

به شرطی‌که قانون توزیع جرم، چنین باشد:

$$\rho=\frac{k}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}$$

[با ۶۵۰، ۵) مقایسه‌کنید].

راهنمائی. به مختصات کروی بروید.

۷) یك نقطهٔ دلخواه فضا، چه جاذبه‌ای را از طرف کـرهٔ همگن تحمل می‌کند [با ۶۵۰، ۹) مقایسه شود].

حل. باعبور به مختصات کروی، به‌دست می‌آید:

$$F_z=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\int_۰^{R}\frac{\rho r^۲(r\cos\varphi-a)\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta}{(r^۲+a^۲-۲ar\cos\varphi)^{\frac{۳}{۲}}}$$

ولی، با تعیین جاذبهٔ قشر کروی [۶۳۳، ۱۱)]، مقدار انتگرال دوگانه را پیدا کرده‌ایم:

$$\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\frac{(r\cos\varphi-a)\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta}{(r^۲+a^۲-۲ar\cos\varphi)^{\frac{۳}{۲}}}=\begin{cases}۰ & (a<r)\\ -\dfrac{۴\pi}{a^۲} & (a>r)\end{cases}$$

ودراین حالت، به‌ازای $a>R$

$$F_z=-\frac{۴\pi\rho}{a^۲}\int_۰^{R}r^۲dr=-\frac{۴}{۳}\pi R^۳\rho.\frac{۱}{a^۲}$$

و برای $a<R$.

$$F_z = -\frac{۴\pi\rho}{a^۲}\int_۰^a r^۲ dr = -\frac{۴}{۳}\pi\rho a$$

۸) پتانسیل کرهٔ همگن را برنقطهٔ دلخواه پیدا کنید [با ۶۵۰، ۱۲) مقایسه کنید].
راهنمائی. به‌مختصات کروی بروید واز نتیجهٔ مسألهٔ ۱۲) شمارهٔ ۶۳۳ استفاده کنید.
۹) مسأله‌های مربوط به‌جاذبه و پتانسیل کره را دوباره حل کنید، با این‌شرط که جرم، طبق قانون کلی

$$\rho = f(r)$$

توزیع شده باشد. f تابع غیرمشخصی ازفاصلهٔ نقطه تا مرکزاست.
یادآوری می‌کنیم، نتیجه‌هایی که در ۶۵۰، ۹) و ۱۲) به‌دست آوردیم، دراین حالت هم، برقرارند.
۱۰) گشت‌آورهای مانند I_z و I_x چنبره را پیدا کنید [با ۶۵۰، ۱۳) مقایسه کنید].
راهنمائی. باتوجه به این‌که، چنبره از دوران یك دایره به‌دست می‌آید [شکل ۱۰۸ را ببینید]، روشن است که موضع هرنقطهٔ این جسم را می‌توان، اولا با زاویهٔ φ، که مقطع استوائی با صفحهٔ xz تشکیل می‌دهد، وثانیاً، مختصات معمولی قطبی ρ و θ درمحدودهٔ این مقطع، تعیین کرد. دراین صورت

$$x = (d+\rho\cos\theta)\cos\varphi,\quad y = (d+\rho\cos\theta)\sin\varphi,\quad z = \rho\sin\theta$$

$$J = \rho(d+\rho\cos\theta)$$

در ضمن، ρ از ۰ تا a، و φ و θ از ۰ تا ۲π تغییر می‌کنند.
۱۱) محاسبهٔ پتانسیل بیضوی همگن ($\rho = ۱$)

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲} \leqslant ۱ \quad (a>b>c)$$

برمرکز آن، به یك انتگرال بیضوی منجر می‌شود.
مختصات کروی را وارد می‌کنیم، ولی این‌بار، محور x را محور قطبی می‌گیریم:

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi\cos\theta,\quad z = r\sin\varphi\sin\theta$$

خواهیم داشت:

$$W=\iiint_{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\leqslant 1}\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{\left(\frac{\cos\varphi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\varphi\cos\theta}{b}\right)^2+\left(\frac{\sin\varphi\sin\theta}{c}\right)^2}^{-1}}rdr=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{B\cos^2\theta+C\sin^2\theta},$$

که در آن: $B=\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}$ و $C=\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{c^2}$.

انتگرال درونی برابراست با $\frac{\pi}{2\sqrt{BC}}$. سپس، با فرض $t=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\cos\varphi$، به انتگرال بیضوی نوع اول می‌رسیم:

$$W=\frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2-c^2}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}t^2\right)}}$$

که به نوبهٔ خود، با تبدیل $t=\sin\lambda$، به فرم لژاندر منجر می‌شود:

$$W=\frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2-c^2}}\int_0^{\lambda_0}\frac{d\lambda}{\sqrt{1-k_0^2\sin^2\lambda}}=\frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2-c^2}}F(\lambda_0, k_0)$$

که در آن، برای سهولت‌کار، فرض شده است:

$$\lambda_0=\arcsin\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},\quad k_0=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$$

۶۶۳. جاذبهٔ ازطرف جسم و پتانسیل برنقطهٔ درونی. اکنون، به عبارت‌های کلی

(۱۷) و (۱۸) از شمارهٔ ۶۴۹ برمی‌گردیم که تصویر جاذبهٔ جسم در نقطهٔ $A(\xi, \eta, \zeta)$ را بر محورهای مختصات و پتانسیل براین نقطه را به دست می‌دهند، ولی به حالتی توجه می‌کنیم که، نقطهٔ A، متعلق به جسم باشد. این مطلب، بهانه‌ای است برای استفاده از تغییر متغیرها.

پیش‌از همه و به سادگی می‌توان نسبت به وجود انتگرال‌های ناویژه اطمینان حاصل کرد. کافی‌است، با انتخاب نقطهٔ A به‌عنوان قطب، به‌مختصات کروی برویم، تا این انتگرال‌ها، به انتگرال‌های ویژه تبدیل شوند. اگر ازجسم (V)، کرهٔ (v_0) را به شعاع r_0 و به مرکز A، جدا کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\iiint_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_0} \frac{r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta}{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_0} \rho r \sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

و به‌همین ترتیب

$$\iiint_{(v_0)} \frac{\rho(x-\xi)}{r^3} dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_0} \rho \cos\theta \sin^2\varphi dr d\varphi d\theta$$

وغیره. تابع‌های زیر انتگرال، دراین‌جا، تابع‌هایی پیوسته‌اند.*

اثبات رابطه‌های (۱۹) ازشمارهٔ ۶۴۹، برای حالت‌مورد بررسی‌ما، به‌دقت بیشتری نیاز دارد. دراین‌جا هم، مختصات کروی، کار را ساده‌تر می‌کند.

با توجه به برابری‌های بالا، نابرابری‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\iiint_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r} \leqslant 2\pi L r_0^2 \qquad (۱۳)$$

$$(L = \max\rho)$$

$$\left| \iiint_{(v_0)} \frac{\rho(x-\xi) dv}{r^3} \right| \leqslant 2\pi L r_0 \qquad (۱۴)$$

نمو h را به ξ می‌دهیم و درکنار نقطهٔ $A(\xi, \eta, \zeta)$، نقطهٔ $A_1(\xi+h, \eta, \zeta)$ راهم درنظر می‌گیریم. فاصلهٔ AM، از نقطهٔ A تا نقطهٔ دلخواه $M(x, y, z)$ از جسم را r، و فاصلهٔ A_1M را r_1 می‌نامیم. باید ثابت کنیم، وقتی h به‌سمت صفر میل کند، تفاضل زیرهم

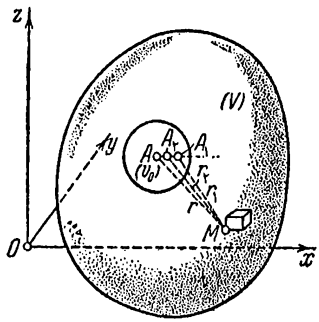
---

* چگالی ρ را، تابع پیوسته‌ای از مختصات به حساب می‌آوریم.

به سمت صفرمیل می‌کند:

$$\Delta=\frac{1}{h}\left\{\iiint\limits_{(V)}\frac{\rho dV}{r_1}-\iiint\limits_{(V)}\frac{\rho dV}{r}\right\}-\iiint\limits_{(V)}\frac{\rho(x-\xi)}{r^3}dV$$

کرهٔ (v_0) به‌شعاع $2|h|$ و به مرکز A را از جسم (V) جدا می‌کنیم (شکل ۱۱۵)؛



شکل ۱۱۵

دراین صورت، Δ به‌صورت مجموع چهار جمله درمی‌آید:

$$\Delta=\frac{1}{h}\iiint\limits_{(v_0)}\frac{\rho dv}{r_1}-\frac{1}{h}\iiint\limits_{(v_0)}\frac{\rho dv}{r}-\iiint\limits_{(v_0)}\frac{\rho(x-\xi)}{r^3}dv+$$

$$+\iiint\limits_{(V)-(v_0)}\rho\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)-\frac{x-\xi}{r^3}\right]dV$$

جمله‌های دوم و سوم را می‌توان بلافاصله، به‌کمك نابرابری‌های (۱۳) و (۱۴) به ازای $r_0=2|h|$، ارزیابی کرد:

$$\frac{1}{|h|}\iiint\limits_{(v_0)}\frac{\rho dv}{r}\leqslant\frac{2\pi L(2h)^2}{|h|}=8\pi L|h|$$

$$\left|\iiint\limits_{(v_0)}\frac{\rho(x-\xi)}{r^3}dv\right|\leqslant 2\pi L\cdot 2|h|=4\pi L|h|$$

برای این‌که جملهٔ اول را بهتر ارزیابی کنیم، کرهٔ (v_1) را به مرکز A_1 وشعاع $3|h|$ درنظر می‌گیریم؛ کرهٔ (v_0) کاملا در داخل این کره است. اکنون اگر دوباره از نابرابری (۱۳) استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{|h|}\iiint_{(v_0)}\frac{\rho dv}{r_1}\leqslant\frac{1}{|h|}\iiint_{(v_1)}\frac{\rho dv}{r_1}\leqslant\frac{2\pi L(3h)^2}{|h|}=18\pi L\cdot|h|$$

سرانجام به‌آخرین جمله می‌پردازیم. اگر تابع

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{r}$$

را واردکنیم، آن وقت، عبارت داخل آکولاد، برابر می‌شود با

$$\frac{f(\xi+h,\eta,\zeta)-f(\xi,\eta,\zeta)}{h}-f'_\xi(\xi,\eta,\zeta)$$

که بنابر دستور تیلور، می‌تواند این‌طور نوشته شود:

$$\frac{h}{2}f''_{\xi^2}(\xi+\theta h,\eta,\zeta)\quad(0<\theta<1)$$

ولی درحالت مورد بررسی داریم:

$$f''_{\xi^2}(\xi,\eta,\zeta)=\frac{3(x-\xi)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}$$

بنابراین

$$f''_{\xi^2}(\xi+\theta h,\eta,\zeta)\leqslant\frac{4}{r^3_2}$$

که درآن، r_2 عبارت است از فاصلهٔ A_2M، از نقطهٔ M تا نقطهٔ $A_2(\xi+\theta h,\eta,\zeta)$.
درمثلث AMA_2 (شکل را ببینید) داریم: $A_2M>AM-AA_2$. ولی نقطهٔ M در بیرون کرهٔ (v_0) به شعاع $2|h|$ و AA_2 کوچکتر از $|h|$ است، به نحوی که $AA_2<\frac{1}{2}AM$ و $A_2M>\frac{1}{2}AM$، یعنی $r_2>\frac{1}{2}r$. با درنظرگرفتن همهٔ این‌ها، به‌این ارزیابی می‌رسیم:

$$\left|\iiint_{(V)-(v_0)}\rho\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)-\frac{x-\xi}{r^3}\right\}dV\right|\leqslant 16L|h|\cdot\iiint_{(V)-(v_0)}\frac{dV}{r^3}$$

اکنون، کرهٔ (V_1) به مرکز A را درنظر می‌گیریم وشعاع R آن را طوری‌انتخاب می‌کنیم که جسم (V) به‌طور کامل درآن قرار گیرد. دراین صورت، عبارتی که به دست

آوردیم، به نوبهٔ خود، کوچکتر است ازعبارت

$$16L|h|\iiint_{(V_1)-(v_0)}\frac{dV}{r^3}=16L|h|\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{2|h|}^{R}\frac{\sin\varphi}{r}dr\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=64\pi L\cdot|h|(\ln R-\ln 2|h|)$$

و سرانجام

$$|\Delta|\leqslant C_1|h|+C_2|h|\ln 2|h|$$

C_1 و C_2، ثابت‌هایی هستندکه به سادگی قابل محاسبه‌اند. از این‌جا روشن است‌که Δ، همراه با h، به سمت صفر میل می‌کند، یعنی

$$\frac{\partial W}{\partial\xi}=F_x$$

به همین ترتیب، می‌توان دو رابطهٔ دیگر(۱۹) ازشمارهٔ ۶۴۹ را ثابت‌کرد. باهمین‌گونه ملاحظه‌ها، می‌توان پیوستگی مشتق‌های $\frac{\partial W}{\partial\xi}$، $\frac{\partial W}{\partial\eta}$ و $\frac{\partial W}{\partial\zeta}$ را، حتی برای نقطهٔ A که متعلق به‌جسم (V) است، ثابت‌کرد.

§۴. عنصرهای آنالیز بُرداری

۶۶۴. اسکالرها و بُردارها. استفادهٔ از محاسبهٔ انتگرالی در مسأله‌های فیزیك ریاضی و مکانیك، اغلب، به‌صورت برداری، راحت‌تر به‌انجام می‌رسد. به همین مناسبت، خواننده را با برخی‌از مفهوم‌های آنالیز برداری، که به تعبیر برداری تبدیل‌های انتگرالی و دستورهای محاسبه‌های انتگرالی مربوط می‌شوند، آشنا می‌کنیم.

فرض‌را براین می‌گیریم‌که، خواننده، با مفهوم اسکالر یا کمیت اسکالر، که‌با مقداری عددی مشخص می‌شود (مثل حجم، جرم، چگالی، دما وغیره) وهمچنین، با مفهوم بردار یا کمیت برداری، که برای تعیین‌آن توجه به‌جهت هم لازم است (مثل‌انتقال، سرعت، شتاب، نیرو غیره)، آشنا باشد. وقتی از بردار صحبت می‌کنیم، طبق معمول، آن را با پاره خطی جهت‌دار نشان می‌دهیم. در ضمن، برای نوشتن بردار، علامت پیکان را روی حرف معرف آن می‌گذاریم: A، r، v، ...؛ وقتی همین حرف‌ها را، بدون علامت پیکان نشان دهیم، به معنای طول آن‌هاست:

$$A=|\overrightarrow{A}|,\quad r=|\overrightarrow{r}|,\quad v=|\overrightarrow{v}|,\ldots$$

اگر حرف‌ها را، با اندیس بنویسیم، مثل A_x، r_y، v_n، ... منظورمان تصویر بردارهای $\overrightarrow{A}$، $\overrightarrow{r}$، $\overrightarrow{v}$، ...، به ترتیب، برمحورهای x، y، n، ... است. تصویرهای A_x، A_y، A_z از بردار $\overrightarrow{A}$ روی محورهای مختصات، بردار را هم ازنظر طول (مقدار عددی) وهم ازنظر جهت، کاملا مشخص می‌کنند.

همچنین، فرض‌را براین می‌گیریم که، خواننده، باآگاهی‌های پایه‌ای ازجبر برداری آشناست. کافی است به‌یادآوریم که، حاصل ضرب اسکالر (یا حاصل‌ضرب عددی) دو بردار $\overrightarrow{A}$ و $\overrightarrow{B}$، عبارت است از اسکالر (عدد)

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=AB\cos(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})$$

که برحسب تصویرهای برمحورها، این‌طور بیان می‌شود:

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad (۱)$$

حاصل‌ضرب برداری دو بردار $\overrightarrow{A}$ و $\overrightarrow{B}$، عبارت است از برداری به‌طول $|AB\sin(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})|$، عمود بر دو بردار و در جهتی که، برای آن، دوران از $\overrightarrow{A}$ به $\overrightarrow{B}$ (به اندازهٔ زاویه‌ای کمتر از ۱۸۰ درجه) در جهت مثلثاتی (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) به نظر آید. حاصل‌ضرب برداری را به‌صورت $\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}$ نشان می‌دهند. تصویرهای حاصل‌ضرب برداری برمحورها، چنین است.

$$A_yB_z-A_zB_y,\quad A_zB_x-A_xB_z,\quad A_xB_y-A_yB_x \qquad (۲)$$

به‌شرطی که مبنا را دستگاه مختصات مستقیم قرار داده باشیم [۶۲۰].

۶۶۵. میدان اسکالر (عددی) و میدان برداری. اگر به هرنقطهٔ M ازحوزهٔ‌فضایی معینی (که ممکن است تمامی فضا را هم دربرگرفته باشد)، یک کمیت اسکالر یا یک کمیت برداری نسبت دهیم، می‌گویند، میدان این کمیت‌ها اسکالر یا برداری است. در شماره‌های نزدیک بعدی، همه‌جا بااین‌گونه میدان‌ها سروکار خواهیم داشت.

نمونهٔ میدان اسکالر (عددی)، می‌تواند میدان دما یا پتانسیل الکتریکی باشد. اگر موضع نقطهٔ M به‌وسیلهٔ مختصات‌آن نسبت به دستگاه دلخواه مختصاتی $Oxyz$ معین‌شود، آن وقت، مفروض‌بودن میدان کمیت اسکالر U، به‌طور ساده، بامفروض بودن تابع عددی

$U(x, y, z)$ هم‌ارز است. همیشه، فرض‌ما براین است که، این‌تابع، نسبت به‌همهٔ متغیرهای خود، مشتق‌های نسبی پیوسته‌ای دارد. اگر این مشتق‌ها، باهم و به‌طور هم زمان، به سمت صفر میل نکنند، آن وقت معادلهٔ

$$U(x, y, z)=C \quad (C=\text{const.})$$

سطحی (بدون نقطه‌های خاص) را معین می‌کند که، درطول آن، کمیت U، مقدار ثابتی می‌ماند؛ چنین سطحی را، سطح تراز می‌نامند. هر حوزهٔ مورد نظر، به وسیلهٔ این سطح‌ها پر می‌شود، به‌نحوی که، از هر نقطهٔ این حوزه، یکی و تنها یکی از سطح‌های تراز می‌گذرد. روشن است که، سطح‌های تراز، با یکدیگر برخوردی ندارند.

نمونهٔ میدان برداری، میدان نیرو یا میدان سرعت است که، قبل‌ازاین هم، با آن‌ها برخورد داشته‌ایم. اگر مبنای کار را، یك دستگاه مختصاتی مثل $Oxyz$ بگیریم، آن وقت مفروض‌بودن میدان کمیت برداری $\vec{A}$، می‌تواند از طریق مفروض‌بودن تصویرهای آن برمحورها

$$A_x(x, y, z),\quad A_y(x, y, z),\quad A_z(x, y, z) \qquad (۳)$$

به‌عنوان تابع‌هایی‌ازمختصات نقطهٔ M (که‌کمیت $\vec{A}$ با آن بستگی دارد)، تحقق‌پذیرد. برای این تابع‌ها هم، فرض براین است که دارای مشتق‌های پیوسته‌ای باشند. در بررسی میدان برداری، منحنی‌های برداری نقش مهمی به‌عهده دارند؛ منحنی برداری به‌چنان منحنی گفته می‌شود که، جهت آن در هر نقطهٔ M آن، منطبق بر جهت‌بردار $\vec{A}$ باشدکه متناظر با این نقطه است. اگر به‌یاد آوریم [۲۳۴] که‌کسینوس‌های هادی مماس برمنحنی، با دیفرانسیل‌های dx، dy، dz متناسب‌اند، آن وقت متوجه می‌شویم که منحنی برداری را می‌توان با برابری‌های زیر مشخص کرد:

$$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}$$

با این‌فرض که بردار A به سمت صفرمیل نمی‌کند، می‌توان با تکیه بر «قضیهٔ وجودی» در نظریهٔ دستگاه‌های خطی معادله‌های دیفرانسیلی، ثابت کرد که، تمامی حوزهٔ مورد نظر، با منحنی‌های برداری پرمی‌شود و، درضمن، از هر نقطهٔ این حوزه، یکی و تنها یکی ازاین منحنی‌ها می‌گذرد. منحنی‌های برداری، یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

گاهی پیش می‌آید که با سطح‌هایی سروکار پیدا می‌کنیم که از منحنی‌های برداری

تشکیل شده‌اند؛ این گونه سطح‌ها را، سطح‌های برداری می‌نامند. سطح برداری را به‌این ترتیب می‌توان مشخص کرد که، در هر نقطهٔ M آن، بردار نظیر $\overrightarrow{A}(M)$، در صفحهٔ مماس برسطح دراین نقطه قرار می‌گیرد (یعنی، تصویر A_n بردار $\overrightarrow{A}$ برقائم n بر سطح، در همهٔ نقطه‌ها، برابرصفر می‌شود). اگر درسطح مورد بررسی، یك منحنی متمایز از منحنی برداری انتخاب کنیم و از هر نقطهٔ آن، منحنی بـرداری نظیررا رسم کنیم، آن گاه، مکان هندسی این منحنی‌ها، یك سطح برداری خواهد بود. در حالتی که منحنی «هادی» مذکور، بسته باشد، سطح برداری لوله مانندی به‌دست می‌آید که آن را لولهٔ برداری گویند.

۶۶۶. گرادیان. میدان اسکالر $U(M)=U(x, y, z)$ را مفروض می گیریم. بردار $\overrightarrow{g}$ با تصویرهای

$$\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial z} \qquad (۴)$$

برمحورها را، گرادیان کمیت U (در نقطهٔ نظیر) می‌نامند واین‌طور نشان می‌دهند:

$$\overrightarrow{g}=\operatorname{grad} U$$

این تعریف صوری، این نارسائی را دارد که از محورهـای مختصات استفاده می‌کند و، بنابراین، به‌طور طبیعی این‌پرسش پیش می‌آید که، گرادیان، به‌طورمستقل و بدون بستگی به انتخاب محورهای مختصات، چه مفهومی دارد!

برای اطمینان به استقلال این‌مفهوم، مشتق ازتابع نسبت به‌امتداد l، $\dfrac{\partial U}{\partial l}$ را به یاد می‌آوریم [جلد اول، ۱۸۴]، که معرف سرعت رشد تابع درامتداد l است. درآن‌جا، این دستور را داشتیم:

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$$

که درآن، $\cos\alpha$، $\cos\beta$، $\cos\gamma$، کسینوس‌های هادی امتداد lاند؛ اگر بردار واحد درهمین امتداد را $\overrightarrow{\lambda}$ بنامیم، آن وقت آن را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\operatorname{grad} U\cdot\overrightarrow{\lambda}=\operatorname{grad}_l U$$

روشن است که حداکثر مقدار این‌مشتق وقتی به‌دست می‌آید که جهت l برجهت گرادیان

.طبق باشد؛ درضمن، این مقدار حداکثر برابر است با

$$|\mathrm{grad}U|=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

این، ما را به تعریف زیر می‌رساند [با ۱۸۴ مقایسه شود]: گرادیان کمیت اسکالر U در قطهٔ مفروض، به برداری گفته می‌شودکه از نظرمقدار عددی واز نظرجهت، حداکثر سرعت شد کمیت U را مشخص می‌کند. این تعریف، هیچ ربطی به دستگاه مختصات ندارد.

به سادگی می‌توان متوجه شد کـه، جهت گرادیان، بر جهت قـائم بر سطح تراز $U(x, y, z)=$)، که از نقطهٔ مفروض می‌گذرد، منطبق است.

به‌این ترتیب، میدان اسکالر $U(M)$، میدان برداری گرادیان $\mathrm{grad}\,U$ را تولید ی‌کند.

هامیلتون (W. R. Hamilton)، بردار نمادی با تصویرهای

$$\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$$

محورهای مختصات را درنظرگرفت،که آن را «نابلا» نامید و با ∇ نشان داد. بااستفاده .این علامت، می‌توان نوشت:

$$\mathrm{grad}\,U=\nabla U$$

. واقع، اگر این «بردار» را، به‌طور صوری در اسکالر U «ضرب‌کنیم»، آن‌وقت بردار تصویرهای (۴) به دست می‌آید!

مثال‌ها. ۱) شعاع حامل $\overrightarrow{OM}$ را،که نقطهٔ ثابت O را به‌نقطهٔ متغیر M درفضا وصل ی‌کند، با $\vec{r}$ وطول آن را با r نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم:

$$U(M)=\varphi(r)$$

، درآن، φ عبارت است ازتابع اسکالر ازآوند (آرگومان) اسکالر مثبت r، ومی‌تواند لمت ثابت دلخواهی داشته باشد. روشن است‌که سطح‌های تراز عبارتند ازکره‌هایی به اع r وبه مرکز O، به‌نحوی‌که جهت گرادیان، بسته به‌این‌که $\varphi'(r)>0$ یا $\varphi'(r)<0$ شد، منطبق برجهت شعاع ویا درخلاف جهت‌آن است. به سادگی دیده می‌شود که

$$\mathrm{grad}\varphi(r)=(\varphi')(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

و درحالت خاص

$$\operatorname{grad}\frac{c}{r}=-\frac{c}{r^3}\vec{r}\quad(c=\text{const.})$$

اگرجرم m را در نقطهٔ O قراردهیم ومیدان جاذبهٔ نیوتونی را در نظربگیریم، آ وقت، فشار $\vec{F}$ آن برنقطهٔ M، چنین می‌شود:

$$\vec{F}=-\frac{m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=-\frac{m}{r^3}\vec{r}$$

و بنابراین

$$\vec{F}=\operatorname{grad}\frac{m}{r}$$

این پرسش‌که، آیا میدان برداری مفروض‌را می‌توان به‌عنوان میدان گرادیان برای یك کمیت اسکالر درنظر گرفت، اهمیت زیادی‌دارد. و درواقع، این مطلب، برای‌ما تازگی ندارد ومادر ۶۷۰ به‌آن برخواهیم گشت.

۲) میدان دمای U را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سطح جزئی (dS) وقائم n ر که جهت‌آن مشخص شده است، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، dQ، مقدار گرمایی‌باشا که ازاین سطح جزئی درجهت n ودرفاصلهٔ زمانی بی‌نهایت‌کوچك dt، جاری می‌شود گرما، از بخش‌های گرم‌تر ویا ازمحیط به بخش‌هایی که گرمای کمتری دارند، جاری می‌شود و هرقدرکه درجهٔ حرارت تندتر نزول‌کند، این جریان هم سریع‌تر است. معمولا گرمای مذکور dQ را متناسب با dS، dt و، بالاخره، $\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|$ می‌گیرند. اگرضریب تناسب را $k>0$ فرض‌کنیم («ضریب رسانایی درونی» برای موضع مفروض)، می‌توان‌نوشت:

$$dQ=-k\,dS\,dt\frac{\partial U}{\partial n}$$

بنابر آن چه گفته شد، درحالتی‌که $\frac{\partial U}{\partial n}$ منفی باشد (یعنی، وقتی‌که گرما، درجهت n، نزول کند)، مقدار گرمای dQ مثبت است.

اگر شاربردار گرما [فلوی بردار گرما] را واردکنیم

$$\vec{q}=-k\operatorname{grad}U$$

آن وقت، عبارت dQ را، می‌توان ساده‌تر نوشت:

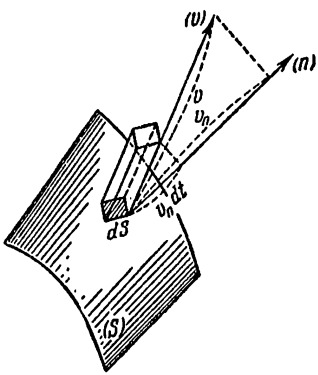
$$dQ = dS\,dt\,q_n$$

۶۶۷. شاربردار [فلوی بردار] ازطریق سطح. اکنون،میدان برداری $\vec{A}(M)$، یعنی سه تابع (۳) را، مفروض می‌گیریم. سطح (S) را درنظرمی‌گیریم، رویهٔ معینی ازاین‌سطح را انتخاب می‌کنیم و $\cos\lambda$، $\cos\mu$، $\cos\nu$ را کسینوس‌های هادی قائم جهت‌دار n، متناظر با رویهٔ انتخابی، می‌نامیم. دراین صورت، انتگرال روی سطح

$$\iint_{(S)} (A_x\cos\lambda + A_y\cos\mu + A_z\cos\nu)\,dS$$

که می‌توان، آن را، به‌صورت کوتاه‌تر

$$\iint_{(S)} A_n\,dS$$



شکل ۱۱۶

نوشت، شاربردار $\vec{A}$ از طریق سطح (S) در رویهٔ مفروض‌آن، نامیده می‌شود.

چند مثال. ۱) خود نام‌گذاری «شار» [فلو«flu»]، مربوط به مسأله‌ای از هیدرو-مکانیک است. حرکت مایع را درفضا درنظر می‌گیریم؛ درحالت‌کلی، فرض می‌کنیم، این مایع، ساکن نباشد، به‌نحوی‌که سرعت حرکت $\vec{v}$، نه‌تنها به‌موضع نقطهٔ M، بلکه به زمان t هم، بستگی داشته باشد. اکنون، این مسأله را طرح می‌کنیم: مطلوب است محاسبهٔ مقدار مایعی‌که از طریق سطح (S) و درجهت معین، درفاصلهٔ زمانی بی‌نهایت‌کوچك dt، جریان پیدامی‌کند. ازطریق سطح‌جزئی (dS)، آن‌قدر مایع‌جاری می‌شودکه می‌تواند استوانه‌ای با قاعدهٔ dS وارتفاع $v_n dt$ را پرکند (شکل ۱۱۶)، که درآن، قائم n، مربوط به همان رویهٔ انتخابی‌سطح است. اگرچگالی‌مایع را ρ بنامیم، که به نوبهٔ خود می‌تواند به‌موضع نقطه و به زمان بستگی داشته باشد، جرم مایعی که از طریق dS جریان می‌یابد، برابر می‌شود با

$$\rho\,dS\,v_n\,dt$$

وبرای تمامی سطح (S) به‌دست می‌آید:

$$dt\iint_{(S)}\rho v_n dS$$

و مقدار Q، مایعی که در واحد زمان جاری می‌شود، بااین انتگرال بیان خواهد شد:

$$Q=\iint_{(S)}\rho v_n dS \qquad (۵)$$

که در آن، ρv_n، عبارت است از «شار بردار» $\overrightarrow{\rho v}$ ازطریق سطح (S).

۲) دربارهٔ شارگرما هم، به‌همین ترتیب می‌توان صحبت کرد. به‌سادگی دیده می‌شود [باتوجه به نام‌گذاری‌های شمارهٔ ۶۴۱، ۲)]، مقدار گرمایی که درزمان dt ازطریق سطح (S) جاری می‌شود، برابر است با

$$dt\iint_{(S)}q_n dS$$

و اگرمقدار گرمای جاری در واحد زمان را بخواهیم:

$$\iint_{(S)}q_n dS$$

یعنی، «شاربردار» $\overrightarrow{q}$ از طریق سطح (S). به همین مناسبت، بردار

$$\overrightarrow{q}=-k\,\mathrm{grad}\,U$$

را «بردار شارگرما» می‌نامند.

یادداشت. در هردو فرایند ۱) و ۲)، مقدار Q، به‌طورکلی، بستگی به زمان دارد و خصلتی شبیه سرعت دارد. به‌همین مناسبت، می‌توان آن را، به‌عنوان سرعت افزایش مقدار مایع (یا مقدار گرمای) جاری از (S) در لحظهٔ زمانی موردنظر، به حساب آورد.

۳) میدان جاذبهٔ نیوتونی را [که در ۶۶۶، ۱) دربارهٔ آن صحبت کـردیم] در نظر می‌گیریم:

$$\overrightarrow{F}=-\frac{m}{r^3}\overrightarrow{r}$$

دراین‌صورت، شاراین بردار ازطریق‌سطح (S)، یعنی

$$\iint_{(S)} F_n dS = -m \iint_{(S)} \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS$$

به زاویهٔ مجسمه‌ای بستگی پیدا می‌کند که، تحت آن، سطح (S) از نقطهٔ O دیده می‌شود [۶۵۳].

۶۶۸. دستور استروگرادسکی. واگرائی (دیورژانس). به‌حالت کلی میدان برداری $\vec{A}$ برمی‌گردیم. جسم (V) را در نظر می‌گیریم که باسطح بستهٔ (S) محدود شده باشد؛ و قائم بیرونی بر سطح (S) را n می‌نامیم. بنابر دستور استروگرادسکی [۶۵۱، (۵)]، به شرطی که در آن $P = A_x$، $Q = A_y$، $R = A_z$ بگیریم، می‌توان شار بردار $\vec{A}$ از طریق سطح بیرونی (S) را، به صورت انتگرال سه‌گانه نشان داد:

$$\iint_{(S)} A_n dS = \iint_{(S)} (A_x \cos\lambda + A_y \cos\mu + A_z \cos\nu) dS =$$

$$= \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV$$

عبارتی که زیر انتگرال سه گانه قرار دارد، واگرائی (یا دیورژانس) بردار $\vec{A}$ (در نقطهٔ مربوطه) نامیده می‌شود و آن را به‌صورت زیر نشان می‌دهند.

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (۶)$$

بنابراین، دستور استروگرادسکی، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\iint_{(S)} A_n dS = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{A} dV \qquad (۷)$$

که درواقع، کاربردهای زیادی دارد.

مقداری که هم‌اکنون برای دیورژانس آوردیم، اسکالر است؛ ولی تعریف آن، در ظاهر، به انتخاب دستگاه مختصات مربوط می‌شود. برای این‌که ازاین‌نارسائی رهاشویم، به این ترتیب عمل می‌کنیم. نقطه M را به‌وسیلهٔ جسم (V) باسطح (S)، محصور می‌کنیم و دستور (۷) را می‌نویسیم؛ اگر دو طرف را به V، حجم جسم، تقسیم کنیم و، با منقبض‌کردن جسم (V) به‌سمت نقطهٔ M، به سمت مقدار حدی برویم، آن وقت [۶۴۴، ۸°] در

سمت راست $\overrightarrow{\operatorname{div}A}$ درنقطهٔ M به‌دست می‌آید. بنابراین

$$\overrightarrow{\operatorname{div}A}=\lim_{(V)\to M}\frac{\iint\limits_{(S)}A_n\,dS}{V} \qquad (۸)$$

وهمین برابری را می‌توان به‌عنوان تعریف دیورژانس پذیرفت؛ درضمن، در این تعریف، هیچ‌گونه بستگی به انتخاب دستگاه مختصات پیدا نمی‌کنیم.

این‌بار، میدان برداری $\overrightarrow{A}$، میدان اسکالر دیورژانس $\overrightarrow{\operatorname{div}A}$ را تولید می‌کند.

یادآوری می‌کنیم که، تعریف (۶) از دیورژانس را می‌توان، به‌کمك بردار نمادی هامیلتون، ∇، این‌طور نوشت:

$$\overrightarrow{\operatorname{div}A}=\nabla\cdot\overrightarrow{A}$$

اگرعبارت (۱)، حاصل‌ضرب اسکالردو بردار را به‌خاطرآوریم، این‌رابطه برایمان روشن می‌شود.

مثال. حرکت مایع تراکم ناپذیری را در نظر می‌گیریم ($\rho=۱$) که دارای سرچشمه‌ها (یا زیرآب‌ها) باشد. بهره‌دهی چشمه‌هایی که در درون سطح بستهٔ (S) باشند، به مقدار مایعی گفته می‌شود که ازطریق (S) در واحد زمان جریان پیدا می‌کند، یعنی‌همان شار بردار سرعت $\overrightarrow{v}$

$$\iint\limits_{(S)}v_n\,dS$$

[۱،۶۶۷] را ببینید]. اگرچشمه‌ها به‌صورتی پیوسته درحوزهٔ موردنظر توزیع شده باشند، مفهوم چگالی چشمه‌ها را وارد می‌کنیم. چگالی چشمه‌ها، به مقدار حدی بهره دهی چشمه‌ها درجسم (V)، که نقطهٔ M را احاطه کرده است، برای واحد حجم، گفته می‌شود، یعنی

$$\lim_{(V)\to M}\frac{\iint\limits_{(V)}v_n\,dS}{V}$$

ولی، همان‌طور که دیدیم [(۸) را ببینید]، این حد برابر است با $\overrightarrow{\operatorname{div}v}$؛ بنابراین $\overrightarrow{\operatorname{div}v}$

همان چگالی چشمه‌هاست.

به‌همین ترتیب می‌توان دربارهٔ شار گرما را، درحالتی که منبع‌های گرما وجوددارد، بررسی کرد، تنها باید به‌جای بردار سرعت، بردار شار گرما را درنظر گرفت.

۶۶۹. گردش (سیرکولاسیون) بردار. دستور ستوکس. طوفان (روتور). دوباره میدان برداری $\vec{A}(M)$ را درنظر می‌گیریم. انتگرال

$$\int_{(l)} A_x dx + A_y d_y + A_z d_z = \int_{(l)} A_l dl$$

که نسبت به منحنی (l)، واقع در محدودهٔ حوزهٔ مورد بررسی، گرفته شده است، انتگرال خطی بردار $\vec{A}$ درطول منحنی (l) نامیده می‌شود. در حالتی که منحنی بسته باشد، این انتگرال را، گردش (سیرکولاسیون) بردار $\vec{A}$ درطول (l) می‌نامند.

اگر میدان $\vec{A}$، میدان نیرو باشد، این انتگرال خطی، معرف کار نیروی میدان، ضمن جابه‌جایی نقطه برمنحنی (l) است [با **۵۵۴** مقایسه کنید].

سطح (S) را، که به‌وسیلهٔ دورهٔ بستهٔ (l) محصور شده است، در نظر می‌گیریم. به کمك دستور ستوکس [**۶۳۹**، (*۲۱)]، می‌توان گردش بردار $\vec{A}$ در طول این دوره را، با انتگرال روی سطح بیان کرد:

$$\int_{(l)} A_l dl = \iint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos\lambda + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos\mu + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos\nu \right\} dS$$

بردار با تصویرهای

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{Az}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \qquad (۹)$$

را، طوفان یا روتور وگاهی هم روتاسیون بردار $\vec{A}$ گویند و با نماد زیر نشان می‌دهند*:

---

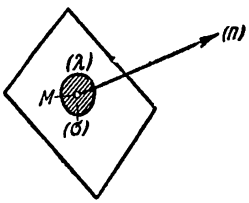
*) نماد rot ازواژهٔ انگلیسی rotation به معنی «گردش و دوران» گرفته شده‌است. گاهی‌هم از نماد curl $\vec{A}$ استفاده می‌کنند که از واژهٔ انگلیسی curl به‌معنای «تاب و پیچش» گرفته شده است.

$\overrightarrow{\mathrm{rot}A}$

به‌این ترتیب، دستور ستوکس، به‌صورت برداری خود، چنین می‌شود:

$$\int_{(l)} A_l dl = \iint_{(s)} \mathrm{rot}_n \overrightarrow{A} dS \qquad (۱۰)$$

سیرکولاسیون بردار درطول یك دورهٔ بسته، برابر می‌شود با شار روتاسیون از طریق سطحی که به‌وسیلهٔ این‌دوره محصور شده است. در ضمن، به‌نحوی که در شمارهٔ ۶۲۰ روشن کرده‌ایم، باید جهت حرکت روی دوره، متناظر با رویه‌ای باشد که از سطح انتخاب کرده‌ایم.



شکل ۱۱۷

تعریفی که، دراین‌جا، از «طوفان» کردیم، یك نارسائی دارد: در آن، از دستگاه مختصاتی معینی استفاده شده‌است. n جهت‌دار را درنقطهٔ M درنظر می‌گیریم؛ ازنقطهٔ M، صفحه‌ای عمود بر n رسم وروی‌آن، نقطهٔ M را به‌وسیلهٔ بخش (σ) بادورهٔ (λ) محصور می‌کنیم (شکل ۱۱۷). دراین صورت، بنا به دستور ستوکس

$$\int_{(\lambda)} A_\lambda d\lambda = \iint_{(\sigma)} \mathrm{rot}_n \overrightarrow{A} d\sigma$$

دوطرف‌را بر σ، مساحت بخش‌مذکور، تقسیم واین‌بخش‌را به‌سمت نقطهٔ مفروض «منقبض» می‌کنیم؛ درحد به‌دست می‌آید*:

$$\mathrm{rot}_n \overrightarrow{A} = \underset{(\sigma)\to M}{\text{حد}} \frac{\int_{(\lambda)} A_\lambda d\lambda}{\sigma}$$

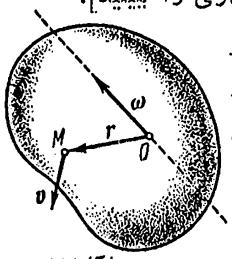
به‌این ترتیب، به تعریف تصویربردار $\overrightarrow{\mathrm{rot}A}$ بریك محور دلخواه و، در نتیجه، به تعریف خود این بردار می‌رسیم که هیچ گونه تکیه‌ای بردستگاه مختصات انتخابی ندارد.

تأکید می‌کنیم که، دراین‌جا هم، میدان برداری A، میدان برداری طوفان $\overrightarrow{\mathrm{rot}A}$

---

*) دراین‌جا دیفرانسیل‌گیری خاصی نسبت به‌حوزه دیده می‌شود که، بحث مربوط به‌آن را، به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

را به وجود می‌آورد. به‌کمك بردار هامیلتونی ∇ هم، می‌توان تعریف طوفان را نوشت: $\mathrm{rot}\vec{A}=\nabla\times\vec{A}$ [رابطهٔ (۲) مربوط به‌حاصل‌ضرب تصویربرداری را ببینید].



شکل ۱۱۸

مثال. حرکتی‌ازیك جسم صلب را درنظر می‌گیریم. اگر نقطهٔ O را در آن تثبیت کنیم (شکل ۱۱۸)، آن وقت، همان‌طور که در سینماتیك ثابت می‌شود، برای هر لحظهٔ زمانی، میدان سرعت $\vec{v}$ نقطه‌های جسم، با دستور زیر تعیین می‌شود:

$$\vec{v}=\vec{v^0}+\vec{\omega}\times\vec{r}$$

که در آن، $\vec{v^0}$، سرعت نقطهٔ O، $\vec{\omega}$ «سرعت زاویه‌ای» لحظه‌ای و $\vec{r}$ شعاع حاملی است که نقطهٔ O را به نقطهٔ دلخواه M ازجسم وصل می‌کند. تصویرهای این بردار برمحورهای دستگاه دلخواه $Oxyz$ چنین است [(۲) را ببینید]:

$$v_x^0+\omega_y z-\omega_z y,\quad v_y^0+\omega_z x-\omega_x z,\quad v_z^0+\omega_x y-\omega_y x$$

اگر، ضمن استفاده از (۹)، تصویرهای طوفان را برای این میدان محاسبه‌کنیم، به دست می‌آید: $2\omega_x$، $2\omega_y$، $2\omega_z$، به‌نحوی‌که $\vec{\omega}=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v}$.

بدین ترتیب، روتور میدان سرعت $\vec{v}$، با تقریب یك ضریب عددی، برابر است با سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای؛ و نام‌گذاری «روتور» از همین‌جاست.

۶۷۰. میدان‌های خاص. دراین‌شماره ودرشمارهٔ بعدی، برای سادگی کار، میدان‌هایی‌را موردبررسی قرار می‌دهیم که به‌حوزه‌های فضایی راست‌گوشه و، درحالت‌خاص، به تمامی فضای سه‌بعدی مربوط باشند.

۱) میدان پتانسیلی. میدان‌برداری $\vec{A}$ را میدان پتانسیلی گویند، وقتی‌که، کمیت اسکالر U وجود داشته باشد، به نحوی‌که $\vec{A}$ برای‌آن، گرادیان باشد.

$$\vec{A}=\mathrm{grad}U$$

این برابری، به‌سه برابری زیر تجزیه می‌شود [(۴) را ببینید]:

$$A_x=\frac{\partial U}{\partial x},\quad A_y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad A_z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

و هم‌ارز آن، این‌که عبارت

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

دیفرانسیل کامل تابع $U(x, y, z)$ است. تابع اولیهٔ U، تابع پتانسیلی (یا پتانسیل اسکالر) میدان $\vec{A}$ نامیده می‌شود.

این گزاره را، به نحو دیگری هم می‌توان بیان کرد [**۵۶۴** و **۶۴۱**؛ شرط (B) را ببینید]:

برای این که میدان $\vec{A}$، یک میدان پتانسیلی باشد، لازم و کافی است که، در تمامی حوزهٔ مورد بررسی، این برابری‌ها برقرار باشند:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

یعنی، $\overrightarrow{\mathrm{rot}\, A}$ به‌سمت صفر میل کند.

به‌این ترتیب، میدان پتانسیلی، چیزی جز میدان «بی‌طوفان» نیست.

با تکیه بر آن چه در شماره‌های **۵۶۴** و **۶۴۱** گفته‌ایم، می‌توان میدان پتانسیلی را، به‌این ترتیب مشخص کرد که، سیرکولاسیون بر دورهٔ بستهٔ ساده، همیشه صفر می‌شود و انتگرال خطی نسبت به منحنی و اصل بین دو نقطهٔ دلخواه میدان، بستگی به شکل منحنی ندارد.

خود تابع پیوستگی U هم، با تقریب یک جملهٔ ثابت دلخواه، با انتگرال خطی معین می‌شود:

$$\int_{(l)} A_x dx + A_y d_y + A_z dz = \int_{(l)} A_l dl$$

که از نقطهٔ ثابتی مثل M_0 تا متغیر M از حوزهٔ مورد نظر، روی منحنی دلخواه (l) که این نقطه‌ها را به‌هم وصل می‌کند، گرفته شده است.

همهٔ این‌ها را می‌توان با اصطلاح‌های مربوط به‌کار برای میدان نیروی پتانسیلی، به طور طبیعی تعبیر کرد. به‌همین ترتیب است، میدان جاذبهٔ نیوتونی، چه در حالت مرکزهای جداگانهٔ جاذبه و چه در حالت توزیع پیوستهٔ جرم‌های جاذبه.

۲) میدان سوله‌نوئیدی. میدان برداری $\vec{A}$، سوله‌نوئیدی یا لوله‌ای (از واژهٔ یونانی $\sigma o \lambda \varepsilon' \nu$، به‌معنی لوله) نامیده می‌شود، وقتی که کمیت برداری $\vec{B}$ وجود داشته باشد، به‌نحوی که $\vec{A}$ برای آن روتاسیون باشد:

$$\vec{A}=\operatorname{rot}\vec{B} \qquad (۱۱)$$

این بردار، به سه برابری زیر تجزیه می‌شود [(۹) را ببینید]:

$$A_x=\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\quad A_y=\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\quad A_z=\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y} \qquad (۱۲)$$

خود بردار $\vec{B}$ را، پتانسیل برداری میدان $\vec{A}$ گویند.

قضیهٔ زیر، شرطی‌را به‌ما می‌دهد که، به‌کمك آن، می‌توان سوله‌نوئیدی‌بودن را مورد تحقیق قرار داد:

برای آن که، میدان $\vec{A}$، سوله‌نوئیدی باشد، لازم و کافی است، برای همهٔ نقطه‌های حوزهٔ مفروض، داشته باشیم:

$$\operatorname{div}\vec{A}=۰ \qquad (۱۳)$$

شرط لازم‌است. بامحاسبهٔ مستقیم معلوم می‌شود که اگر $\vec{A}=\operatorname{rot}\vec{B}$، آن‌گاه [(۱۲) را ببینید]:

$$\operatorname{div}\vec{A}=\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=۰$$

شرط کافی‌است، فرض می‌کنیم برابری (۱۳) برقرار باشد. می‌کوشیم، دست‌کم جواب خاص (B_x, B_y, B_z) ازمعادله‌های (۱۲) را پیدا کنیم. به منظور ساده‌ترشدن کار، فرض می‌کنیم $B_z\equiv ۰$. دراین صورت، دومعادلهٔ اول (۱۲)، به‌این صورت درمی‌آیند:

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z}=A_x,\quad \frac{\partial B_x}{\partial z}=A_y$$

که اگر نسبت به z انتگرال بگیریم، این عبارت‌ها برای B_x و B_y به دست می‌آید:

$$B_y=-\int_{z_۰}^{z}A_x(x, y, z)dz+\varphi(x, y),\quad B_x=\int_{z_۰}^{z}A_y(x, y, z)dz$$

که درآن، $z_۰$ مقدار دلخواهی از مقدارهای ممکن z، و $\varphi(x, y)$ تابع معین ومناسبی از

دو متغیر است. اگر با توجه به قاعدهٔ لایب‌نیتس، از انتگرال‌ها مشتق بگیریم، به دست می‌آید:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_x}{\partial x} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial y} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_\chi}{\partial y} dz$$

با استفاده از برابری (۱۳)، برای آن‌که معادلهٔ آخر از معادله‌های (۱۲) صادق باشد، شرط زیررا برای تابع φ به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A_x(x, y, z_0)$$

به این ترتیب، به سادگی، می‌توان φ را با انتگرال‌گیری نسبت به x پیدا کرد (با تقریب جملهٔ دلخواهی نسبت به y).

به‌این ترتیب، حکم موردنظر ثابت می‌شود. توجه به‌این مطلب هم جالب است که، اگر پتانسیل برداری $\vec{B}$ را از معادلهٔ (۱۱) تعیین کنیم، تا چه‌حدی، آزادی خواهیم‌داشت. اگر $\vec{B}^{(0)}$ را جواب تثبیت شده‌ای از آن بگیریم، جواب کلی B، باشرط

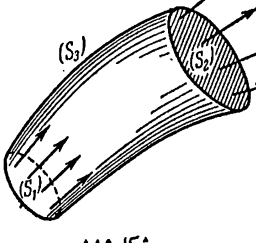
$$\mathrm{rot}(\vec{B} - \vec{B}^{(0)}) = 0$$

معین می‌شود و باتوجه به ۲)، به‌این صورت در می‌آید:

$$\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{C}$$

که در آن، $\vec{C}$ عبارت است ازیك بردار پتانسیلی.

از ملاحظه‌های شمارهٔ **۶۵۲** روشن می‌شود که، شرط (۱۳)، که معرف میدان سوله‌نوئیدی $\vec{A}$ است هم ارز با این شرط است که؛ شار بردار $\vec{A}$ از طریق سطح بستهٔ S (که جسمی مثل (V) را محدود می‌کند) برابر صفر است.



شکل ۱۱۹

اکنون، به‌عنوان جسم (V)، قطعه لولهٔ برداری را، بین دو مقطع دلخواه (S_1) و (S_2) آن، در نظر می‌گیریم (شکل ۱۱۹). سطح جانبی این قطعه لوله را (S_3) می‌نامیم. در این صورت، درحالت میدان سوله‌نوئیدی، بنا بر آن‌چه گفتیم، داریم:

$$\left\{\underset{(S_1)}{\iint}+\underset{(S_2)}{\iint}+\underset{(S_3)}{\iint}\right\}A_n dS=0$$

درضمن، قائم درجهت بیرونی نسبت به‌جسم، ممتد است. روشن است که در طول سطح (S_3) داریم: $A_n=0$ [۶۶۵]؛ اگر درمقطع (S_1)، جهت قائم‌ها را تغییر دهیم (به‌نحوی که، به مفهومی، موافق باجهت قائم‌های بر (S_2) باشد؛ شکل ۱۱۹ را ببینید)، آن وقت، بداین برابری می‌رسیم:

$$\underset{(S_1)}{\iint}A_n dS=\underset{(S_2)}{\iint}A_n dS$$

به‌این ترتیب، به‌ویژگی‌زیر، برای میدان سوله‌نوئیدی می‌رسیم: شاربردار ازمقطع عرضی لولهٔ‌برداری، مقداری است ثابت وآن را شدت لولهٔ‌برداری می‌نامند.

می‌توان ثابت کردکه، این ویژگی، میدان سوله‌نوئیدی را کاملا مشخص می‌کند.

این نتیجه را می‌توان، از دستور (۸)، برای واگرائی بردار $\vec{A}$ به دست‌آورد، به شرطی که به‌جای جسم (V)، که نقطهٔ M انتخابی را احاطه‌کرده است، قطعهٔ لولهٔ‌برداری را در نظربگیریم: دراین صورت

$$\underset{(S)}{\iint}A_n dS=0 \Longrightarrow \operatorname{div}\vec{A}=0$$

اگر به‌تعبیر هیدرومکانیکی میدان برداری برگردیم، معلوم می‌شودکه، در حالت مایع نافشرده وفقدان منبع‌ها $(\operatorname{div}\vec{v}=0)$، عبورمایع ازطریق مقطع عرضی لولهٔ‌برداری، برای همهٔ مقطع‌ها، مقدار ثابتی است.

۳) تجزیهٔ یك میدان‌برداری. ثابت‌می‌کنیم، هر بردار دلخواه $\vec{A}$ را می‌توان به‌صورت مجموع بردار پتانسیلی $\vec{A'}$ وبردار سوله نوئیدی $\vec{A''}$ نشان داد:

$$\vec{A}=\vec{A'}+\vec{A''}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{A'}=0,\ \operatorname{div}\vec{A''}=0)$$

فرض می‌کنیم: $\vec{A'}=\operatorname{grad}\Phi$، که درآن، Φ تابع اسکالر معین مناسبی‌است؛ برابری

$\overrightarrow{A''}=\overrightarrow{A}-\text{grad}\Phi$، $\text{rot}\overrightarrow{A'}=\text{rot grad}\,\Phi=0$، براین اساس است. دراین‌صورت به نحوی که Φ را باید با این شرط انتخاب کرد:

$$\text{div}\overrightarrow{A''}=\text{div}\overrightarrow{A}-\text{div grad}\Phi=0$$

ازطرف دیگر

$$\text{div grad}\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\Delta\Phi$$

که منظور از $\Delta\Phi$، طبق معمول، عملگر لاپلاس است. به‌این‌ترتیب برای تعیین Φ، به‌معادلهٔ دیفرانسیلی با مشتق‌های نسبی درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$\Delta\Phi=\text{div}\overrightarrow{A}$$

که همیشه دارای جواب (وحتی بی‌نهایت جواب) است.

۶۷۱. مسألهٔ وارون آنالیز برداری. درواقع، می‌خواهیم میدان برداری $\overrightarrow{A}$، با مفروض بودن واگرائی $\text{div}\overrightarrow{A}=F$ (F، تابع اسکالر است) و طوفان $\text{rot}\overrightarrow{A}=\overrightarrow{B}$، را، به دست‌آوریم. باتوجه به ۲) روشن است، برای این‌که مساله قابل حل باشد، بایدشرط $\text{div}\overrightarrow{B}=0$ برقرار باشد؛ این شرط را مفروض می‌گیریم.

باتوجه به ۳)، طبیعی است که جواب $\overrightarrow{A}$ را به‌صورت مجموع $\overrightarrow{A'}$ و $\overrightarrow{A''}$، جواب دستگاه‌های زیر، جست وجو کنیم:

$$(۱)\quad \text{rot}\overrightarrow{A'}=0,\ \text{div}\overrightarrow{A'}=F;\quad (۲)\quad \text{rot}\overrightarrow{A''}=B,\ \text{div}\overrightarrow{A''}=0$$

(۱) از معادلهٔ اول، باتوجه به۱) به‌دست می‌آید: $\overrightarrow{A'}=\text{grad}\Phi$. برای تعیین$\Phi$، به معادلهٔ دوم متوسل می‌شویم:

$$\text{div grad}\Phi=F\quad \text{یا}\quad \Delta\Phi=F$$

به‌نحوی‌که Φ، عبارت است ازیکی از جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیلی آشنا.

(۲) چون $\text{div}\overrightarrow{B}=0$ (طبق فرض)، بنابراین، معادلهٔ اول دستگاه، دارای جواب

است*. $\vec{A}''_0$ را، جواب خاص تثبیت شده‌ای ازاین معادله می‌گیریم، جواب کلی آن را می‌توان به‌صورت $\vec{A}''=\vec{A}''_0+\vec{C}$ نوشت، که در آن، $\vec{C}$، عبارت است از بردار پتانسیلی دلخواهی، $\vec{C}=\mathrm{grad}\Phi$. این می‌ماند که معادلهٔ دوم دستگاه (۲) هم برقرار باشد، یعنی باید Φ را ازاین شرط به‌دست آوریم:

$$\mathrm{div}\vec{A}''=\mathrm{div}\vec{A}''_0+\Delta\Phi=0 \quad \text{یا} \quad \Delta\Phi=-\mathrm{div}\vec{A}''_0$$

مسأله حل‌شد. اکنون، حدآزادی انتخاب بردار مجهول $\vec{A}$ را تعیین می‌کنیم. به سادگی متوجه می‌شویم که، اختلاف دوجواب، عبارت است ازبردار $\vec{G}$، به نحوی‌که در دو معادلهٔ زیر صدق کند:

$$\mathrm{div}\vec{G}=0, \quad \mathrm{rot}\vec{G}=0$$

ازدومی به‌دست می‌آید $\mathrm{rot}\vec{G}=0$ و دراین‌صورت، ازاولی نتیجه می‌شود: $\Delta H=0$، که درآن، H عبارت است ازیك تابع همساز (هارمونیك). اگر بخواهیم، جواب منحصری برای $\vec{A}$ پیداکنیم، باید شرط‌های «محدودکننده‌ای» را درنظر بگیریم که، به ازای آن‌ها، جواب منحصری برای این‌تابع همساز به‌دست آید.

نتیجه‌هایی راکه در دو شمارهٔ اخیر به‌دست‌آوردیم، می‌توان درمورد حوزه‌های به صورت کلی هم گسترش داد، به شرطی‌که (براین شرط تأکید می‌کنیم)، هم‌بندی سادهٔ این یاآن نوع، رعایت شده باشد.

۶۷۲. کاربردها. درپایان این‌بند، مثال‌هایی در مورد استفادهٔ از آنالیز برداری و شکل‌های اصلی انتگرالی به‌صورت برداری، می‌آوریم. ازکاربرد دستور استروگرادسکی و مفهوم‌های مربوط به‌آن آغاز می‌کنیم.

۱°. **معادله‌های پیوستگی.** دوباره‌حرکت مایع‌را، وقتی سرچشمه‌ای برای‌آن وجود نداشته‌باشد، درنظرمی‌گیریم؛ ولی درحالت کلی، آن‌را فشارناپذیر فرض‌نمی‌کنیم. باتوجه به‌این‌که، تمام‌قضایا یابخشی ازآن، به‌وسیلهٔمایع کاملا پرمی‌شود، جسم دلخواه (V) راکه به سطح (S) است، ازمایع جدا می‌کنیم. می‌دانیم، مقدار Q مایع، که درواحد زمان به

---

*) توجه کنید که، در مقایسه با ۲، نام‌گذاری‌ها تغییر کرده‌اند.

بیرون جسم جاری می‌شود، از روی دستور (۵) به دست می‌آید. همین مقدار را، به‌نحو دیگری هم، می‌توانیم محاسبه کنیم. اگر تغییر چگالی ρ درفاصلهٔ زمانی dt را، به اندازهٔ $\frac{\partial\rho}{\partial t}dtdV$ به‌حساب آوریم، آن وقت جرم ρdV ازجسم جزئی (dV)، به‌اندازهٔ $\frac{\partial\rho}{\partial t}dt$ تغییر می‌کند وجرم تمامی این جسم به‌اندازهٔ

$$dt\iiint_{(V)}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

این مقدار مایع، باید درفاصلهٔ زمانی dt، به درون جسم جریان یابد؛ اگرعلامت آن را عوض کنیم، به‌مقدارمایعی می‌رسیم که، دراین فاصلهٔ زمانی، به‌بیرون جاری می‌شود. به‌این ترتیب، اگر مقدار مایع جاری درواحد زمان را درنظر بگیریم، به دست می‌آید:

$$Q=-\iiint_{(V)}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

برای این‌که مساوی قراردادن دو مقدار Q، ساده‌تر باشد، انتگرال روی سطح(۵) را، بنابردستور استروگرادسکی (۷)، به‌انتگرال سه‌گانه تبدیل می‌کنیم. درنتیجه، به دست می‌آید:

$$\iiint_{(V)}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\overrightarrow{\rho v})\right\}dV=0$$

ازآن‌جاکه این رابطه، برای هرجسم (V) که در محدودهٔ حوزهٔ مفروض باشد، برقرار است، بنابراین [باتوجه به ۸،۶۴۴°]، به‌اتحاد زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\overrightarrow{\rho v})=0 \qquad (۹)$$

این برابری، به‌نام معادلهٔ پیوستگی مشهور شده است.

۲°. معادلهٔ اساسی حرکت مایع ایده‌آل. فرض می‌کنیم، درحالت‌کلی، نیروهایی، چه از بیرون و چه از درون، برمایع اثرکنند. ولی نیروهای بیرونی را، متناسب با جرم درنظر می‌گیریم، به‌نحوی‌که اگر $\overrightarrow{F}$ نیرویی باشدکه برواحد جرم اثر می‌کند، آن‌گاه بر مایع جزئی (dV)، نیروی $\rho dV\overrightarrow{F}$ اثرکند.

نیروهای درونی‌را ــ یعنی نیروهای وارد برجسم(V) راکه ازمایع جداشده‌است،

وازطرف بقیه مایع اثر می‌کند ـ قائم برسطح (S) این‌جسم و به سمت درون در نظر می‌گیریم؛ دراین صورت است که با مایع ایده‌آل سروکار داریم. درضمن، مقدار فشار p، که‌برواحد مساحت واردمی‌شود، نه به‌جهت مساحت بی‌نهایت‌کوچکی که فشار برآن‌وارد می‌شود، بلکه تنها به مختصات آن بستگی دارد. بنابراین، برسطح جزئی (dS)، نیروئی عمل می‌کندکه تصویرهای‌آن برمحورها چنین‌اند:

$$-pdS\cos\lambda,\quad -pdS\cos\mu,\quad -pdS\cos\nu$$

$\cos\lambda$، $\cos\mu$، $\cos\nu$ عبارتند از کسینوس‌های هادی قائم بیرونی برسطح. نیروئی کـه بر تمامی جسم (V) عمل می‌کند، بااین تصویرها مشخص می‌شود:

$$-\iint_{(S)} p\cos\lambda dS,\quad -\iint_{(S)} p\cos\mu dS,\quad -\iint_{(S)} p\cos\nu dS$$

واگرآن‌ها را، به‌کمك دستور استروگرادسکی تبدیل‌کنیم، به‌این انتگرال‌ها می‌رسیم:

$$-\iiint_{(V)}\frac{\partial p}{\partial x}dV,\quad -\iiint_{(V)}\frac{\partial p}{\partial y}dV,\quad -\iiint_{(V)}\frac{\partial p}{\partial z}dV$$

نیروئی‌که بربخش جزئی (dV) از مایع اثر می‌کند، این تصویرها را دارد:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dV,\quad -\frac{\partial p}{\partial y}dV,\quad -\frac{\partial p}{\partial z}dV$$

وبنابراین، همچون بردار به‌این صورت درمی‌آید:

$$-dV\operatorname{grad}p$$

اکنون، اگرشتاب نظیرجزء (dV) را با $\vec{a}$ نشان‌دهیم، بنابر قانون حرکت نیوتون

$$\rho dV\vec{a}=\vec{F}\rho dV-dV\operatorname{grad}p$$

وازآن‌جا، سرانجام

$$\vec{a}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p \qquad (۱۴)$$

واین، همان معادلهٔ حرکت مایع ایده‌آل به‌صورت برداری آن است؛ و اگرآن را بر سه محور مختصات تصویرکنیم، به سه معادلهٔ اسکالر تجزیه می‌شود.

۳°. معادلهٔ رسانائی گرما. به‌عنوان آخرین مثال ازکاربرد دستور استروگرادسکی،

به مسألهٔ مربوط به‌کیفیت گرمائی جسم، تحت‌تأثیر رسانائی گرمای درونی و فقدان منبع گرما، می‌پردازیم.

اگر جسم (V) را که محدود به‌سطح (S) است، انتخاب کنیم، همان‌طور که در **۶۶۷**، ۲) دیدیم، مقدار گرمای جاری ازجسم ازطریق‌سطح (S) به بیرون، درواحد زمان، برابر است با

$$Q=-\iint_{(S)} k\,\mathrm{grad}_n U\,dS$$

(ازهمان علامت‌گذاری‌های قبلی‌استفاده کرده‌ایم). اگرعلامت این‌عبارت‌را عوض و آن را به‌انتگرال سه‌گانه تبدیل کنیم، برای مقدار گرمایی‌که به درون جسم جاری است، به دست می‌آید:

$$\iiint_{(V)} \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,U)\,dV \qquad (۱۵)$$

این گرما، موجب تغییر درجهٔ حرارت درونی‌جسم (V) می‌شود، و می‌توان‌آن را به‌طریق دیگری هم محاسبه‌کرد. افزایش‌درجهٔ حرارت U به اندازهٔ $dU=\dfrac{\partial U}{dt}dt$، درفاصلهٔ‌زمانی dt، مستلزم ارتباط‌دادن جسم جزئی (dV) با مقدار گرمای

$$c\,dU\rho\,dV=c\frac{\partial U}{\partial t}dt\rho\,dV$$

می‌باشد، که در آن، c، عبارت‌است ازظرفیت حرارتی جسم درنقطهٔ موردنظر. مقدار گرمایی که تمامی جسم (V)، در زمان dt جذب می‌کند، برابر است با

$$dt\iiint_{(V)} c\rho\frac{\partial U}{\partial t}dV$$

واگر آن را، درواحد زمان به‌دست‌آوریم:

$$\iiint_{(V)} c\rho\frac{\partial U}{\partial t}dV \qquad (۱۶)$$

وبا برابر قراردادن عبارت‌های (۱۵) و (۱۶)، به‌دست می‌آید:

$$\iiint_{(V)}\left\{c\rho\frac{\partial U}{\partial t}-\operatorname{div}(k\operatorname{grad}U)\right\}dV$$

که برای هرجسم (V) از حوزهٔ مفروض، صادق است. ازاین‌جا، مثل مورد ۱°، اتحادزیر را نتیجه می‌گیریم:

$$c\rho\frac{\partial U}{\partial t}=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}U)$$

واین، همان معادلهٔ رسانائی گرما است

این معادله، درحالت محیط همگن، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\Delta U$$

که در آن، $a^2=\dfrac{k}{c\rho}$ و Δ به معنای عملگر لاپلاس است:

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

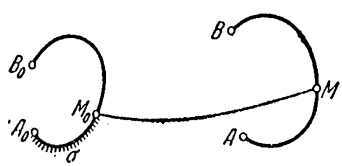
وبالاخره، درحالت توزیع ثابت درجهٔ حرارت U، به زمان بستگی نـدارد و در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند.

$$\Delta U=0$$

یعنی، تابع همسازی از مختصات نقطه است.

اکنون، به مثال‌هایی دربارهٔ دستور ستوکس و مفهوم‌های مربوط به‌آن می‌پردازیم. این کاربردها، به‌حرکت مایع مربوط می‌شوند.

۴°. یك منحنی یا یك سطح، دریك لحظه زمانی، در درون مایع درنظـر می‌گیریم. می‌خواهیم بدانیم، همین ذره‌های مایع (که منحنی یاسطح را تشکیل داده‌اند)، در لحظهٔ زمانی دیگری، به‌چه صورت درمی‌آیند. گزارهٔ کمکی زیر، در این‌گونه بررسی‌ها، نقش مهمی به‌عهده دارد: مشتق نسبت به‌زمان، ازگردش سرعت بردورهٔ بستهٔ مایع، برابراست باگردش شتاب بر همین دوره.



شکل ۱۲۵

دورهٔ دلخواه $(L_0)=(A_0B_0)$ را، در لحظهٔ زمانی t_0 درنظر می‌گیریم. موضع نقطهٔ M_0 را،

که برای آن مثلا داریم $\sigma=\widehat{A_0M_0}$، به‌عنوان پارامتر انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۲۰)؛ اگر در لحظهٔ t، دورهٔ مایع $(L_0)=(A_0B_0)$ به صورت $(L)=(AB)$ در آید، آن‌وقت، موضع نقطهٔ M (نظیر نقطهٔ M_0) با این معادله‌ها، به‌دست می‌آید:

$$x=\varphi(\sigma,t),\quad y=\psi(\sigma,t),\quad z=\chi(\sigma,t)\quad (0\leqslant\sigma\leqslant\bar{\sigma})$$

گردش سرعت

$$J=\int_{(L)}v_xdx+v_ydy+v_zdz=\int_0^{\bar{\sigma}}\left(v_x\frac{\partial x}{\partial\sigma}+v_y\frac{\partial y}{\partial\sigma}+v_z\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)d\sigma \qquad (۱۷)$$

را می‌توان، بنابر قاعدهٔ لایب‌نیتس، نسبت به t دیفرانسیل گرفت:

$$\frac{dJ}{dt}=\int_0^{\bar{\sigma}}\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial\sigma}+\frac{\partial v_y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial\sigma}+\frac{\partial v_z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)d\sigma+$$

$$+\int_0^{\bar{\sigma}}\left(v_x\frac{\partial^2x}{\partial\sigma\partial t}+v_y\frac{\partial^2y}{\partial\sigma\partial t}+v_z\frac{\partial^2z}{\partial\sigma\partial t}\right)d\sigma=$$

$$=\int_0^{\bar{\sigma}}\left(a_x\frac{\partial x}{\partial\sigma}+a_y\frac{\partial y}{\partial\sigma}+a_z\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)d\sigma+\int_0^{\bar{\sigma}}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial\sigma}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial\sigma}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial\sigma}\right)d\sigma$$

نخستین انتگرال، گردش شتاب را می‌دهد:

$$\int_{(L)}a_xdx+a_ydy+a_zdz$$

انتگرال دوم را هم می‌توان به‌طور مستقیم محاسبه کرد، عبارت زیر انتگرال، چیزی جز مشتق عبارت زیر نسبت به σ نیست:

$$\frac{1}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)=\frac{1}{2}v^2$$

که برابر است با

$$\frac{1}{2}v^2\Big|_A^B$$

و در حالت دورهٔ بسته، برابر صفر می‌شود. به‌این ترتیب، سرانجام

$$\frac{dJ}{dt}=\int_{(L)}a_x dx+a_y dy+a_z dz \qquad (۱۸)$$

واین، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۵°. فرض کنیم با مایع ایده‌آل، به مفهومی که در ۲) شرح دادیم، سروکار داشته باشیم. به جز آن، دو فرض دیگر هم در نظر می‌گیریم: ۱) نیروی $\overrightarrow{F}$ دارای پتانسیل است، یعنی

$$\overrightarrow{F}=\operatorname{grad} U$$

و ۲) چگالی ρ، تابعی است یك ارزشی نسبت به‌فشار

$$\rho=\varphi(p)$$

کمیت زیر را وارد می‌کنیم:

$$\Phi(p)=\int\frac{dp}{\varphi(p)}$$

دراین‌صورت

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{۱}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

و به همین ترتیب

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{۱}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{۱}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

به‌نحوی که

$$\operatorname{grad}\Phi=\frac{۱}{\rho}\operatorname{grad} d$$

معادلهٔ اساسی هیدرودینامیك (۱۴) را داشتیم. اکنون، آن را به این صورت می‌نویسیم:

$$\overrightarrow{a}=\operatorname{grad}(U-\Phi)$$

که اگراین مقدار را، در برابری (۱۸) قرار دهیم، معلوم می‌شود

$$\frac{dJ}{dt}=\int_{(L)}d(U-\Phi)=۰$$

به‌نحوی که $J = \text{const.}$

به‌این ترتیب، گردش سرعت، نسبت به هر دورهٔ بستهٔ مایع، در زمان، ثابت است. واین، همان قضیهٔ تومسون (W. Thomson) است.

ازاین‌جا، می‌توان گزارهٔ جالب لاگرانژ را، به‌عنوان نتیجهٔ ساده‌ای به دست‌آورد: اگر جرم مایع، دریك لحظهٔ زمانی معینی، دارای طوفان (روتاسیون) نباشد، آن وقت در هیچ لحظهٔ زمانی دیگری هم، طوفان نخواهد داشت. در واقع، نبودن طوفان، هم ارز صفر شدن گردش سرعت در طول دورهٔ بستهٔ دلخواه است [۶۷۰، ۱°]. اگر این کیفیت، یکبار برقرار باشد، آن وقت بنا به قضیهٔ تومسون، همیشه برقرار خواهد بود.

۶۰°. اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم دوقضیهٔ مهم هلم هولتس را، دربارهٔ منحنی‌های «طوفانی» و لوله‌ها، ثابت کنیم*. درضمن، همه‌جا، به فرض‌های آغاز ۵° توجه داریم.

قضیهٔ مربوط به بقای منحنی‌های طوفانی. ذره‌هایی از مایع، که در یك لحظهٔ زمانی، منحنی طوفانی به وجود می‌آورند، در تمام مدت حرکت، منحنی طوفانی تشکیل خواهند داد.

ساده‌تر است که ابتدا، این قضیه را، نسبت به سطح‌های طوفانی ثابت کنیم. (S_0) را چنین سطحی، در لحظهٔ زمانی t_0 می‌گیریم؛ دراین‌صورت، درهر نقطهٔ آن، طوفان‌سرعت

$$\vec{\Omega} = \text{rot}\ \vec{v}$$

واقع برصفحهٔ مماس بر (S_0) است، یعنی $\Omega_n = 0$. اگر دورهٔ بستهٔ دلخواه (λ_0) را بر سطح انتخاب کنیم، که بخش (σ_0) را محدود کرده باشد، آن وقت، بنا به‌دستورستوکس (۱۴)

$$\int_{(\lambda_0)} v_x dx + v_y dy + v_z dz = \iint_{(\sigma_0)} \Omega_n dS_0 = 0$$

درلحظهٔ زمانی t، سطح (S_0) به سطح (S)، وبخش (σ_0) به (σ) و دورهٔ (λ_0) به دورهٔ (λ) منتقل می‌شود. ولی، بنا به قضیهٔ تومسون، دراین‌جا هم

---

*) منحنی‌ها یا سطح‌های روتاسیونل (طوفانی) ــ و در حالت خاص، لوله‌ها ــ به ترتیب، به منحنی‌های برداری یاسطح‌های برداری (لوله‌های برداری)، برای میدان طوفان (روتاسیون) گفته می‌شود.

$$\int_{(\lambda)} v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0$$

به‌نحوی که (دوباره، بنا به دستور ستوکس)

$$\iint_{(\sigma)} \Omega_n dS = 0$$

وچون (σ) را به‌دلخواه درنظر گرفتیم، به سادگی نتیجه می‌شودکه در طول (S)، به طور اتحادی

$$\Omega = 0$$

یعنی، سطح (S) هم طوفانی است.

ازآن‌جا که منحنی طوفانی را، می‌توان محل برخورد دو سطح طوفانی دانست، بنابراین، قضیه ثابت شده است. در حالت خاص، بقای طوفانی بودن لوله هم، نتیجه می‌شود.

اکنون، به سادگی می‌توان به‌این قضیه رسید:

قضیهٔ مربوط به‌بقای شدت لوله‌های طوفانی. شدت لولهٔ طوفانی‌دلخواه، درتمام مدت حرکت، ثابت می‌ماند.

بنا به دستور ستوکس، شدت لولهٔ طوفانی، یعنی‌شار طوفان ازطریق مقطع عرضی لوله، منجربه‌گردش سرعت نسبت به دورهٔ این مقطع می‌شود [با ۶۷۰، ۲۳ مقایسه‌کنید]. دراین حالت، نتیجهٔ مطلوب، به‌طور مستقیم، نتیجه‌ای ازقضیهٔ تومسون است [۳°].

§۵. انتگرال‌های چندگانه

۶۷۳. مسألهٔ مربوط به‌جاذبه وپتانسیل دوجسم. نیازهای آنالیز وکاربردهای آن، به‌گونه‌های انتگرال‌های معین‌ساده، دوگانه وسه‌گانه ختم نمی‌شود.

این مطلب را، روی مثال جاذبهٔ دوجسم، روشن می‌کنیم. مختصات نقطه‌های جسم اول (V_1) را با x_1، y_1، z_1 ومختصات نقطه‌های جسم دوم (V_2) را با x_2، y_2، z_2 نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم چگالی جرم توزیع شده دراین دوجسم، به‌وسیلهٔ تابع‌هایی ازاین مختصات، داده شده باشد:

$$\rho_1 = \rho_1(x_1, y_1, z_1), \quad \rho_2 = \rho_2(x_2, y_2, z_2)$$

اگر ازاین جسم‌ها، جزهایی به‌ترتیب با جرم‌های $\rho_1 dx_1 dy_1 dz_1$ و $\rho_2 dx_2 dy_2 dz_2$ جدا کنیم، آن وقت، بنابرقانون نیوتون، دومی براولی با نیروی

$$\frac{\rho_1 \rho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}^2}$$

اثر می‌کند، که درآن، $r_{1,2}$، عبارت است ازفاصلهٔ بین این دوجزء:

$$r_{1,2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

ازآن‌جاکه، این نیرو، از نقطهٔ (x_1, y_1, z_1) به سمت نقطهٔ (x_2, y_2, z_2) متوجه است، بنابراین، کسینوس‌های های آن، عبارتند از $\frac{x_2-x_1}{r_{1,2}}$، $\frac{y_2-y_1}{r_{1,2}}$ و $\frac{z_2-z_1}{r_{1,2}}$

بنابراین، تصویر نیروی جاذبهٔ جزء اول برجزء دوم، مثلا روی محور x، چنین‌است:

$$\frac{\rho_1 \rho_2 (x_2-x_1)}{r_{1,2}^3} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2$$

وتصویر F_x، نتیجهٔ نیروها، که به وسیلهٔ‌آن، جسم دوم اولی را جذب می‌کند، از مجموع چنین عبارت‌هایی نسبت به همهٔ جزءهای دو جسم به دست می‌آید، یعنی بایك انتگرال شش‌گانه

$$F_x = \iiint\iiint \frac{\rho_1 \rho_2 (x_2-x_1)}{r_{1,2}^3} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2$$

که برفضای‌شش‌بعدی $(V)=(V_1)\times(V_2)$ نقطه‌های $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ گسترده است و درآن، (x_1, y_1, z_1) از (V_1) و (x_2, y_2, z_2) از (V_2) گرفته شده است. دو تصویر دیگرهم، به همین ترتیب، بیان می‌شوند.

به طریق مشابهی، مقدار

$$\frac{\rho_1 \rho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}}$$

عبارت است ازپتانسیل یك جزء بردیگری. ازمجموع این گونه عبارت‌ها، پتانسیل‌یك‌جسم بردیگری، دوباره به‌صورت یك انتگرال شش‌گانه، به‌دست می‌آید:

$$W = \iiint\iiint_{(V)} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_{1,2}} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2$$

اگر دوجسم متحد باشند، آن وقت با نصف‌کردن این انتگرال (زیرا، هرزوج جزء دوبار به حساب می‌آید)، پتانسیل جسم برخودش به‌دست می‌آید.

بـه عنوان مثال، فـرض می‌کنیم بخـواهیم، پتانسیل کـرهٔ همگن $(\rho_1=\rho_2=1)$ $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$، یعنی انتگرال زیررا، محاسبه‌کنیم:

$$W_0=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}}\frac{dx_1\,dy_1\,dz_1\,dx_2\,dy_2\,dz_2}{r_{1,2}}$$

محاسبه را می‌توان به‌این ترتیب انجام داد. ازقبل، پتانسیل کرهٔ $x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2$ را برجزء $dx_1\,dy_1\,dz_1$ به‌مختصات x_1، y_1، z_1 و به فاصلهٔ $r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ ازمرکز، می‌دانیم [۶۵۰، ۱۲)]؛ این پتانسیل باانتگرال سه‌گانه بیان می‌شود وبرابر است با*

$$(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r_1^2)dx_1\,dy_1\,dz_1$$

اکنون باید عبارت‌های مشابه را نسبت به همهٔ جزءهای کرهٔ $x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2$ باهم جمع کنیم، یعنی یکبار دیگر، انتگرال سه‌گانهٔ زیررا محاسبه‌کنیم:

$$\iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r_1^2)dx_1\,dy_1\,dz_1$$

که اگر به‌مختصات کروی برویم، به‌سادگی محاسبه می‌شود و سرانجام به‌دست می‌آید:

$$W_0=\frac{16}{15}\pi^2R^5$$

دراین‌جا، محاسبهٔ انتگرال شش‌گانه، منجر به محاسبهٔ دوانتگرال سه‌گانه شدکه‌یکی ازآن‌ها، برای ما آشنا بود.

اکنون، موضوع را به صورت کلی‌خود مطرح می‌کنیم، اگرچـه در بیشتر موردها، به انتگرال‌های مشابهی تکیه خواهیم کرد که قبلا آموخته‌ایم.

۶۷۴. حجم جسم n بعدی. انتگرال n گانه. همان طورکه برای تعریف انتگرال

---

*) باید در نظـر گرفت که، جرم نقطه‌ای کـه پتانسیل برآن محـاسبه می‌شود، نه ۱، بلکه $dx_1\,dy_1\,dz_1$ است؛ علاوه برآن، نقش a که در دستور قبلی وجود داشت، دراین‌جا به عهدهٔ r_1 است.

ساده، دوگانه وسه‌گانه، ازمفهوم طول‌پاره خط، مساحت شکل مسطحه، حجم جسم فضایی استفاده کردیم، اساس تعریف انتگرال nگانه را هم، برحجم* حوزهٔ n بعدی قرارمی‌دهیم. وقتی باحوزه سادهٔ n بعدی ــ مکعب مستطیل n بعدی ــ سروکار داشته باشیم:

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n] \qquad (1)$$

حجم آن، به حاصل‌ضرب بعدهای آن گفته می‌شود:

$$(b_1-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_n-a_n)$$

به خودی خود روشن است که، منظور ازحجم جسم، حجمی است که از تعداد محدودی ازاین گونه مکعب مستطیل‌ها تشکیل شده باشد. می‌توان ثابت کرد که، مقدار حجم، بستگی به‌این ندارد که جسم را به‌چه ترتیب، به‌این مکعب مستطیل‌ها تجزیه کرده‌ایم.

با بررسی این‌گونه جسم‌های «مکعب‌مستطیلی»، که در داخل ودر خارج از جسم n بعدی (V) قرار دارند، می‌توان مفهوم حجم V ازجسم (V) را تعریف کرد [با ۳۴۰ مقایسه کنید].

تنها با جسم‌هایی سروکار خواهیم داشت که، برای آن‌ها، حجم وجود داشته باشد؛ واین‌حجم، برای جسم‌هایی که محدود به‌سطح‌های هموار، یا سطح‌های قطعه به‌قطعه هموار باشند، وجوددارد** و، به خصوص، برای حوزه‌های nبعدی ــ سادك (سیمپلکس) n بعدی

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0 \quad x_1+x_2+\dots+x_n \leqslant h$$

وکرهٔ n بعدی

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 \leqslant r^2$$

کوشش می‌کنیم دراین‌جا، حجم آن‌ها را پیداکنیم [۶۵۰، ۱) و ۲)].

تابع با n متغیر $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را درحوزهٔ (V) درنظر می‌گیریم؛ اگر این

---

*) باوجودی‌که، این اصطلاح، با تغییرn، تغییر می‌کند. ترجیح دادیم از همین اصطلاح حجم استفاده کنیم؛ صحبت برسر«حجم n بعدی» است. می‌توانستیم، به‌جای آن، از واژهٔ «درازا»، «بعد» و غیر آن استفاده کنیم.

**) دراین‌جا، منظور از سطح هموار، شکلی است ازفضای n بعدی‌که با n معادلهٔ پارامتری نسبت به $n-1$ پارامتر معین شده باشد. درضمن، هریك از تابع‌های نسبت به پارامترها (معادله‌های پارامتری)، همراه با مشتق‌های نسبی آن‌ها پیوسته‌اند و دترمینان‌های مرتبهٔ $(n-1)$ ماتریس مشتق‌ها، باهم برابر صفر نیستند.

حوزه را به بخش‌های جزئی تقسیم و بقیهٔ عمل‌های لازم را تکرار کنیم [با **۶۴۳** مقایسه کنید]، به مفهوم انتگرال n بعدی می‌رسیم:

$$I=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{(V)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n \qquad (۲)$$

که اگر تابع زیرانتگرال پیوسته باشد، این انتگرال وجود خواهد داشت.

محاسبهٔ این انتگرال، به محاسبهٔ انتگرال‌های از مرتبهٔ پایین‌تر منجر می‌شود، تا آن جا که به انتگرال‌های ساده برسد. درحالتی که حوزهٔ انتگرال‌گیری (V)، مکعب مستطیل (۱) باشد، دستور مشابه دستور (۱۰) شمارهٔ **۶۴۵** برقرار است:

$$I=\int_{a_1}^{b_1}dx_1\int_{a_2}^{b_2}dx_2\ldots\int_{a_n}^{b_n}f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_n \qquad (۳)$$

برای حوزهٔ کلی‌تری که با این نابرابری‌ها مشخص شده باشد:

$$x_1^\circ\leqslant x_1\leqslant X_1,\quad x_2^\circ(x_1)\leqslant x_2\leqslant X_2(x_1),\ \ldots,$$
$$x_n^\circ(x_1, \ldots, x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant X_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

می‌توان از دستور مشابه دستور (*۱۰) شمارهٔ **۶۴۶** استفاده کرد:

$$I=\int_{x_1^\circ}^{X_1}dx_1\int_{x_2^\circ(x_1)}^{X_2(x_1)}dx_2\ldots\int_{x_n^\circ(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{X_n(x_1, \ldots, x_{n-1})}f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_n \qquad (۴)$$

به همین ترتیب، می‌توان سایر دستورها را، مشابه دستورهای (*۸) و (*۱۱) شمارهٔ **۶۴۶** به دست آورد که، در آن‌ها، محاسبهٔ انتگرال n گانه، پشت سرهم به محاسبهٔ انتگرال‌های مرتبهٔ پایین‌تر منجر می‌شود.

همهٔ این‌ها را می‌توان کاملا شبیه حالت‌های $n=۲$ یا $n=۳$ ثابت کرد، بدون این که به اندیشهٔ تازه‌ای نیاز باشد، به نحوی که هیچ لزومی ندارد، دراین‌جا آن‌ها را دوباره تکرار کنیم. همچنین، بدون هیچ توضیحی، روشن است که با انتگرال‌های n گانه ناویژه چگونه باید برخورد کرد و چگونه از دستورهای قبلی، برای آن‌ها، استفاده کرد.

یادداشت. می‌توانستیم، برای تابع با n متغیر، به مفهوم انتگرال نسبت به سطح $(n-۱)$ بعدی بپردازیم [یادداشت‌های مثال‌های ۳) و ۱۶) شمارهٔ **۶۷۶** را ببینید]. ولی، به خاطر

بغرنجی موضوع، در این جا به آن نمی‌پردازیم. همین قدر یادآوری می‌کنیم که استروگرادسکی، ضمن تعمیم رابطهٔ (۴) شمارهٔ **۶۵۱**، به رابطه‌ای رسید که انتگرال نسبت به یك سطح بسته را، به یك انتگرال n گانه نسبت به جسمی که به وسیلهٔ آن محصور شده است، مربوط می‌کرد.

۶۷۵. تغییر متغیر در انتگرال‌های n گانه. این مطلب را، کمی مفصل‌تر بررسی می‌کنیم، دو حوزهٔ n بعدی (D) نظیر می‌گیریم: (D) در فضای $x_1x_2\dots x_n$ و (Δ) در فضای $\xi_1\xi_2\dots\xi_n$، به نحوی که هر کدام از آن‌ها، به وسیلهٔ سطحی هموار یا قطعه به قطعه هموار پیوسته محدود شده باشد. در ضمن، فرض می‌کنیم، به کمك رابطه‌های زیر، تناظر متقابل یك به یك، بین آن‌ها برقرار باشد:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = x_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \end{cases} \qquad (۵)$$

در این صورت، با فرض‌های عادی نسبت به مشتق‌ها و حفظ علامت ژاکوبین

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$$

می‌توان انتگرال تابع پیوستهٔ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را نسبت به (D)، به وسیلهٔ دستور زیر تبدیل کرد.

$$\overbrace{\int\dots\int}^{n}_{(D)} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1\dots dx_n =$$

$$= \overbrace{\int\dots\int}^{n}_{(\Delta)} f\Big(x_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \dots, x_n(\xi_1, \dots, \xi_n)\Big)|J|\,d\xi_1\dots d\xi_n \qquad (۶)$$

که کاملاً شبیه دستور تبدیل انتگرال‌های دوگانه و سه گانه است [۶۰۹، (۲۱) و ۶۶۱، (۸)].

اثبات. این دستور را، با روش استقرای ریاضی می‌دهیم. چون این دستور، برای $n=۲$ و $n=۳$ درست است، کافی است با فرض درست بودن آن برای انتگرال $(n-۱)$ گانه، ثابت کنیم که برای انتگرال n گانه هم درست است.

بدون این که به کلی بودن مطلب لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد که، یکی از مشتق‌های نسبی $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}$، علامت ثابتی دارد (اگر این طور نباشد، حوزهٔ (Δ) را به بخش‌هایی تقسیم می‌کنیم که، برای آن‌ها، این فرض درست باشد)؛ این مشتق نسبی را $\frac{\partial x_۱}{\partial \xi_۱}$ می‌گیریم.

در انتگرال (۲)، انتگرال‌گیری نسبت $x_۱$ را جدا می‌کنیم و آن را این طور می‌نویسیم:

$$\int_{x_۱^۰}^{x_۱} dx_۱ \overbrace{\int\cdots\int}^{n-۱}_{(D_{x_۱})} f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)\,dx_۲\cdots dx_n \qquad (۷)$$

در این‌جا $(D_{x_۱})$، به معنای حوزهٔ تغییر متغیرهای $x_۲$، ...، x_n، متناظر با مقدار تثبیت شدهٔ $x_۱$ است.

معادلهٔ اول (۵) را، نسبت به متغیر $\xi_۱$، حل می‌کنیم و آن را به صورت تابعی از $x_۱$، $\xi_۲$، ...، ξ_n می‌نویسیم:

$$\xi_۱ = \bar{\xi}_۱(x_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n)$$

و این مقدار را، در بقیهٔ معادله‌ها قرار می‌دهیم. به این ترتیب، دستورهای جدیدی برای تبدیل به دست می‌آید.

$$\begin{cases} x_۲ = x_۲(\bar{\xi}_۱(x_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n), \xi_۲, \ldots, \xi_n) = \bar{x}_۲(x_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_n(\bar{\xi}_۱(x_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n), \xi_۲, \ldots, \xi_n) = \bar{x}_n(x_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) \end{cases} \qquad (۸)$$

انتگرال $(n-۱)$ گانهٔ درونی (۷) را، با آغاز از این رابطه‌ها، برحسب متغیرهای $\xi_۲$، ...، ξ_n تبدیل می‌کنیم که، بنا بر فرض استقرا، می‌توان با رابطه‌ای شبیه (۶) انجام داد.

به‌این انتگرال می‌رسیم:

$$\int_{x_1^\circ}^{x_1} dx_1 \overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{(\Delta x_1)} f\Big(x_1, \bar{x}_2(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\ldots$$

$$\ldots, \bar{x}_n(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\Big)|J^*|d\xi_2\cdots d\xi_n \qquad (۹)$$

که در آن داریم:

$$J^* = \frac{D(\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}{D(\xi_2, \ldots, \xi_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_2} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_n} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$$

اکنون، در آن، انتگرال گیری نسبت به x_1 را درجای اول قرار می‌دهیم:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{(\Delta^*)} d\xi_2 \cdots d\xi_n \int_{x_1^\circ(\xi_2, \ldots, \xi_n)}^{X_1(\xi_2, \ldots, \xi_n)} f\Big(x_1, \bar{x}_2(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \ldots$$

$$\ldots, \bar{x}_n(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\Big)|J^*|dx_1$$

و در انتگرال درونی، از متغیر x_1، بنابر رابطهٔ اول (۵)، به متغیر ξ_1 می‌رویم (با تثبیت ξ_2، ...، ξ_n). به دست می‌آید:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{(\Delta^*)} d\xi_2 \cdots d\xi_n \int_{\xi_1^\circ(\xi_2, \ldots, \xi_n)}^{\xi_1(\xi_2, \ldots, \xi_n)} f\Big(x_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

$$x_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \ldots, x_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\Big)\left|J^*\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\right|d\xi_1$$

ویا، با برگشت به انتگرال n گانه

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{(\Delta)} f\Big(x_1(\xi_1,\ldots,\xi_n),\ldots,x_n(\xi_1,\ldots,\xi_n)\Big)\left|J^*\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\right| d\xi_1\cdots d\xi_n$$

برای این‌که به (۶) برسیم، کافی است ثابت کنیم:

$$J = J^*\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}$$

ولی، با مشتق‌گیری از تابع مرکب (۸) نسبت به ξ_2، ...، ξ_n و با استفاده از قانون مشتق‌گیری تابع ضمنی، برای بیان مشتق‌های تابع ξ_1، به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} - \frac{\dfrac{\partial x_i}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_k}}{\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}}$$

بنابراین، اگر در دترمینان J به عضوهای سطر kام $(k = 2, \ldots, n)$، به ترتیب حاصل ضرب عضوهای سطر اول در $-\dfrac{\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_k}}{\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}}$ را اضافه کنیم، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ 0 & \dfrac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \dfrac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_n} & \cdots & \dfrac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$$

و روشن است که با $J^*\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}$ برابر می‌شود. به‌این ترتیب، اثبات به‌پایان می‌رسد.

یادآوری می‌کنیم که، همه‌جا، به‌طور ضمنی، فرض‌را براین گرفتیم که حوزه‌های $(n-1)$ بعدی (D_{x_1}) و (Δ_{x_1})، در فضای متناظر خود، به وسیلهٔ سطحی پیوسته و هموار (یا قطعه به‌قطعه هموار) محدود شده‌اند. اگر حوزهٔ (D)، و هم‌زمان با آن حوزهٔ (Δ) را پشت

سرهم به بخش‌هایی تقسیم کنیم، همیشه می‌توان به این نتیجه رسید که، این ویژگی، دست کم برای هر بخش جداگانه برقرار است. وقتی که در دستور (۶)، برای این بخش‌های جداگانه درست باشد، برای تمامی حوزه هم درست خواهد بود.

دستور تغییر متغیرها را، با روش عادی، می‌توان برای انتگرال‌های ناویژه هم تعمیم داد.

۶۷۶. مثال‌ها. ۱) مطلوب است حجم T_n، سادك (سیمپلکس) n بعدی [۱۶۲]

$$(T_n): x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, x_1+x_2+\cdots+x_n \leqslant h$$

حل. داریم:

$$T_n = \overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{(T_n)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int_0^h dx_1 \int_0^{h-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{h-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n$$

اگر دراین انتگرال‌های ساده، به ترتیب، متغیرها را بنابر رابطه‌های

$$x_1 = h\xi_1, \ x_2 = h\xi_2, \ \ldots, \ x_n = h\xi_n$$

تغییر دهیم، (درضمن، نیازی به‌استفاده از دستور کلی (۶) نیست)، به‌دست می‌آید:

$$T_n = h^n \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \cdots \int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1}} d\xi_n =$$

$$= h^n \overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{\xi_1 \geqslant 0, \ldots, \xi_n \geqslant 0 \\ \xi_1+\cdots+\xi_n \leqslant 1}} d\xi_1 \cdots d\xi_n = \alpha_n h^n$$

به شرطی که α_n را مقدار انتگرالی، مشابه انتگرال فرض بگیریم، که متناظر با $h=1$ باشد.

ازطرف دیگر داریم:

$$\alpha_n = \int_0^1 d\xi_n \overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\substack{\zeta_1 \geqslant 0, \ldots, \zeta_{n-1} \geqslant 0 \\ \xi_1+\cdots+\xi_{n-1} \leqslant 1-\xi_n}} d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1} =$$

$$= \alpha_{n-1} \int_0^1 (1-\xi_n)^{n-1} d\xi_n = \frac{\alpha^{n-1}}{n}$$

با توجه به این رابطهٔ برگشتی و با توجه به‌این‌که $\alpha_1 = 1$، به‌دست می‌آید:

$$\alpha_n = \frac{1}{n!}$$

و بنابراین

$$T_n = \frac{h^n}{n!}$$

۲) مطلوب است حجم V_n، کرهٔ n بعدی [۱۶۲]

$$(V_n): \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2$$

حل. دراین‌جا، باید این‌انتگرال را محاسبه‌کرد:

$$V_n = \overbrace{\int \cdots \int}^{n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$
$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2$$

با فرض*

$$x_1 = R\xi_1,\ x_2 = R\xi_2,\ \ldots,\ x_n = R\xi_n$$

به سادگی به‌دست می‌آید: $V_n = \beta_n R^n$، که در آن، ضریب عددی β_n، معرف حجم کرهٔ n بعدی به شعاع واحد است.

برای تعیین β_n داریم:

$$\beta_n = \overbrace{\int \cdots \int}^{n} d\xi_1 \cdots d\xi_n = \int_{-1}^{1} d\xi_n \overbrace{\int \cdots \int}^{n-1} d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1}$$
$$\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \leqslant 1 \qquad\qquad \xi_1^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 \leqslant 1 - \xi_n^2$$

انتگرال درونی، عبارت است ازحجم کره‌ای $(n-1)$ بعدی به‌شعاع $\sqrt{1-\xi_n^2}$، و بنابراین برابر $\beta_{n-1}(1-\xi_n^2)$ می‌شود. دوباره به‌یك رابطهٔ برگشتی می‌رسیم:

---

*) دراین‌جا هم، به رابطهٔ کلی (۶) نیازی نیست؛ اگر انتگرال چندگانه را، طبق‌دستور (۴)، به‌صورت انتگرال تکراری بنویسیم، می‌توان در هریك از انتگرال‌های ساده، متغیرها را پشت سرهم، به‌طور جداگانه، تغییر داد.

$$\beta_n = ۲\beta_{n-۱}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^n\theta d\theta$$

و یا [۵۳۴، ۴)، b) را ببینید]

$$\beta_n = \beta_{n-۱}\cdot\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+۱}{۲}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+۲}{۲}\right)}$$

و چون $\beta_۱ = ۲$، بنابراین به دست می‌آید:

$$\beta_n = \frac{\pi^{\frac{n}{۲}}}{\Gamma\left(\frac{n}{۲}+۱\right)}$$

وحجم مجهول، برابر است با

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{۲}}}{\Gamma\left(\frac{n}{۲}+۱\right)}R^n$$

و برای حالت‌هایی‌که n عددی زوج یافرد باشد، به این رابطه‌ها می‌رسیم:

$$V_{۲m} = \frac{\pi^m}{m!}R^{۲m},\quad V_{۲m+۱} = \frac{۲(۲\pi)^m}{(۲m+۱)!!}R^{۲m+۱}$$

که در حالت‌های خاص $V_۱$، $V_۲$، $V_۳$، به مقدارهای آشنای $۲R$، $\pi R^۲$، $\frac{۴}{۳}\pi R^۳$ می‌رسیم.

۳) این انتگرال (ناویژه) را محاسبه کنید:

$$S = \overbrace{\int\cdots\int}^{n-۱}_{x_۱^۲+\cdots+x_{n-۱}^۲\leqslant ۱} \frac{dx_۱\cdots dx_{n-۱}}{\sqrt{۱-x_۱^۲-\cdots-x_{n-۱}^۲}} \qquad (n>۲)$$

حل. انتگرال مفروض را، به‌این صورت تبدیل می‌کنیم:

$$S=\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2\leqslant 1} dx_1\cdots dx_{n-2}\int_{-\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-2}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-2}^2}}\frac{dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-2}^2-x_{n-1}^2}}$$

انتگرال درونی، برابر است با π، به‌نحوی که [۲] را ببینید]

$$S=\pi\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2\leqslant 1} dx_1\cdots dx_{n-2}=\pi\beta_{n-2}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

یادداشت. توجه به‌این‌مطلب جالب است که، نتیجهٔ این‌انتگرال، با تقریب ضریب ۲، مساحت سطح کرهٔ n بعدی $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ را بیان می‌کند. بدون این‌که به تفصیل بپردازیم، یادآور می‌شویم که، وقتی سطح به‌صورت صریح داده شده باشد

$$x_n=f(x_1,\cdots,x_{n-1})$$

که در آن، نقطهٔ $(x_1,\cdots,x_{n-1})$ در حوزهٔ $(n-1)$ بعدی (E) تغییر می‌کند، مساحت این سطح، با انتگرال زیر بیان می‌شود*:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{(E)}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}\right)^2}\,dx_1\cdots dx_{n-1}$$

ودر حالت خاص، برای نیم‌کرهٔ

$$x_n=\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}$$

داریم:

$$\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1}\frac{dx_1\cdots dx_{n-1}}{x_n}=\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1}\frac{dx_1\cdots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}$$

بنابراین، سطح کرهٔ n بعدی به شعاع واحد، برابر است با $2\pi\beta_{n-2}$ و در حالت کرهٔ به شعاع R، به روشنی چنین می‌شود:

---

*) این دستور، از نظر ساختار خود، کاملا شبیه دستور (4a) **۳۲۹** برای طول کمان منحنی مسطح، و دستور (5) **۶۲۶** برای مساحت سطح خمیده است (در هردوحالت، معادلهٔ منحنی یا سطح، به صورت صریح داده شده است).

$$۲\pi\beta_{n-۲}R^{n-۱}=۲\frac{\frac{n}{n^{\frac{n}{۲}}}}{\Gamma\left(\frac{n}{۲}\right)}R^{n-۱}$$

این نتیجه‌گیری، به‌یاکوبی تعلق دارد.

۴) دستور دیریکله را ثابت کنید:

$$\underbrace{\int\cdots\int}_{\substack{x_۱,\cdots,x_n\geqslant ۰\\ x_۱+\cdots+x_n\leqslant ۱}}^{n} x_۱^{p_۱-۱}\cdots x_n^{p_n-۱}dx_۱\cdots dx_n=\frac{\Gamma(p_۱)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_۱+\cdots+p_n+۱)}$$

$$(p_۱,\ \cdots,\ p_n>۰)$$

باتوجه به‌این‌که، به ازای $n=۲$، دستور درست است [۶۹۷، ۱۲)؛ ۶۱۷ ۱۴)]، برای اثبات، از روش استقـرای ریاضی استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، دستور، برای انتگرال $(n-۱)$ گانه درست باشد. سمت چپ دستور را، این طور می‌نویسیم:

$$\int_۰^{۱} x_n^{p_n-۱}dx_n\underbrace{\int\cdots\int}_{\substack{x_۱,\ \cdots,\ x_{n-۱}\geqslant ۰\\ x_۱+\cdots+x_{n-۱}\leqslant ۱-x_n}}^{n-۱} x_۱^{p_۱-۱}\cdots x_{n-۱}^{p_{n-۱}-۱}dx_۱\cdots dx_{n-۱}$$

درمورد انتگرال درونی، این تبدیل‌ها را انجام می‌دهیم*:

$$x_۱=(۱-x_n)\xi_۱,\ \cdots,\ x_{n-۱}=(۱-x_n)\xi_{n-۱}$$

و درمورد این انتگرال n بعدی، دستور دیریکله را به‌کار می‌بریم. به‌دست می‌آید:

$$\frac{\Gamma(p_۱)\cdots\Gamma(P_{n-۱})}{\Gamma(p_۱+\cdots+p_{n-۱}+۱)}\int_۰^{۱} x_n^{p_n-۱}(۱-x_n)^{p_۱+\cdots+p_{n-۱}}dx_n$$

واگر انتگرال را، باعبارت آن برحسب Γ بیان کنیم:

$$\frac{\Gamma(p_n)\Gamma(p_۱)\cdots\Gamma(p_{n-۱})}{\Gamma(p_۱+\cdots+p_{n-۱}+p_n+۱)}$$

---

*) پاورقی ابتدای حل مسألهٔ ۲) همین شماره (صفحهٔ ۲۳۰۵) را ببینید.

که همان نتیجهٔ مطلوب است.

۵) دستور دیریکله را به سادگی می‌توان تعمیم داد:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0\\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\leqslant 1}} x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\frac{a_1^{p_1}\ldots a_n^{p_n}}{\alpha_1\ldots\alpha_n}\ \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}+1\right)}$$

$$(a_i,\ \alpha_i,\ p_i>0)$$

که اگر به متغیرهای جدید $\xi_i=\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\alpha_i}$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$ متوسل شویم*، همان دستوری است که قبلا ثابت کردیم.

درحالت خاص، به‌ازای

$$a_1=\ldots=a_n=R,\ \alpha_1=\ldots=\alpha_n=2,\ p_1=\ldots=p_n=1$$

دوبارهٔ حجم V_n از کرهٔ n بعدی به‌دست می‌آید** [۲] را ببینید].

۶) به‌حالت $n=3$ در دستور دیریکله توجه می‌کنیم:

$$\iiint_{\substack{x,\ y,\ z\geqslant 0\\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma}\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\,dx\,dy\,dz=\frac{a^pb^qc^r}{\alpha\beta\gamma}\ \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1\right)}$$

$(p,\ q,\ r>0)$. این دستور، برای محاسبهٔ حجم، گشت‌آور ستاتیك، گشت‌آور ماند و

---

*) همان پاورقی‌را ببینید.

**) تنها باید توجه داشت که، اگر خود را به مقدارهای مثبت متغیرها، دردستور دیریکله، محدود کنیم، آن وقت تنها $\frac{1}{2^n}$ حجم را می‌دهد.

گشت‌آور گریز از مرکز درجسم‌های همگن، مورد استفاده دارد.

مثلا، برای بخشی از بیضوی $\left(\frac{x}{a}\right)^۲+\left(\frac{y}{b}\right)^۲+\left(\frac{z}{c}\right)^۲\leqslant ۱$ $(\alpha=\beta=\gamma=۲)$، که دریك هشتم اول واقع است، به شرط آن که چگالی‌را برابر واحد بگیریم، به دست می‌آید:

$$V=\frac{abc}{۸}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)\right]^۳}{\Gamma\left(\frac{۵}{۲}\right)}=\frac{\pi}{۶}abc \quad :p=q=r=۱ \text{ برای } ;$$

$$M_{yz}=\frac{a^۲bc}{۸}\,\frac{\Gamma(۱)\left[\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)\right]^۲}{\Gamma(۳)}=\frac{\pi}{۱۶}a^۲bc \quad :q=r=۱ \text{ و } p=۲ \text{ برای } ;$$

$$L_{yz}=\frac{a^۳bc}{۸}\,\frac{\Gamma\left(\frac{۳}{۲}\right)\left[\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)\right]^۲}{\Gamma\left(\frac{۷}{۲}\right)}=\frac{\pi}{۳۰}a^۳bc \quad :q=r=۱ \text{ و } p=۳ \text{ برای } ;$$

$$K_{yz}=\frac{ab^۲c^۲}{۸}\,\frac{\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)[\Gamma(۱)]^۲}{\Gamma\left(\frac{۷}{۲}\right)}=\frac{۱}{۱۵}ab^۲c^۲ \quad :q=r=۲ \text{ و } p=۱ \text{ برای و}$$

غیره.

۷) دستور لیوویل را ثابت کنید $(p_۱, p_۲, \dots, p_n>۰)$:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_۱,\dots,x_n\geqslant ۰\\ x_۱+\cdots+x_n\leqslant ۱}}\varphi(x_۱+\cdots+x_n)x_۱^{p_۱-۱}x_۲^{p_۲-۱}\dots x_n^{p_n-۱}\,dx_۱dx_۲\cdots dx_n=$$

$$=\frac{\Gamma(p_۱)\Gamma(p_۲)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_۱+p_۲+\cdots+p_n)}\int_۰^۱\varphi(u)u^{p_۱+p_۲+\cdots+p_n-۱}\,du$$

با فرض تقارب مطلق انتگرال سادهٔ سمت راست.

این دستور، به‌ازای $n=۲$ درست است [۵۹۷، ۱۶)؛ ۶۱۱، ۱۷)؛ ۶۱۷، ۱۴)].

فرض می‌کنیم، برای انتگرال $(n-1)$ گانه درست باشد. سمت چپ دستور موردنظررا، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\substack{x_1,\ \cdots,\ x_{n-1}\geqslant 0\\ x_1+\cdots+x_{n-1}\leqslant 1}} x_1^{p_1-1}\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\,dx_1\cdots dx_{n-1}\times$$
$$\times\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}}\varphi(x_1+\cdots+x_n)x_n^{p_n-1}\,dx_n$$

اگر فرض کنیم:

$$\psi(t)=\int_0^{1-t}\varphi(t+x_n)x_n^{p_n-1}\,dx_n$$

آن وقت، انتگرال درونی، برحسب $\psi(x_1+\cdots+x_{n-1})$ در می‌آید و، دراین صورت بنابردستور لیووپل درمورد انتگرال $(n-1)$ گانه، این آخری به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1})}\int_0^1\psi(t)t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1}\,dt$$

اگر به‌جای $\psi(t)$ مقدارش را قراردهیم، انتگرال تکراری حاصل، به انتگرال دوگانهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\iint\varphi(t+x_n)t^{p_1+\cdots+p_{n-1}-1}x_n^{p_n-1}\,dt\,dx_n$$
$$t,\ x_n\geqslant 0,\quad t+x_n\leqslant 1$$

کافی است درمورد انتگرال اخیر، آن چه راکه ثابت کردیم، به‌کار ببریم تا به‌نتیجهٔ‌مطلوب برسیم.

۸) ازاین‌جا، به سادگی، دستور کلی‌تری به‌دست می‌آید:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0\\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\leqslant 1}}\varphi\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right)x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}\,dx_1\cdots dx_n=$$

$$= \frac{a_1^{p_1}\dots a_n^{p_n}}{\alpha_1\cdots\alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\dots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\left(\Gamma\frac{p_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \int_0^1 \varphi(u) u^{\frac{p_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{p_n}{\alpha_n}-1} du$$

(همهٔ عددهای a_i، α_i و p_i، مثبت درنظر گرفته شده‌اند).

به‌کمك این‌دستور، می‌توان مثلا انتگرال‌های زیررا محاسبه کرد و، در ضمن، شرط‌های وجود آن‌ها را به دست آورد*:

الف)
$$\overbrace{\int\dots\int}^{n} \frac{x_1^{p_1-1}\dots x_n^{p_n-1}}{\left(1-x_1^{\alpha_1}-\dots-x_n^{\alpha_n}\right)^{\mu}} dx_1\cdots dx_n =$$
$$x_1,\dots,x_n \geqslant 0,\quad x_1^{\alpha_1}+\dots+x_n^{\alpha_n} \leqslant 1$$

$$= \frac{1}{\alpha_1\cdots\alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\dots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma\left(1-\mu+\frac{p_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \quad (\mu<1)$$

ب)
$$\overbrace{\int\dots\int}^{n} \frac{x_1^{p_1-1}\dots x_n^{p_n-1}}{\left(x_1^{\alpha_1}+\dots+x_n^{\alpha_n}\right)^{\mu}} dx_1\cdots dx_n =$$
$$x_1,\dots,x_n \geqslant 0,\quad x_1^{\alpha_1}+\dots+x_n^{\alpha_n} \leqslant 1$$

$$= \frac{1}{\alpha_1\cdots\alpha_n\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{p_n}{\alpha_n}-\mu\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\dots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}$$
$$\left(\mu<\frac{p_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)$$

---

*) چراکه تقارب مطلق انتگرال سمت راست دردستور لیوویل، همراه با تقارب انتگرال سمت چپ وجود دارد.

ج) $$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geqslant 0\\ x_1^{\alpha_1}+\cdots+x_n^{\alpha_n}\leqslant 1}} x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}\sqrt{\frac{1-x_1^{\alpha_1}-\ldots-x_n^{\alpha_n}}{1+x_1^{\alpha_1}+\ldots+x_n^{\alpha_n}}}\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\alpha_1\ldots\alpha_n}\,\frac{1}{\Gamma(m)}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}\right\}$$

که برای سادگی کار، فرض کرده‌ایم:

$$m=\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}$$

۹) این دستور را به‌کمك استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geqslant 0\\ x_1+\cdots+x_n\leqslant 1}}\varphi(x_1+\cdots+x_n)\frac{x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\ldots dx_n}{(a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b)^{p_1+\cdots+p_n}}=$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n)}\int_0^1\varphi(u)\,\frac{u^{p_1+\cdots+p_n-1}}{(a_1u+b)^{p_1}\ldots(a_nu+b)^{p_n}}\,du$$

$$(a_1,\ldots,a_n\geqslant 0,\ b>0)$$

[۶۱۱، ۱۸) را ببینید؛ از۵۳۴، ۲) استفاده کنید].

۱۰) به تبعیت از کوشی ثابت می‌کنیم، چگونه می‌توان محاسبهٔ انتگرال چندگانهٔ

$$K=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\frac{x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}e^{-(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)}}{(b_0+b_1x_1+\ldots+b_nx_n)^q}\,dx_1\ldots dx_n$$

را به محاسبهٔ انتگرال ساده منجر کرد.

بنابر دستور معلوم [۵۳۱، (۱۳)] داریم:

$$\frac{1}{(b_0+b_1x_1+\ldots+b_nx_n)^q}=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^\infty e^{-u(b_0+b_1x_1+\ldots+b_nx_n)}u^{q-1}du$$

که اگر آن را در انتگرال K قرار دهیم، با تغییر ردیف انتگرال‌گیری، به دست می‌آید:

$$K=\int_0^\infty e^{-b_0u}u^{q-1}du\times$$

$$\times\left\{\int_0^\infty e^{-(a_1+b_1u)x_1}x_1^{p_1-1}dx_1\ldots\int_0^\infty e^{-(a_n+b_nu)x_n}x_n^{p_n-1}dx_n\right\}$$

و بالاخره، اگر برای انتگرال‌های داخل آکولاد، دوباره ازهمان دستور استفاده کنیم:

$$K=\frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(q)}\int_0^\infty\frac{e^{-b_0u}u^{q-1}du}{(a_1+b_1u)^{p_1}\ldots(a_n+b_nu)^{p_n}}$$

این نتیجه، برای $b=0$ هم برقرار است، ولی به‌شرطی که داشته باشیم:

$$p_1+\cdots+p_n>q$$

۱۱) محاسبهٔ این انتگرال را مطرح می‌کنیم.

$$L_{2k}=\int\ldots\int_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant 1}(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^{2k}dx_1\ldots dx_n$$

$2k$، عددی است طبیعی و a_1، ...، a_n، عددهای حقیقی دلخواهی.

بنا بر دستور توان یک‌چند جمله‌ای داریم:

$$(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^{2k}=\sum_{\lambda_1+\ldots+\lambda_n=2k}\frac{(2k)!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!}a_1^{\lambda_1}\ldots a_n^{\lambda_n}x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}$$

اگر نسبت به کرهٔ $x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant 1$ انتگرال بگیریم، آن وقت، انتگرال جمله‌هایی که، در آن‌ها، دست‌کم یکی از نماهای λ عددی فرد باشد، برابر صفر می‌شود. بنابراین

$$L_{2k}=\sum_{\mu_1+\ldots+\mu_n=k}\frac{(2k)!}{(2\mu_1)!\ldots(2\mu_n)!}a_1^{2\mu_1}\ldots a_n^{2\mu_n}\times$$

$$\times \int\dots\int x_1^{2\mu_1}\dots x_n^{2\mu_n} dx_1\dots dx_n$$
$$x_1^2+\dots+x_n^2\leqslant 1$$

ولی، بنابر تعمیم دستور دیریکله [۵] را ببینید]، مقدار انتگرال اخیر، چنین است*:

$$\frac{\Gamma(\mu_1+\frac{1}{2})\dots\Gamma(\mu_n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+k+1)}$$

در این‌جا فرض می‌کنیم:

$$\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})=(\mu-\tfrac{1}{2})(\mu-\tfrac{3}{2})\dots\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{(2\mu-1)!!}{2^\mu}\sqrt{\pi}$$

که بعد از تبدیل به دست می‌آید:

$$L_{2k}=\frac{(2k-1)!!}{2^k}\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k+1)}\sum_{\mu_1+\dots+\mu_n=k}\frac{k!}{\mu_1!\dots\mu_n!}a_1^{2\mu_1}\dots a_n^{2\mu_n}=$$

$$=\frac{(2k-1)!!}{2^k}\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k+1)}(a_1^2+\dots+a_n^2)^k$$

این انتگرال را، برای نخستین‌بار (والبته، با روش‌دیگری)، ن. یا. سونین محاسبه کرد. یادآوری می‌کنیم که انتگرال

$$L_{2k+1}=\overbrace{\int\dots\int}^{n}(a_1x_1+\dots+a_nx_n)^{2k+1}dx_1\dots dx_n$$
$$x_1^2+\dots+x_n^2\leqslant 1$$

همیشه برابر صفراست. سونین، با بسط تابع نمائی به‌صورت یك رشته و انتگرال‌گیری جمله به‌جمله، مقدار انتگرال زیررا هم به‌دست آورد:

---

*) باید توجه کرد که دستور دیریکله فرض‌را بر $x_1\geqslant 0$، ...، $x_n\geqslant 0$ می‌گیرد؛ بنابراین، باید نتیجهٔ حاصل از آن را در 2^n ضرب کرد.

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1} e^{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}dx_1\ldots dx_n\pi^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\frac{n}{2}+k+1)}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}$$

که در آن، برای سادگی کار، فرض شده است.

$$\rho=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$$

درحالت $n=2m$، این انتگرال را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\pi^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+m)!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}=$$

$$=\frac{(2\pi)^m}{(i\rho)^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{i\rho}{2}\right)^{2k+m}=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(i\rho)^{\frac{n}{2}}}J_{\frac{n}{2}}(i\rho)$$

یعنی برحسب تابع بسل، باانديس $m=\frac{n}{2}$ [۳۹۵، ۱۴)] واز آوند موهومی. درضمن باید توجه داشت کـه، اگر تابع بسل را با اندیس‌های کسری مـورد مطالعه قرار دهیم، این نتیجه‌گیری، درحالت فردبودن n هم، درست است.

۱۲) اکنون به مثالی می‌پردازیم کـه، محاسبهٔ انتگـرال چندگانه را، ضمن کاربرد دستورکلی (۶) مربوط به تغییر متغیرها، به‌دست می‌دهد.

طبیعی است، از تعمیم تبدیل قطبی، آغازکنیم که با رابطه‌های زیرمعین می‌شود:

$$\begin{cases} x_1=r\cos\varphi_1, \\ x_2=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{cases} \qquad (10)$$

اگر درفضای $x_1x_2\ldots x_n$، کرهٔ $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$ را درنظر بگیریم، آن‌وقت روشن است که می‌توان آن را، درفضای جدید $r\varphi_1\ldots\varphi_{n-1}$، درتناظر با مکعب مستطیل

$$0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi,\ \ldots,\ 0 \leqslant \varphi_{n-2} \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant 2\pi$$

قرارداد، تنها با این شرط که، بخشی از کره را در نظر بگیریم که نظیر $x_1 \geqslant 0$، $x_2 \geqslant 0$، ...، $x_n \geqslant 0$ باشد؛ در این صورت، همهٔ زاویه‌های $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$، در بازهٔ $[0, \frac{\pi}{2}]$ تغییر خواهند کرد.

ژاکوبین تبدیل

$$J = \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}$$

را می‌توان، به‌طور مستقیم و از روی تعریف، محاسبه کرد. ولی ما در این‌جا، آن را به‌طریق غیرمستقیم محاسبه می‌کنیم. رابطه‌های (۱۰)، به‌سادگی، به دستگاه معادله‌های زیر منجر می‌شوند:

$$F_1 \equiv r^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = 0$$
$$F_2 \equiv r^2 \sin^2\varphi_1 - (x_2^2 + \ldots + x_n^2) = 0$$
$$F_3 \equiv r^2 \sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2 - (x_3^2 + \ldots + x_n^2) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_n \equiv r^2 \sin^2\varphi_1 \ldots \sin^2\varphi_{n-1} - x_n^2 = 0$$

که درواقع، دستگاه تابع‌های (۱۰)، جواب این دستگاه است. در این حالت، بنا به‌دستور شمارهٔ ۲۱۰، ۸)

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = (-1)^n \frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}}$$

هردو دترمینان اخیر، بلافاصله محاسبه می‌شوند، زیرا منجر به‌حاصل‌ضرب جمله‌های قطری می‌شوند. این دو دترمینان، به‌ترتیب، چنین‌اند:

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(r, \ldots, \varphi_{n-1})} =$$
$$= (-1)^n 2^n r^{2n-1} \sin^{2n-2}\varphi_1 \cos\varphi_1 \sin^{2n-5}\varphi_2 \cos\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-1};$$

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = 2^n x_1 x_2 \cdots x_n =$$

$$= ۲^n r^n sin^{n-۱}\varphi_۱ cos\varphi_۱ sin^{n-۲}\varphi_۲ cos\varphi_۲ \dots sin\varphi_{n-۱} cos\varphi_{n-۱}$$

به‌این ترتیب، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$J = \frac{D(x_۱, x_۲, \dots, x_n)}{D(r, \varphi_۱, \dots, \varphi_{n-۱})} = r^{n-۱} sin^{n-۲}\varphi_۱ sin^{n-۳}\varphi_۲ \dots sin\varphi_{n-۲}$$

به عنوان مثال، این انتگرال را در نظر می‌گیریم:

$$G = \overbrace{\int\dots\int}^{n} f(\sqrt{x_۱^۲ + \dots + x_n^۲})\, dx_۱ \dots dx_n$$
$$x_۱^۲ + \dots + x_n^۲ \leqslant R^۲$$

اگر تبدیل قطبی را انجام دهیم، بلافاصله، به محاسبهٔ n انتگرال جداگانه، و مستقل از یکدیگر، منجر می‌شود:

$$G = \int_۰^R r^{n-۱} f(r)\, dr \cdot \int_۰^{\pi} sin^{n-۲}\varphi_۱ \, d\varphi_۱ \dots \int_۰^{\pi} sin^۲\varphi_{n-۳}\, d\varphi_{n-۳} \times$$

$$\times \int_۰^{\pi} sin\varphi_{n-۲}\, d\varphi_{n-۲} \cdot \int_۰^{۲\pi} d\varphi_{n-۱}$$

اگر برای محاسبهٔ انتگرال‌ها، از دستور زیر [۵۳۴، ۴)، (b)]، برای محاسبهٔ توان سینوس‌ها، استفاده کنیم:

$$\int_۰^{\pi} sin^{a-۱}\varphi\, d\varphi = ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} sin^{a-۱}\varphi\, d\varphi = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{۲}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+۱}{۲}\right)}$$

آن وقت، بعد از ساده کردن، به‌دست می‌آید:

$$G = ۲\frac{\pi^{\frac{n}{۲}}}{\Gamma\left(\frac{n}{۲}\right)} \int_۰^R r^{n-۱} f(r)\, dr$$

که نتیجهٔ تمرین‌های ۲) و ۳)، به‌عنوان حالت‌های خاصی از آن، به‌دست می‌آیند. درعین حال، این نتیجه، به‌نوبهٔ خود، در دستور لیوویل ۸) وجود دارد.

۱۳) اگر دستور (۱۰) را مجدور کنیم، متغیرهای $x_۱^۲$، $x_۲^۲$، . . . ، $x_n^۲$ را به

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, r^2, \sin^2\varphi_1, \ldots, \sin^2\varphi_{n-1}, \ldots$ را به $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ تبدیل کنیم،* آن وقت، به این دستگاه رابطه‌ها می‌رسیم:

$$\begin{cases} x_1 = u_1(1-u_2), \\ x_2 = u_1u_2(1-u_3), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = u_1u_2\ldots u_{n-1}(1-u_n) \\ x_n = u_1u_2\ldots u_n \end{cases} \qquad (11)$$

بنابراین، تبدیل (۱۱) را، به مفهومی، می‌توان هم‌ارز تبدیل قطبی (۱۰) دانست. در حالت $n=2$، ژاکوبی برای اثبات رابطهٔ بین تابع‌های B و Γ، از آن استفاده کرد [۶۱۷، (۱۳)].

می‌خواهیم، با به‌کاربردن تبدیل (۱۱) درمورد انتگرال واقع درسمت چپ، دستور لیوویل ۷) را به‌طور مستقیم ثابت کنیم. سادك (سیمپلکس)

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0,\ x_1 + \ldots + x_n \leqslant 1$$

متناظر است بامکعب $[0, 1; \ldots; 0, 1]$ درفضای $u_1 \ldots u_n$. ژاکوبین تبدیل، برابر است با

$$J = \begin{vmatrix} 1-u_2 & u_2(1-u_3)\ldots u_2\ldots u_{n-1}(1-u_n) & u_2\ldots u_n \\ -u_1 & u_1(1-u_3)\ldots u_1u_3\ldots u_{n-1}(1-u_n) & u_1u_3\ldots u_n \\ 0 & -u_1u_2 \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 \quad \ldots u_1\ldots n_{n-2}(1-u_n) & u_1\ldots u_{n-2}u_n \\ 0 & 0 \quad \ldots -u_1\ldots u_{n-1} & u_1\ldots u_{n-1} \end{vmatrix}$$

اگر به عضوهای هرستون، به ترتیب، عضوهای همهٔ ستون‌های بعدی را اضافه کنیم، آن وقت، همهٔ عضوهای زیر قطر برابر صفر می‌شوند، و عضوهای قطری به این صورت در می‌آیند.

$$1,\ u_1,\ u_1u_2,\ \ldots,\ u_1\ldots u_{n-1}$$

بنابراین، سرانجام به دست می‌آید:

---

*) روشن است که، دراین حالت، این متغیرها را تنها می‌توان غیرمنفی به حساب آورد.

$$J = u_1^{n-1} u_2^{n-2} \dots u_{n-1}$$

باتوجه به دستور (۶)، انتگرال ۱، چنین می‌شود:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(u_1) u_1^{p_1+p_2+\dots+p_n-1} (1-u_2)^{p_1-1} \times$$

$$\times u_2^{p_2+\dots+p_n-1} \dots (1-u_n)^{p_{n-1}-1} u_n^{p_n-1} du_1 \dots du_n$$

ادامهٔ‌کار روشن است، زیرا به صورت حاصل‌ضرب انتگرال‌های ساده، درآمده است.

۱۴) همین‌گونه تبدیل متغیرها، به‌ما امکان می‌دهد تاشکل دیگری از دستورلیوویل را به‌دست آوریم، که درآن، انتگرال nگانه، نسبت به‌حوزه‌ای نامتناهی باشد:

$$\int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geqslant 0 \\ x_1+\dots+x_n \geqslant 1}} \varphi(x_1+x_2+\dots+x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\dots+p_n)} \int_1^\infty \varphi(u) u^{p_1+\dots+p_n-1} du$$

درضمن، انتگرال سمت راست، متقارب مطلق درنظر گرفته می‌شود.

این دستور راهم، مثل قبل، می‌توان تعمیم داد [با ۸) مقایسه کنید]:

$$\int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geqslant 0 \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\dots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} \geqslant 1}} \varphi\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\dots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right) x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \frac{a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \int_1^\infty \varphi(u) u^{\frac{p_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{p_n}{\alpha_n}-1} du$$

به‌کمك دستور اخیر، مثلا می‌توان ثابت کرد:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0\\ x_1^{\alpha_1}+\ldots+x_n^{\alpha_n}\geqslant 1}} \frac{x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\cdots dx_n}{(x_1^{\alpha_1}+\ldots+x_n^{\alpha_n})^{\mu}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1\cdots\alpha_n\left(\mu-\frac{p_1}{\alpha_1}-\ldots-\frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}$$

با شرط $\mu>\frac{p_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}$.

۱۵) این دستور را (که بازهم متعلق به لیوویل است) ثابت کنید:

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)(1-v_1)^{p_1-1}(1-v_2)^{p_2-1}\ldots$$

$$\ldots(1-v_n)^{p_n-1}v_2^{p_1}v_3^{p_1+p_2}\ldots v_n^{p_1+\ldots+p_{n-1}}dv_1\ldots dv_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)}\int_0^1 \varphi(u)(1-u)^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1}du$$

راهنمائی. دستور را می‌توان از رابطه‌ای که در ۷) داده شده، نتیجه گرفت، به شرطی که در آن‌جا، $\varphi(u)$ را به $\varphi(1-u)$ تبدیل و درضمن فرض کنیم:

$$x_1=(1-v_1)v_2\ldots v_n,$$

$$x_2=(1-v_2)v_3\ldots v_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n-1}=(1-v_{n-1})v_n,$$

$$x_n=1-v_n$$

ژاکوبین تبدیل، دراین حالت، این مقدار را دارد:

$$J=(-1)^n v_2v_3^2\ldots v_{n-1}^{n-2}v_n^{n-1}$$

۱۶) همراه با کاتالان، به‌بررسی این انتگرال می‌پردازیم:

$$K=\underbrace{\int\cdots\int}_{x_1^2+\cdots+x_n^2=1}^{n-1} f(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)\frac{dx_1\cdots dx_{n-1}}{|x_n|}^{*}=$$

$$=2\underbrace{\int\cdots\int}_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1}^{n-1} f(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)\frac{dx_1\cdots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}$$

درضمن، بافرض $M=\sqrt{m_1^2+\cdots+m_n^2}$، تابع $f(u)$ را برای $|u|\leqslant M$، پیوسته به حساب می‌آوریم.

به تبدیل قائم خطی همهٔ متغیرها، به انضمام x_n، از روی رابطه‌های زیر، متوسل می‌شویم:

$$x_1=a_1u_1+b_1u_2+\cdots+k_1u_{n-1}+l_1u_n,$$

$$x_2=a_2u_1+b_2u_2+\cdots+k_2u_{n-1}+l_nu_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=a_nu_1+b_nu_2+\cdots+k_nu_{n-1}+l_nu_n$$

که در آن، ضریب‌ها (که تعدادشان برابر n^2 است)، از $\frac{n(n+1)}{2}$ شرط زیر پیروی می‌کنند:

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1;\quad a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_1^2+l_2^2+\cdots+l_n^2=1,\quad k_1l_1+k_2l_2+\cdots+k_nl_n=0$$

ازاین شرط‌ها، نتیجه می‌شود:

$$u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$$

متغیرهای جدید u_1، ...، u_{n-1} را، بااین فرض، انتخاب می‌کنیم که:

---

*) این انتگرال، درشکل اولیهٔ خود، درواقع، عبارت است ازانتگرال روی سطح

$$\int\cdots\int f(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)dS$$

نسبت به‌سطح کرهٔ واحد درفضای n بعدی [بایادداشت مربوط به (۳) مقایسه کنید].

$$u_n = \pm\sqrt{1-u_1^2-\ldots-u_{n-1}^2}$$

آزادی انتخاب ضریب‌ها، آن‌قدر زیاد است که حق‌داریم، به طور مشخص، فرض کنیم:

$$a_i = \frac{m_i}{M} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

وحتی، به‌طور اضافی، دترمینان حاصل از ضریب‌های تبدیل‌را برابر $+1$ بگیریم. با این فرض‌ها، روشن است که، مکمل جبری متناظر با هرعضو دترمینان، برابر با خودآن عضو است. باتوجه به‌این نکته، ژاکوبین

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_{n-1})}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 - l_1\frac{u_1}{u_n} & b_1 - l_1\frac{u_2}{u_n} & \ldots k_1 - l_1\frac{u_{n-1}}{u_n} \\ a_2 - l_2\frac{u_1}{u_n} & b_2 - l_2\frac{u_2}{u_n} & \ldots k_2 - l_2\frac{u_{n-1}}{u_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} - l_{n-1}\frac{u_1}{u_n} & b_{n-1} - l_{n-1}\frac{u_2}{u_n} \ldots k_{n-1} - l_{n-1}\frac{u_{n-1}}{u_n} \end{vmatrix}$$

برابر می‌شود با

$$l_n + a_n\frac{u_1}{u_n} + b_n\frac{u_2}{u_n} + \ldots + k_n\frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{x_n}{u_n}$$

به‌این ترتیب

$$K = 2\overbrace{\int\ldots\int}^{n-1} f(Mu_1)\frac{du_1\ldots du_{n-1}}{\sqrt{1-u_1^2-\ldots-u_{n-1}^2}} =$$
$$u_1^2+\ldots+u_{n-1}^2 \leqslant 1$$

$$= 2\int_{-1}^{1} f(Mu_1)du_1 \overbrace{\int\ldots\int}^{n-1} \frac{du_2\ldots du_{n-1}}{\sqrt{(1-u_1^2)-u_2^2-\ldots-u_{n-1}^2}}$$
$$u_2^2+\ldots+u_{n-1}^2 \leqslant 1-u_1^2$$

انتگرال درونی، به‌سادگی از ۳) به‌دست می‌آید و برابراست با

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}(1-u_1^2)^{\frac{n-3}{2}}$$

به نحوی که، سرانجام

$$K=2\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-1}^{1} f(\sqrt{m_1^2+\ldots+m_n^2}\,u)(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}du$$

که اگر $u=\cos\lambda$ بگیریم $(0\leqslant\lambda\leqslant\pi)$، می‌توان نتیجه را این طور نوشت:

$$K=2\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{0}^{\pi} f(\sqrt{m_1^2+\ldots+m_n^2}\cos\lambda)\sin^{n-2}\lambda\,d\lambda$$

که به‌ازای $n=3$، همان دستور پواسون به‌دست می‌آید [۶۳۳، ۳)].

۱۷) دستور کاتالان را می‌شناسیم [۵۹۷، ۱۵)؛ ۶۱۶، ۱۶)]؛ با تکرار همان بحث‌ها، می‌توان به‌طور مستقیم به‌حالت n بعدی رسید:

$$\overbrace{\int\ldots\int}^{n} f(x_1,\ldots,x_n)\varphi(g(x_1,\ldots,x_n))dx_1\cdots dx_n=$$
$$m\leqslant g(x_1,\ldots,x_n)\leqslant M$$

$$=(S)\int_m^M \varphi(u)d\psi(u)=(R)\int_m^M \varphi(u)\frac{d\psi(u)}{du}du \qquad (12)$$

که در آن داریم:

$$\psi(u)=\overbrace{\int\ldots\int}^{n} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n \qquad (13)$$
$$m\leqslant g(x_1,\ldots,x_n)\leqslant u$$

در این‌جا، M می‌تواند $+\infty$ هم باشد، در ضمن $\int_m^{+\infty}$ به عنوان $\lim_{M\to\infty}\int_m^M$ در نظر

گرفته می‌شود.

پیشنهاد می‌کنیم، به‌عنوان مثالی از روش کاتالان، دستور لیوویل ۷) را از روی دستور دیریکله ۴) به‌دست آورید.

۱۸) ن. یا. سونین به‌این‌مطلب توجه کرد که، دستور کالاتان را، به صورت دیگری هم می‌توان مورد استفاده قرار داد. $f(x_1, \dots, x_n)$ را تابعی همگن ازدرجهٔ s، و تابع $g(x_1, \dots, x_n)$ را همگن درجهٔ اول مثل

$$x_1+\dots+x_n \quad \text{یا} \quad \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$$

می‌گیریم. سپس فرض می‌کنیم $m=0$. دراین صورت، اگر در (۱۳) فرض کنیم:

$$x_1=u\xi_1, \quad x_2=u\xi_2, \dots, x_n=u\xi_n$$

(ژاکوبین $J=u^n$) ودر نظر بگیریم که نابرابری $g(x_1, \dots, x_n)\leqslant u$، به نابرابری $0\leqslant g(\xi_1, \dots, \xi_n)\leqslant 1$ منجر می‌شود، به دست می‌آید:

$$\psi(u)=u^{n+s}\overbrace{\int\dots\int}^{n} f(\xi_1, \dots, \xi_n)\,d\xi_1\dots d\xi_n$$
$$0\leqslant g(\xi_1,\dots,\xi_n)\leqslant 1$$

این‌را در (۱۲) قرار می‌دهیم (تنها، به‌جای ξ، دوباره x می‌نویسیم):

$$\overbrace{\int\dots\int}^{n} f(x_1, \dots, x_n)\,\varphi(g(x_1, \dots, x_n))\,dx_1\dots dx_n=$$
$$0\leqslant g(x_1, \dots, x_n)\leqslant M$$

$$=\overbrace{\int\dots\int}^{n} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1\dots dx_n\cdot\int_0^M \varphi(u)\,du^{n+s}$$
$$0\leqslant g(x_1, \dots, x_n)\leqslant 1$$

اکنون، اگر بتوانیم تابع φ و بعد مرز M راطوری انتخاب کنیم که انتگرال سمت چپ قابل محاسبه باشد، آن وقت، در واقع بیان انتگرال‌زیررا به‌دست آورده‌ایم:

$$\overbrace{\int\dots\int}^{n} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1\dots dx_n$$
$$0\leqslant g(x_1, \dots, x_n)\leqslant 1$$

مثلا، اگر خود را به مقدارهای نامنفی x_1، ...، x_n محدود کنیم و در نظر بگیریم:

$$g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n,$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{p_1 - 1} \dots x_n^{p_n - 1} \quad (p_i > 0),$$

$$\varphi(u) = e^{-u}, \quad M = +\infty$$

آن وقت خواهیم داشت: $s = p_1 + \dots + p_n - n$ و ما به دستور دیریکله می‌رسیم (۴)]:

$$\overbrace{\int \dots \int}^{n}_{\substack{x_1, \dots, x_n \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x_1 + \dots + x_n \leqslant 1}} x_1^{p_1 - 1} \dots x_n^{p_n - 1} dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \frac{\int_0^\infty e^{-x_1} x_1^{p_1 - 1} dx_1 \dots \int_0^\infty e^{-x_n} x_n^{p_n - 1} dx_n}{(p_1 + \dots + p_n) \int_0^\infty e^{-u} u^{p_1 + \dots + p_n - 1} du} = \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n + 1)}$$

۱۹) پیشنهاد می‌کنیم، باهمان روش، انتگرال زیررا به دست آورید:

$$\overbrace{\int \dots \int}^{n}_{\substack{x_1, \dots, x_n \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x_1 + \dots + x_n \leqslant 1}} \frac{x_1^{p_1 - 1} \dots x_n^{p_n - 1}}{(b_1 x_1 + \dots + b_n x_n)^q} dx_1 \dots dx_n$$

با این فرض که: $p_i > 0$، $b_i > 0$، $p_1 + \dots + p_n > q > 0$

(راهنمائی: فرض کنید: $\varphi(u) = e^{-u}$ و $M = +\infty$؛ از نتیجهٔ ۱۰) به ازای $a_1 = \dots = a_n = 1$ و $b_0 = 0$ استفاده کنید.

پاسخ: $\dfrac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n - q + 1)\Gamma(q)} \int_0^\infty \dfrac{u^{q-1} du}{(1 + b_1 u)^{p_1} \dots (1 + b_n u)^{p_n}}$

۲۰) تعمیم دستور کالاتان، به‌صورت زیرهم، به ن. یا. سونین تعلق دارد:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}\varphi(x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n))dx_1\cdots dx_n =$$
$$m\leqslant g(x_1, \ldots, x_n)\leqslant M$$
$$=(R)\int_m^M\left\{\frac{\partial\Phi(t, c)}{\partial t}\right\}_{c=t}dt$$

که در آن داریم:

$$\Phi(t, c)=\int\cdots\int_{m\leqslant g(x_1, \ldots, x_n)\leqslant t}\varphi(x_1, \ldots, x_n, c)\,dx_1\cdots dx_n$$

[دستورکاتالان را می‌توان ازاین‌دستور به‌دست آورد، به‌شرطی‌که تابع $\varphi(x_1, \ldots, x_n, c)$، به صورت خاص $f(x_1, \ldots, x_n)\varphi(c)$ درنظر گرفته شود.]

اثبات مؤلف را می‌آوریم. در برابری روشن

$$\int_m^M dt\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqslant g\leqslant M}F(x_1, \ldots, x_n, t)dx_1\cdots dx_n =$$

$$=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqslant g\leqslant M}dx_1\ldots dx_n\int_m^M F(x_1, \ldots, x_n, t)dt$$

فرض می‌کنیم:

$$F=\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} & m\leqslant g\leqslant t\\ 0 & g(x_1, \ldots, x_n)>t\end{cases}$$

دراین صورت، به دست می‌آید:

$$\int_m^M dt\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqslant g\leqslant t}\frac{\partial\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t}dx_1\cdots dx_n =$$

$$= \overbrace{\int\cdots\int}^{n} dx_1 \cdots dx_n \int_g^M \frac{\partial \varphi(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} dt$$
$$m \leqslant g \leqslant M$$

اگر انتگرال درونی سمت راست را محاسبه کنیم، آن وقت

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n} \varphi(x_1, \ldots, x_n, g) dx_1 \cdots dx_n =$$
$$m \leqslant g \leqslant M$$

$$= \Phi(M, M) - \int_m^M dt \overbrace{\int\cdots\int}^{n} \frac{\partial \varphi(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} dx_1 \cdots dx_n \qquad (۱۴)$$
$$m \leqslant g \leqslant t$$

از طرف دیگر، با توجه به قانون مشتق‌گیری از تابع مرکب «مشتق کامل»

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t) = \left\{\frac{\partial \Phi(t, c)}{\partial t}\right\}_{c=t} + \left\{\frac{\partial \Phi(t, c)}{\partial c}\right\}_{c=t}$$

با استفاده از قانون لایب‌نیتس برای مشتق دوم سمت راست، آن را با

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n} \frac{\partial \varphi(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} dx_1 \cdots dx_n$$
$$m \leqslant g \leqslant t$$

عوض می‌کنیم. اکنون، اگر ازاین برابری، نسبت به t، از m تا M انتگرال بگیریم و توجه داشته باشیم که $\Phi(m, m) = 0$، به دست می‌آید:

$$\Phi(M, M) - \int_m^M dt \int\cdots\int_{m \leqslant g \leqslant t} \frac{\partial \varphi(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} dx_1 \cdots dx_n = \int_m^M \left\{\frac{\partial \Phi(t, c)}{\partial t}\right\}_{c=t} dt$$

(۱۵)

اگر (۱۴) و (۱۵) را باهم مقایسه کنیم، به دستور موردنظر می‌رسیم.

۲۱) دستور سونین را، برای محاسبهٔ انتگرال زیر به‌کار برید:

$$S=\overbrace{\int\cdots\int}^{n} e^{\frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}}\,dx_1\cdots dx_n$$
$$0\leqslant\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\leqslant 1$$

در این‌جا، داریم:

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n,c)=e^{\frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{c}};\quad g(x_1,\ldots,x_n)=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2};$$

$$m=0;\ M=1;\ \Phi(t,c)=\overbrace{\int\cdots\int}^{n} e^{\frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{c}}\,dx_1\cdots dx_n$$
$$0\leqslant\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\leqslant t$$

روشن است که داریم:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n} e^{\frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{c}}\,dx_1\cdots dx_n=$$
$$0\leqslant\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\leqslant t$$

$$=t^n\overbrace{\int\cdots\int}^{n} e^{\frac{t}{c}(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)}\,dx_1\cdots dx_n$$
$$0\leqslant\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\leqslant 1$$

با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۱۱)، بسط زیر به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\Phi(t,c)=\pi^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k+1\right)}\left(\frac{\rho}{2c}\right)^{2k}t^{2k+n}$$

که در آن: $\rho=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$. در نتیجه

$$\left[\frac{\partial\Phi(t,c)}{\partial t}\right]_{c=t}=t^{n-1}\cdot 2\pi^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}$$

به‌نحوی که، بنا به‌دستور سونین

$$S=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n(\rho i)^{\frac{n}{2}-1}}J_{\frac{n}{2}-1}(\rho i)$$

[با ۱۱) مقایسه کنید].

۲۲) این انتگرال را محاسبه کنید ($\lambda\geqslant 0$):

$$R(\lambda)=\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}e^{-\left(x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{\lambda^n}{x_1\cdots x_{n-1}}\right)}\times$$

$$\times x_1^{\frac{1}{n}-1}x_2^{\frac{2}{n}-1}\cdots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,dx_1\cdots dx_{n-1}$$

[با ۶۱۷، ۱۹) مقایسه کنید].

اگر در زیر انتگرال، نسبت به λ (به‌ازای $\lambda>0$) مشتق بگیریم و، سپس، در نتیجهٔ حاصل، متغیر x_1 را با

$$z=\frac{\lambda^n}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}$$

عوض کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial R}{\partial\lambda}=-n\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}e^{-\left(x_2+\cdots+x_{n-1}+z+\frac{\lambda^n}{x_2\cdots x_{n-1}z}\right)}\times$$

$$\times x_2^{\frac{1}{n}-1}\cdots x_{n-1}^{\frac{n-2}{n}-1}z^{\frac{n-1}{n}-1}\,dx_2\cdots dx_{n-1}dz$$

یعنی $\frac{\partial R}{\partial\lambda}=-nR$ و از آن‌جا $R=Ce^{-n\lambda}$.

چون به‌ازای $\lambda=0$، انتگرال R پیوستگی خود را حفظ می‌کند، بنابراین

$$C=R(0)=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

[۵۳۱، ۶°]. سرانجام

$$R=\frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}e^{-n\lambda}$$

۲۳) لیوویل، با تیزهوشی، از این انتگرال، برای قضیهٔ حاصل‌ضرب، دربارهٔ تابع‌های Γ، که متعلق به گوس است، استفاده کرد [۵۳۶ را ببینید].

دوطرف برابری حاصل‌را در λ^{p-1} $(p>0)$ ضرب می‌کنیم و، ازآن، نسبت به λ از $\lambda=0$ تا $\lambda=+\infty$ انتگرال می‌گیریم. درسمت راست به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\int_0^{\infty}\lambda^{p-1}e^{-n\lambda}d\lambda=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{p+\frac{1}{2}}}\Gamma(p) \qquad (16)$$

درسمت چپ، انتگرال‌گیری نسبت به λ را درنوبت اول قرار می‌دهیم:

$$\int_0^{\overbrace{\infty\cdots\infty}^{n-1}}e^{-(x_1+\cdots+x_{n-1})}x_1^{\frac{1}{n}-1}\cdots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}dx_1\cdots dx_{n-1}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}e^{-\frac{\lambda^n}{x_1\cdots x_{n-1}}}\cdot\lambda^{p-1}d\lambda$$

انتگرال درونی، با جای‌گزینی $t=\dfrac{\lambda^n}{x_1\cdots x_{n-1}}$، منجر می‌شود به

$$\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)(x_1\cdots x_{n-1})^{\frac{p}{n}}$$

در این صورت، انتگرال $(n-1)$گانه‌ای باقی می‌ماند که به حاصل‌ضرب انتگرال‌های سادهٔ جداگانه‌ای تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\cdot\int_0^{\infty}e^{-x_1}\cdot x_1^{\frac{p+1}{n}-1}dx_1\cdots\int_0^{\infty}e^{-x_{n-1}}\cdot x_{n-1}^{\frac{p+n-1}{n}}dx_{n-1}=$$

$$=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{p+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{p+n-1}{n}\right)$$

اگر این حاصل‌ضرب را باعبارت (۱۶) برابر قراردهیم و p را به na تبدیل کنیم $(a>0)$، به دستور گوس می‌رسیم:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{na-\frac{1}{2}}}\Gamma(na)$$

۲۴) $f_1(x)$، $f_2(x)$، ...، $f_n(x)$ را تابع‌هایی کران‌دار و انتگرال‌پذیر در بازهٔ محدود $[a, b]$ می‌گیریم. ثابت کنید.

$$\frac{1}{n!}\int_a^b \overset{n}{\cdots} \int_a^b \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots f_2(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \cdots f_n(x_n) \end{vmatrix} dx_1 dx_2 \cdots dx_n =$$

$$= \begin{vmatrix} \int_a^b f_1^2 dx & \int_a^b f_1 f_2 dx & \cdots \int_a^b f_1 f_n dx \\ \int_a^b f_2 f_1 dx & \int_a^b f_2^2 dx & \cdots \int_a^b f_2 f_n dx \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \int_a^b f_1 f_n dx & \int_a^b f_n f_2 dx & \cdots \int_a^b f_n^2 dx \end{vmatrix}$$

انتگرال سمت راست را، انتگرال گرام گویند [به نام J.P.Gram].

بازهٔ $[a, b]$ را به m بخش برابر تقسیم می‌کنیم $(m > n)$ و مقدار هر n تابع را، در نقطه‌های تقسیم، در نظر می‌گیریم:

$$f_{ij}^{(m)} = f_i\left(a + J\frac{b-a}{m}\right)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ J = 0, 1, \ldots, m-1)$$

ماتریس مستطیلی را، که از این عددها تشکیل شده است، مجذور می‌کنیم. بنا بر قضیهٔ معروف، دترمینان متناظر آن

$$\left|\sum_j f_{ij}^{(m)} f_{kj}^{(m)}\right|^*$$

برابر می‌شود با مجموع مجذورهای دترمینان‌های ماتریس اولیهٔ مذکور:

---

*) برای سادگی کار، دترمینانی را که در محل برخورد سطر i ام و ستون k ام، عضو a_{ik} قرار داشته باشد، به صورت $|a_{ik}|$ نشان داده‌ایم.

$$\sum_{J_1<J_2<\cdots<J_n} \left| f_{iJ_k}^{(m)} \right|^2$$

که در آن، مجموع عبارت است از همهٔ ترکیب‌های ممکن m اندیس ۰، ۱، ...، $m-1$، به صورت n به n $(m>n)$. اگر از ترکیب، به تبدیل برویم، آن وقت هرجمله به تعداد $n!$ بار تکرار می‌شود؛ می‌توان به‌اندیس‌های برابر J هم دست‌نزد، زیرا این‌حالت، متناظر با جملهٔ صفر است. به‌عنوان نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{n!}\sum_{J_1=0}^{m-1}\cdots\sum_{J_n=0}^{m-1}\left| f_{iJ_k}^{(m)} \right|^2 = \left| \sum_{J=0}^{m-1} f_{iJ}^{(m)} f_{kJ}^{(m)} \right|$$

اگر هرجمله از مجموع چندگانهٔ سمت چپ را در $\left(\frac{b-a}{m}\right)^n$ و هرجمله از دترمینان سمت راست را در $\frac{b-a}{m}$ ضرب کنیم، آن وقت به‌یك برابری می‌رسیم که از نوع برابری موردنظر است، تنها به‌جای انتگرال‌ها، با مجموع‌های انتگرالی سروکار خواهیم داشت. برای این‌که اثبات کامل شود، کافی‌است، به ازای $m\to\infty$، به سمت حد برویم.

MATH75.IR

فصل نوزدهم

رشته‌های فوریه

§۱. مقدمه

۶۷۷. کمیت‌های متناوب و آنالیز همساز. در دانش وصنعت، اغلب، با پدیده‌های متناوب سروکار داریم، یعنی پدیده‌هایی که، در هر فاصلهٔ زمانی T، که دورهٔ تناوب نامیده می‌شود، به‌صورت قبلی تکرار می‌شوند. مثلاً حرکت ماشین بخار، درجریان تعداد معینی از دورهای خود، دوباره از وضع نخستین خود می‌گذرد. همچنین، جریان برق را می‌توان یك پدیدهٔ متناوب دانست وغیره. کمیت‌های مختلفی که به‌پدیده‌های متناوب مربوط می‌شوند، بعداز هر دورهٔ تناوب T، به مقدار قبلی خود برمی‌گردند و، درنتیجه، نسبت بـه زمان t، تابع‌هایی متناوب‌اند و با این برابری مشخص می‌شوند:

$$\varphi(T+t)=\varphi(t)$$

ازاین‌گونه‌اند، مثلاً، نیرو وشدت جریان متناوب، و یا درماشین بخار، فشار بخار، تقویت مماسی در پیچ سر میل لنگ وغیره.

اگر مقدار ثابت را به‌حساب نیاوریم، ساده‌ترین تابع‌های متناوب، کمیت سینوسی $A\sin(\omega t+\alpha)$ است،که‌درآن، ω «بسامد» است و با دورهٔ تناوب T، بااین رابطه مربوط است:

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \qquad (1)$$

به‌کمك‌این‌گونه تابع‌های‌متناوب ساده، می‌توان تابع‌های‌متناوب بغرنج‌تر را درست کرد، به‌خودی خود روشن است‌که، از نظر تناوب، وقتی با تابع سینوسی تازه‌ای‌سروکار پیدا می‌کنیم که «بسامدهای» تشکیل‌دهندهٔ آن با هم اختلاف داشته باشند، زیرا ازترکیب تابع‌های سینوسی هم بسامد، دوباره به کمیتی سینوسی با همان بسامد می‌رسیم. برعکس،

اگر کمیت‌های به‌صورت

$$y_0 = A_0,\ y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1),\ y_2 = A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2),\ y_3 = A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3),\ \dots \qquad (2)$$

را با هم ترکیب کنیم که، بدون توجه به‌مقدار ثابت، دارای بسامدهای

$$\omega,\ 2\omega,\ 3\omega,\ \dots,$$

(که همه، مضربی از کوچکترین آن‌ها، یعنی ω هستند) و دوره‌های تناوب

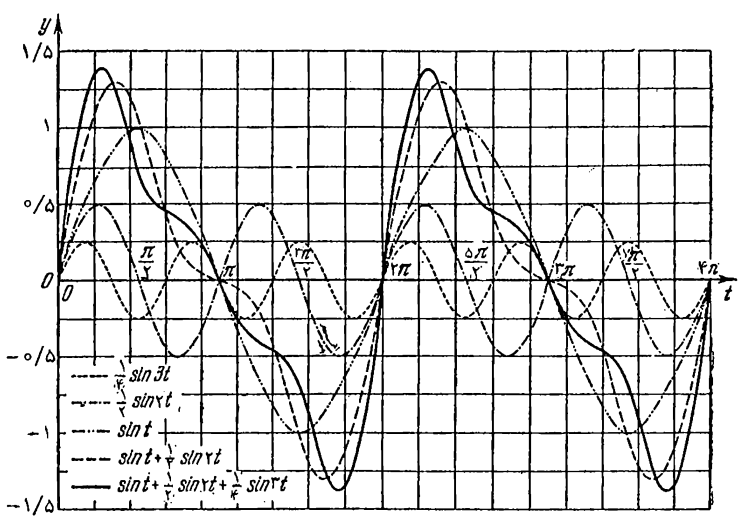
$$T,\ \frac{1}{2}T,\ \frac{1}{3}T,\ \dots$$

باشند، آن‌وقت، تابع متناوبی (با دورهٔ تناوب T) به‌دست می‌آید که به کلی با کمیت‌های از نوع (۲)، متفاوت است.

در این‌جا، به‌عنوان‌مثال، مجموع سه کمیت سینوسی را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۲۱):

$$\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 3t$$

که نمودار آن، از لحاظ رفتار خود، تفاوت قابل ملاحظه‌ای با نمودار کمیت‌های سینوسی تشکیل‌دهندهٔ خود دارد. برای رشته‌های نامتناهی که از کمیت‌های به‌صورت (۲) تشکیل



شکل ۱۲۱

شده باشد، بازهم، تا حد زیادی، همین وضع وجود دارد.

طبیعی است که، اکنون، به‌مسالهٔ عکس بپردازیم: آیا می‌توان تابع متناوب‌مفروض $\varphi(t)$ با دورهٔ تناوب T را به‌صورت مجموع تعدادی متناهی، یـا نامتناهی، ازکمیت‌های سینوسی از نوع (۲) نشان داد؟ به‌طوری‌که خواهیم دید، اگر تابع را به‌مفهوم گسترده‌تر خود درنظر بگیریم، و اگر دنبالهٔ نامتناهی کمیت‌های (۲) را درنظر داشته باشیم، می‌توان به این پرسش، پاسخ مثبت داد. تابع‌های این رده را می‌توان به‌صورت «رشته‌های‌مثلثاتی» بسط داد:

$$\varphi(t)=A_0+A_1\sin(\omega t+\alpha_1)+A_2\sin(2\omega t+\alpha_2)+A_3\sin(3\omega t+\alpha_3)+\cdots=$$

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\alpha_n) \qquad (3)$$

درضمن، A_0، A_1، α_1، A_2، α_2، ...، مقدارهای‌ثابتی هستندکه، برای‌هریك از این تابع‌ها، مشخص‌اند و بسامد ω با دستور (۱) داده می‌شود.

از نظر هندسی، این مطلب به‌معنای آن است‌که، نمودار تابع متناوب، از طریق روی هم‌گذاری رشته‌ای از سینوسوئیدها بـه‌دست می‌آید. اگر هـر کمیت سینوسی را، از نظر مکانیکی، به‌عنوان یك حرکت نوسانی همساز تفسیر کنیم، آن‌وقت می‌تـوان گفت: نوسان مرکبی که با رابطهٔ $\varphi(t)$ مشخص می‌شود، قابل تجزیه به نوسان‌های همساز جـداگانه‌ای است. این‌کمیت‌های سینوسی جداگانه را،که دربسط (۳) وارد شده‌اند، مولفه‌های‌همساز تابع $\varphi(t)$ و یا، به‌طور ساده، همسازهای (اول، دوم، ...) می‌نامند، خود فرایند تجزیهٔ‌یك تابع متناوب به همسازها را، آنالیز همساز گویند.

اگر متغیر مستقل را

$$x=\omega t=\frac{2\pi t}{T}$$

انتخاب‌کنیم، آن‌وقت، به‌تابعی از x می‌رسیم:

$$f(x)=\varphi\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

که بازهم یك‌تابع متناوب است، منتهی با دورهٔ تناوب عادی 2π. در این حالت بسط(۳) به این صورت درمی‌آید:

$$f(x)=A_0+A_1\sin(x+\alpha_1)+A_2\sin(2x+\alpha_2)+A_3\sin(3x+\alpha_3)+\dots=$$

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\alpha_n) \qquad (۴)$$

سینوس‌ها را، با توجه به رابطهٔ سینوس مجموع، باز می‌کنیم و در نظر می‌گیریم:

$$A_0=a_0,\ A_n\sin\alpha_n=a_n,\ A_n\cos\alpha_n=b_n \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

در این‌صورت، به‌شکل نهائی بسط مثلثاتی می‌رسیم:

$$f(x)=a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+$$

$$+(a_3\cos 3x+b_3\sin 3x)+\dots=$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (۵)$$

که همیشه، به آن توجه خواهیم داشت*. در این‌جا، تابع زاویهٔ x، با دورهٔ تناوب برابر 2π، برحسب کسینوس‌ها و سینوس‌های مضرب‌های x، بسط داده شده است.

ما بسط تابع‌ها را به‌رشته‌های مثلثاتی، از پدیده‌های متناوب و نوسانی، و کمیت‌های وابسته به‌آن‌ها آغاز می‌کنیم. ولی یادآوری این مطلب در همین‌جا لازم است که، چنین بسط‌هایی، برای بررسی تابع‌هایی هم که در یك بازهٔ متناهی داده شده‌اند و موجب تولید هیچ پدیدهٔ نوسانی نیستند، می‌تواند بسیار سودمند باشد.

۶۷۸. تعیین ضریب‌ها باروش اولر ـ فوریه. برای این که ثابت کنیم، هر تابع مفروض $f(x)$ با دورهٔ تناوب 2π را، می‌توان به‌صورت بسط مثلثاتی (۵) در آورد، از تعریفی که برای ضریب‌های a_0، a_1، b_1، ...، a_n، b_n داشتیم، آغاز می‌کنیم. برای تعیین این ضریب‌ها، از روشی استفاده می‌کنیم که در نیمهٔ دوم سدهٔ هیجدهم، به‌وسیلهٔ اولر و، سپس، مستقل از او، در ابتدای سدهٔ نوزدهم، به‌وسیلهٔ فوریه مورد استفاده قرار گرفت.

فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$، در بازهٔ $[-\pi,\pi]$، به‌معنای ویژه یا ناویژه، انتگرال‌پذیر باشد؛ درحالت انتگرال‌پذیری به‌معنای ناویژه، به‌طور اضافی فرض می‌کنیم که تابع، به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر است. بسط (۵) را مفروض می‌گیریم و از آن، جمله به‌جمله، از $-\pi$ تا π انتگرال می‌گیریم؛ به‌دست می‌آید:

---

*) روشن است که، درصورت لزوم، می‌توان درجهت عکس حرکت کرد و خود را از (۵)، به‌دستور بسط (۴) رسانید.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = ۲\pi a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right]$$

ولی، به سادگی دیده می‌شود

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = ۰$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = ۰ \qquad (۶)$$

بنابراین، همهٔ جمله‌های بعد از علامت $\sum$، برابر صفر می‌شوند و، سرآخر، به‌دست‌می‌آید:

$$a_۰ = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (۷)$$

برای پیدا کردن ضریب a_m، دو طرف برابری (۵) را (که همیشه، آن را برقرار می‌گیریم) در $\cos mx$ ضرب می‌کنیم و دوباره، در همان بازه، انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_۰\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx +$$
$$+\sum_{n=۱}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\right]$$

جملهٔ اول سمت راست، بنابر (۶)، از بین می‌رود. سپس داریم [با۳۰۸، ۴) مقایسه کنید]:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx = \frac{۱}{۲}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]dx = ۰ \qquad (۸)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \frac{۱}{۲}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]dx = ۰ \qquad (۹)$$

(با شرط $n\neq m$) و سرانجام

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^۲ mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{۱+\cos ۲mx}{۲}dx = \pi \qquad (۱۰)$$

به‌این ترتیب، همهٔ جمله‌های جلو علامت $\sum$، به‌جز انتگرالی که ضریب a_m دارد، برابرصفر

می‌شوند. درنتیجه، این ضریب به‌دست می‌آید:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \qquad (11)$$

$$(m=1, 2, 3, \ldots)$$

به‌همین ترتیب، اگر دو طرف (۵) را در $\sin mx$ ضرب کنیم و، سپس، انتگرال بگیریم، ضریب سینوس به‌دست می‌آید:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx \qquad (12)$$

$$(m=1, 2, 3, \ldots)$$

درضمن، به‌جز (۶) و (۸)، درستی رابطه‌های زیر هم، به‌سادگی قابل تحقیق‌اند:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx = 0 \quad (n\neq m) \qquad (13)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \pi \qquad (14)$$

دستورهای (۷)، (۱۱) و (۱۲) را، دستورهای اولر ـ فوریه، ضریب‌هایی را که به‌کمك این دستورها محاسبه می‌شوند، ضریب‌های فوریه دراین تابع، و رشتهٔ (۵) را، که به‌کمك این ضریب‌ها تشکیل می‌شود، رشتهٔ فوریه می‌نامند. و ما، دراین فصل، به‌بررسی همین رشته‌های فوریه می‌پردازیم.

ببینیم، این بحث، چه‌ارزش منطقی دارد؟ ما ازاین‌جا آغاز کردیم که، بسط مثلثاتی (۵) برقرار است، بنابراین، پاسخ به‌این پرسش که، آیا این بسط پاسخ‌گوی حقیقت است یا نه، همچنان بازمی‌ماند. آیا ملاحظه‌هایی که، به‌کمك آن‌ها، به‌تقلید از اولر و فوریه، ضریب‌های بسط (۵) را پیدا کردیم، حتی با این فرض که آن‌ها وجود دارند، قانع‌کننده‌اند؟ بارها، ازانتگرال‌گیری جمله به‌جمله رشته، استفاده کردیم، درحالی که، این عمل، همیشه مجاز نیست [۴۳۴]. شرط کافی، برای مجاز بودن این عمل، همگرائی یکنواخت رشته است. بنابراین، اگر بخواهیم دقیق باشیم، باید گفت:

اگر تابع $f(x)$ بادورهٔ تناوب 2π، به‌رشتهٔ مثلثاتی (۵) بسط‌یابد*، آن‌وقت این رشته، الزاماً یك رشتهٔ فوریه است.

---

*) یادآوری می‌کنیم که تقارب یکنواخت، ضمن ضرب همهٔ جمله‌های رشته در تابع‌های محدود $\cos mx$ یا $\sin mx$، به‌قوت خود باقی می‌ماند [۴۲۹]. دراین‌جا، می‌شد، به‌جای تقارب یکنواخت، از کران‌دار بودن مجموع‌های جزئی رشته استفاده کرد [۵۲۸].

اگر ازقبل، فرض یکنواختی تقارب وجود نداشته باشد، ملاحظه‌های ما، حتی این‌را هم ثابت نمی‌کند که، تابع می‌تواند تنها به‌رشتهٔ فوریه بسط یابد [با ۷۵۹ و ۷۶۰ مقایسه کنید]. پس، این‌ملاحظه‌ها، چه‌معنایی دارند؟ آن‌هارا می‌توان تنها به‌عنوان نشانه‌ای درنظر گرفت، دال بر این‌که، بسط مثلثاتی تابع مفروض، دست‌کم، بـا رشتهٔ فوریهٔ خود آغاز می‌شود و هنوز باید، با دقت‌کامل، روشن کرد با چه شرطهایی همگراست و، به‌خصوص، با چه شرطهایی به‌سمت تابع مفروض همگراست.

تا زمانی که این موضوع‌ها را روشن نکرده‌ایم، تنها حق داریم، رشتهٔ فوریهٔ تابع مفروض $f(x)$ را، به‌طور صعودی، مورد بررسی قرار دهیم، ولی هیچ اظهارنظر دیگری دربارهٔ آن، نمی‌توانیم داشته باشیم، جز این‌کـه، از تابع $f(x)$ «تولید» شده است. این رابطهٔ آن‌را با f، معمولاً با اجتناب از علامت برابری، به‌این‌صورت نشان می‌دهند:

$$f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx+b_n sinnx) \qquad (5a)$$

۶۷۹. دستگاه تابع‌های متعامد. آن‌چه در شمارهٔ قبل آوردیـم، نمونه‌ای است از بحثی که‌اغلب، درآنالیزریاضی و ضمن مطالعهٔ بسیاری‌ازبسطها، مورداستفاده قرارمی‌گیرد.

دوتابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ را، کـه دربازهٔ $[a, b]$ معین‌اند، دراین بازه متعامد گویند، وقتی‌که حاصل‌ضرب آن‌ها، انتگرالی برابر صفر داشته باشد:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx=0$$

دستگاه تابع‌های $\{\varphi_n(x)\}$ را، که در فاصلهٔ $[a, b]$ معین و همراه با مجذور این تابع‌ها در این بازه انتگرال‌پذیرند، درنظرمی‌گیریم. می‌دانیم‌که، در این‌صورت، حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دوی این تابع‌ها هم، انتگرال‌پذیرمی‌شوند [۴۸۳، ۶)]. اگر تابع‌های دستگاه‌مفروض دوبه‌دو، متعامد باشند:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)=0 \qquad (15)$$
$$(n, m=0, 1, 2, \ldots; n\neq m)$$

آن‌وقت، آن‌را دستگاه تابع‌های متعامد گویند. درضمن، همیشه فرض ما بر این است‌که

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx=\lambda_n>0 \qquad (16)$$

به‌نحوی که، در دستگاه، نه تابعی وجود دارد که متحد با صفر باشد و نه، به‌مفهومی*، تابعی مشابه آن وجود دارد که، انتگرال مجذور آن، برابر صفر درآید.

با شرط $\lambda_n = 1$ (برای $n = 0, 1, 2, \dots$)، دستگاه را نرمال می‌نامند. درحالتی‌هم که، این شرط، برقرار نباشد، در صورت لزوم، می‌توان دستگاه $\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$ را در نظر گرفت که آشکارا نرمال است. به‌چند مثال بپردازیم.

۱) مهمترین نمونهٔ دستگاه تابع‌های متعامد، دستگاه مثلثاتی

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \qquad (17)$$

در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ است، که ما آن‌را در بالا، مورد مطالعه قرار دادیم. متعامد بودن این این‌دستگاه، از رابطه‌های (۶)، (۸)، (۹) و (۱۳) نتیجه می‌شود. ولی، این دستگاه، با توجه به (۱۰) و (۱۴)، نرمال نیست. اگر تابع مثلثاتی (۱۷) را در ضریب‌های مناسبی ضرب کنیم، می‌توانیم به یک‌دستگاه نرمال برسیم:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \qquad (17^*)$$

۲) توجه کنیم که همین دستگاه (۱۷) یا (۱۷*)، در بازهٔ بریده شدهٔ $[0, \pi]$ متعامد نیست، زیرا اگر m و n، عددهای زوج مختلفی باشند:

$$\int_0^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx \neq 0$$

برعکس، به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که هریک ازدستگاه‌های جزئی که تنها از کسینوس‌ها تشکیل شده باشد:

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots \qquad (18)$$

و یا تنها از سینوس‌ها

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots \qquad (19)$$

به‌طور جداگانه، در این بازه، دستگاهی متعامد است.

۳) دستگاه‌های

---

*) شماره **۷۳۳** را ببینید.

$$۱, \cos\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{۲\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \ldots; \qquad (۱۸^*)$$

$$\sin\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{۲\pi x}{l}, \ldots, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots \qquad (۱۹^*)$$

با دستگاه‌هایی که هم‌اکنون مورد بررسی قرار دادیم، تفاوت اساسی ندارند. هر کدام از آن‌ها، یک‌دستگاه متعامد در بازهٔ $[۰, l]$ است.

۴) برای این‌که نمونهٔ بغرنج‌تری از دستگاه‌های متعامد را، که از تابع‌های مثلثاتی درست شده باشد، ارائه دهیم، معادلهٔ غیرجبری

$$tg\xi = c\xi \quad (c = \text{const}.) \qquad (۲۰)$$

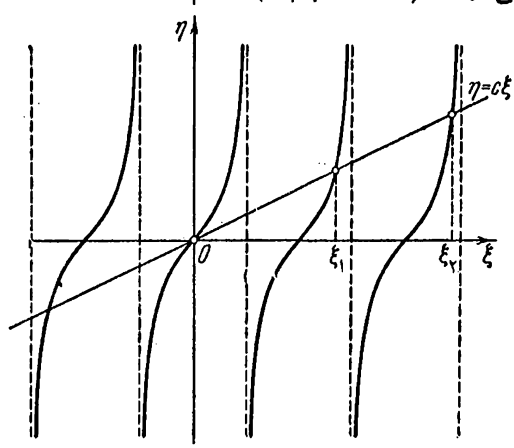
را در نظر می‌گیریم. می‌توان ثابت کرد که، این معادله، مجموعه‌ای نامتناهی از ریشه‌های مثبت دارد:

$$\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n, \ldots$$

از نظر هندسی، این ریشه‌ها، به عنوان طول نقطه‌های برخورد نمودار $\eta = tg\xi$ با نمودار خط راست $\eta = c\xi$ به‌دست می‌آیند (شکل ۱۲۲). اکنون، دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sin\frac{\xi_۱}{l}x, \sin\frac{\xi_۲}{l}x, \ldots, \sin\frac{\xi_n}{l}x, \ldots$$

به‌سادگی محاسبه می‌شود که (به‌ازای $\alpha \neq \beta$) داریم:



شکل ۱۲۲.

$$\int_0^l \sin\alpha x \sin\beta x\,dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(\alpha-\beta)l}{\alpha-\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)l}{\alpha+\beta}\right\} =$$

$$= \cos\alpha l \cos\beta l \frac{\beta tg\,\alpha l - \alpha tg\,\beta l}{\alpha^2-\beta^2}$$

که اگر فرض کنیم: $\alpha = \frac{\xi_n}{l}$ و $\beta = \frac{\xi_m}{l}$ $(m \neq n)$، آن‌وقت با استفاده از معادلهٔ (۲۰)، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^l \sin\frac{\xi_n}{l}x \cdot \sin\frac{\xi_m}{l}x\,dx = 0 \quad (n \neq m)$$

یعنی، دستگاه مفروض، در بازهٔ $[0, l]$، متعامد است.

همین نتیجه را، در بارهٔ دستگاه زیر هم می‌توان به‌دست آورد:

$$\cos\frac{\xi'_1}{l}x,\ \cos\frac{\xi'_2}{l}x,\ \ldots,\ \cos\frac{\xi'_n}{l}x,\ \ldots$$

به‌شرطی که

$$\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n, \ldots$$

دنباله‌ای از ریشه‌های مثبت معادلهٔ زیر باشد:

$$cotg\,\xi = c\xi \quad (c = \text{const.})$$

ولی هیچ‌کدام از این دو دستگاه، نرمال نیستند.

۵) نمونهٔ مهمی ازدستگاه‌های متعامد، در بازهٔ $[-1, 1]$، عبارت‌است‌ازچندجمله‌ای لژاندر:

$$P_0(x) = 1,\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

[شماره‌های ۱۱۸ و ۳۲۰ را ببینید]. چون

$$\int_{-1}^{1} P_n^2\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

بنابراین، برای به‌دست آوردن دستگاه نرمال، باید این چندجمله‌ای‌ها را به‌ترتیب، در $\sqrt{n+\frac{1}{2}}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ضرب کرد.

۶) در پایان، به‌مثالی می‌پردازیم که به‌تابع‌های بسل مربوط می‌شود. برای سادگی کار، تنهاتابع $J_0(x)$ را در نظر می‌گیریم، ولی همهٔ آن‌چه را که می‌گوییم، برای $J_n(x)$ $(n>0)$ هم درست است.

در نظریهٔ تابع‌های بسل ثابت می‌شود که $J_0(x)$، مجموعه‌ای نامتناهی از ریشه‌های مثبت دارد:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

اگر معادله‌ای را که $J_0(x)$ در آن صدق می‌کند، به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dz}{dx}\right]=-xz$$

به‌سادگی معلوم می‌شود که، به‌ازای α و β دلخواه، داریم:

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_0(\alpha x)}{dx}\right]=-\alpha^2 xJ_0(\alpha x);$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_0(\beta x)}{dx}\right]=-\beta^2 xJ_0(\beta x)$$

برابری اول را در $J_0(\beta x)$ و برابری دوم را در $J_0(\alpha x)$ ضرب و، سپس، یکی را از دیگری کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(\beta^2-\alpha^2)xJ_0(\alpha x)J_0(\beta x)=\frac{d}{dx}\left[\alpha xJ_0(\beta x)J_0'(\alpha x)-\beta xJ_0(\alpha x)J_0'(\beta x)\right]$$

از آن‌جا، به‌شرط $\alpha\neq\beta$:

$$\int_0^1 xJ_0(\alpha x)J_0(\beta x)dx=\frac{\alpha J_0(\beta)J_0'(\alpha)-\beta J_0(\alpha)J_0'(\beta)}{\beta^2-\alpha^2} \qquad (۲۱)$$

اگر در این‌جا فرض کنیم: $\alpha=\xi_n$، $\beta=\xi_m$ (برای $n\neq m$)، آن‌وقت به این رابطه می‌رسیم:

$$\int_0^1 xJ_0(\xi_n x)J_0(\xi_m x)dx=0$$

که روشن می‌کند، دستگاه تابع‌های $\{\sqrt{x}J_0(\xi_n x)\}$، در بازهٔ $[0, 1]$، متعامد است*. این دستگاه، نرمال نیست.

دستگاه متعامد $\{\varphi_n(x)\}$ را، در بازهٔ $[a, b]$، در نظر می‌گیریم. این هدف را در برابر خود قرار می‌دهیم که، تابع $f(x)$ را، که در بازهٔ $[a, b]$ معین است، به «رشته‌ای برحسب تابع‌های φ»، به‌صورت زیر بسط دهیم:

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+\cdots \qquad (۲۲)$$

برای به‌دست آوردن ضریب‌های این بسط (به‌فرض امکان آن)، به‌همان ترتیب حالت خاص قبل، عمل می‌کنیم. دوطرف را، در $\varphi_m(x)$ ضرب می‌کنیم و، سپس، جمله به‌جمله، انتگرال می‌گیریم:

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx$$

با توجه به متعامد بودن [(۱۵) و (۱۶) را ببینید]، همهٔ انتگرال‌های سمت راست، به جز یکی، برابر صفر می‌شوند و به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$c_m=\frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx \qquad (۲۳)$$

$$(m=0, 1, 2, \ldots)$$

(رابطه‌های (۷)، (۱۱) و (۱۲)، حالت‌های خاص این رابطه‌اند).

رشتهٔ (۲۲)، با ضریب‌هایی که طبق دستورهای (۲۳) تشکیل می‌شوند، رشتهٔ (تعمیم‌یافتهٔ) فوریه‌ازتابع مفروض و، خودضریب‌ها، ضریب‌های (تعمیم‌یافتهٔ) فوریه نسبت به‌دستگاه $\{\varphi_n(x)\}$ نامیده‌می‌شوند. دستورهای (۲۳)، به‌خصوص درحالت دستگاه‌های نرمال، ساده ازآب درمی‌آیند، دراین حالت

---

*) اگر مفهوم تابع‌های متعامد φ و ψ را تعمیم دهیم، یعنی به‌فرض برقرار بودن برابری

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)\psi(x)dx=0$$

آن‌را متعامد به‌وزن $p(x)$ بنامیم، آن‌وقت، می‌توان گفت که، دستگاه تابع‌های $\{J_0(\xi_n x)\}$، متعامد به‌وزن x است.

$$c_m=\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx \qquad (۲۳^*)$$
$$(m=۰,۱,۲,\ldots)$$

البته، همان ملاحظه‌هایی که در پایان شمارهٔ قبل آوردیم، در این‌جا هم می‌توانند تکرار شوند. رشتهٔ تعمیم‌یافتهٔ فوریه، که برای تابع مفروض $f(x)$ ساخته می‌شود، تنها به‌طور صوری با این تابع بستگی دارد؛ و در حالت کلی، بستگی بین تابع $f(x)$ و رشتهٔ (تعمیم‌یافتهٔ) فوریهٔ آن، به‌این‌صورت نشان داده می‌شود:

$$f(x)\sim\sum_{۰}^{\infty}c_n\varphi_n(x) \qquad (۲۲^*)$$

و همگرائی این رشته به‌سمت تابع $f(x)$، مثل حالت رشته‌های مثلثاتی، باید موردبررسی قرار گیرد.

۶۸۰. انطباق مثلثاتی. می‌توان مسالهٔ معرفی تابع مفروض $f(x)$ را با رشتهٔ مثلثاتی با آغاز از انطباق مثلثاتی، حل کرد؛ یعنی، به‌کمک چندجمله‌ای مثلثاتی زیر، به‌تابع $f(x)$ نزدیک شد:

$$\sigma_n(x)=o_۰+\sum_{k=۱}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx) \qquad (۲۴)$$

که مقدار آن، در یک رشته از نقطه‌ها، بر نقطه‌های متناظر خود در تابع مفروض، منطبق است.

همیشه می‌توان $(۲n+۱)$ ضریب $\alpha_۰$، $\alpha_۱$، $\beta_۱$، ...، α_n، β_n را در چندجمله‌ای درجهٔ nام (۲۴)، طوری انتخاب کرد که، مقدارهای چندجمله‌ای، برابر با مقدارهای تابع $f(x)$ در $(۲n+۱)$ نقطه‌ای که، ازقبل، در بازهٔ $(\pi,-\pi)$ تعیین کرده‌ایم، باشد؛ مثلاً در نقطه‌های

$$\xi_i=i\lambda \quad (i=-n,-n+۱,\ldots,-۱,۰,۱,\ldots,n-۱,n)$$

که در آن $\lambda=\frac{۲\pi}{۲n+۱}$. درواقع، برای پیدا کردن این $(۲n+۱)$ ضریب، $(۲n+۱)$ معادلهٔ خطی داریم:

$$\alpha_۰+\sum_{k=۱}^{n}(\alpha_k\cos k\xi_i+\beta_k\sin k\xi_i)=f(\xi_i) \qquad (۲۵)$$
$$(i=-n,-n+۱,\ldots,n)$$

برای حل این دستگاه، یکی از اتحادهای مقدماتی مثلثاتی را به‌یاد می‌آوریم*:

$$\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cos ih=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})h}{2\sin\frac{1}{2}h} \qquad (۲۶)$$

همهٔ برابری‌های (۲۵) را باهم جمع می‌کنیم. با توجه به فرد بودن سینوس، ضریب β_k

$$\sum_{i=-n}^{n}\sin k\xi_i=0$$

همین مطلب را، در مورد ضریب α_k هم می‌توان گفت، زیرا با توجه به‌زوج‌بودن کسینوس

$$\sum_{i=-n}^{n}\cos k\xi_i=1+2\sum_{i=1}^{n}\cos ik\lambda=0 \qquad (۲۷)$$

(باتوجه به اتحاد (۲۶)، به شرطی که در آن فرض کنیم: $h=k\lambda=\frac{2k\pi}{2n+1}$). بنابراین

$$\alpha_0=\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}f(\xi_i) \qquad (۲۸)$$

برای پیداکردن $\alpha_m(1\leqslant m\leqslant n)$، برابری‌های (۲۵) را، به‌ترتیب، در $\cos m\xi_i$ ضرب و، سپس، آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. ضریب α_0، بنابر (۲۷)، برابرصفرمی‌شود؛ ضریب β_k هم، به دلیل فردبودن سینوس، برابر صفر است. ضریب α_k به این صورت درمی‌آید:

$$\sum_{i=-n}^{n}\cos k\xi_i\cos m\xi_i=\frac{1}{2}\sum_{i=-n}^{n}\cos(k+m)\xi_i+\frac{1}{2}\sum_{i=-n}^{n}\cos(k-m)\xi_i$$

به‌ازای $k\neq m$، هر دومجموع سمت‌راست برابری، باتوجه‌به (۲۷)، برابر صفرمی‌شوند؛ و به‌ازای $k=m$، مجموع اول برابر صفر می‌شود، درحالی‌که مجموع دوم، برابر مقدار $\frac{2n+1}{2}$ می‌شود. به‌این ترتیب، تنها ضریب α_m مخالف صفر، و برابر $\frac{2n+1}{2}$ است. حالا

---

*) این اتحاد را می‌توان، به‌سادگی، با ضرب سمت چپ آن در $2\sin\frac{1}{2}h$ و، سپس، تبدیل هریك ازضرب‌های $2\sin\frac{1}{2}h\cos ih$ به‌مجموع $\sin(i+\frac{1}{2})h-\sin(i-\frac{1}{2})h$ به‌دست آورد [با ۳۰۷، (۲) مقایسه کنید].

دیگر به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\alpha_m=\frac{۲}{۲n+۱}\sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i)\cos m\xi_i \quad (۱\leqslant m\leqslant n) \qquad (۲۹)$$

با همین روش، ازضرب برابری‌های (۲۵) در $\sin m\xi_i$ و، سپس، جمع آن‌ها، نتیجه می‌شود:

$$\beta_m=\frac{۲}{۲n+۱}\sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i)\sin m\xi_i \quad (۱\leqslant m\leqslant n) \qquad (۳۰)$$

بدون تـردید، خواننده، متوجه شباهت روشی کـه در این‌جا به‌کار بردیم، با روش اولر ــ فوریه، برای تعیین ضریب‌های رشتهٔ مثلثاتی، می‌شود. ولی در این‌جا، روش ما هیچ کمبودی ندارد، زیرا به‌سادگی قابل تحقیق است که، مقدارهای به‌دست آمده برای مجهول‌ها، به‌واقع، در معادله‌های (۲۵) صدق می‌کنند. حتی بدون تحقیق هـم، با برخی ملاحظه‌های سادهٔ جبری، می‌توان به این نتیجه رسید. دیدیم که دستگاه (۲۵)، اگر جوابی داشته باشد، این جواب منحصر به‌فرد است کـه از دستورهای (۲۸)، (۲۹) و (۳۰) به دست می‌آیند (به‌هر ترتیبی که بخش‌های سمت راست انتخاب شوند). ولی دراین صورت، دترمینان آن باید مخالف صفر باشد، یعنی خود دستگاه، معین است. به این ترتیب، چندجمله‌ای مثلثاتی $\sigma_n(x)$ با مقدارهایی که برای ضریب‌های آن پیدا شده است، با خواست ما سازگاراست و می‌تواند، به‌عنوان انطباق بر تابع ما در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ درنظر گرفته شود.

اکنون فرض می‌کنیم که، تابع مفروض، دراین بازه انتگرال‌پذیر (و این بار، به‌معنای خاص خود) باشد. اگر n را به‌سمت بی‌نهایت میل دهیم، آن‌وقت با انطباقی سروکارخواهیم داشت که، در مجموعهٔ «انبوه‌تری» از نقطه‌ها، بر تابع $f(x)$ منطبق می‌شود. نه‌تنها $\sigma_n(x)$ «درازتر» می‌شود، بلکه ضریب‌های آن‌نیز، دچار دگرگونی می‌شوند. برای‌این‌که با رفتار آن‌ها، بهتر آشنا شویم، پیش خود فرض می‌کنیم که بازهٔ $[-\pi, \pi]$ را به $(۲n+۱)$ بخش برابر، به‌کمك نقطه‌های $x_i=(۲i-۱)\frac{\pi}{۲n+۱}$ $(-n\leqslant i<n+۱)$، تقسیم کرده باشیم. نقطه‌های ξ_i درست در وسط این بازه‌های جزئی خواهند بود و طـول این بازه‌ها، برابر است با $\Delta x_i=\frac{۲\pi}{۲n+۱}=\lambda$. اگر رابطه‌های (۲۸)، (۲۹) و (۳۰) را به این‌صورت بنویسیم:

$$\alpha_۰=\frac{۱}{۲\pi}\sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \alpha_m=\frac{۱}{\pi}\sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i)\cos m\xi_i\Delta x_i,$$

$$\beta_m=\frac{1}{\pi}\sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i)\sin m\xi_i\Delta x_i$$

آن‌وقت، مجموع‌های واقع در سمت راست برابری‌ها، مجموع‌های انتگرالی خواهند بود که پاسخ‌گوی تقسیم مفروض بازهٔ ما هستند. اکنون روشن است که به‌ازای $n\to\infty$

$$\alpha_0\to\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\quad \alpha_m\to\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx,$$

$$\beta_m\to\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx$$

به‌نحوی که، مقدارهای حدی ضریب‌های چندجمله‌ای مثلثاتی «انطباق»، همان ضریب‌های فوریهٔ نظیر تابع ما هستند. می‌توان گفت، مثل این است که چندجمله‌ای «انطباق»، «درحد» به‌رشتهٔ فوریه تبدیل می‌شود.

روشن است که، این روند را، تنها می‌توان به‌عنوان یك «نشانه» درنظر گرفت. این روند، به‌هیچ‌وجه نمی‌تواند بستگی بین تابع را، با رشتهٔ فوریهٔ آن ثابت کند، ولی انگیزه‌ای برای بررسی این رشته‌ها می‌شود: در بند بعد، به‌بررسی مستقیم رفتار رشتهٔ فوریه، درمورد رده‌های گوناگون تابع‌ها می‌پردازیم.

§۲. بسط تابع به رشتهٔ فوریه

۶۸۱. طرح موضوع. انتگرال دیریکله. $f(x)$ را تابعی با دورهٔ تناوب 2π می‌گیریم که در بازهٔ $[-\pi,\pi]$، دست‌کم به‌صورت ناویژه، به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر باشد (که‌در نتیجه، در هر بازهٔ متناهی دلخواه، انتگرال‌پذیر خواهد بود). مقدارهای ثابت (یعنی ضریب‌های فوریهٔ) آن‌را محاسبه می‌کنیم:

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos mu\,du,\quad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin mu\,du \qquad (1)$$

$$(m=0,1,2,\dots) \qquad (m=1,2,\dots)$$

و به‌کمك آن‌ها، رشتهٔ فوریهٔ تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx) \qquad (2)$$

در این‌جا، اندکی تخطی برای ضریب a_0، نسبت به‌علامت گذاری شمارهٔ **۶۷۸** مشاهده می‌کنید؛

دراین‌جا، آن‌را از روی‌دستور a_m، به‌ازای $m=0$، تعیین کرده‌ایم [برخلاف دستور (۷) در **۶۷۸**]. درعوض جملهٔ آزاد رشته را هم، $\frac{a_0}{2}$ می‌نویسیم.

درضمن، یادآوری می‌کنیم (از این یادآوری، بعداً استفاده خواهیم کرد)، که برای تابع $F(u)$، بادورهٔ تناوب 2π، مقدار انتگرال

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u)du$$

نسبت‌به‌بازهٔ به‌طول2π، بستگی‌به α ندارد [با **۳۱۴**، ۱۰) و **۳۱۶** مقایسه‌کنید]. بنابراین، در دستورهای (۱)، که ضریب‌های فوریه را معین می‌کنند، می‌توان انتگرال‌ها را در هر بازهٔ دلخواه به‌طول 2π گرفت. مثلاً می‌توان نوشت:

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx,\quad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx \qquad (1^*)$$

$$(m=0,1,2,\ldots) \qquad (m=1,2,\ldots)$$

برای این‌که رفتار رشتهٔ (۲) را در نقطهٔ معینی مثل $x=x_0$ بررسی کنیم، عبارت مناسب مربوط به مجموع جزئی آن را تشکیل می‌دهیم:

$$s_n(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx_0+b_m\sin mx_0)$$

به جای a_m و b_m، عبارت‌های انتگرالی (۱) را قرار می‌دهیم و عددهای ثابت $\cos mx_0$ و $\sin mx_0$ را زیر علامت انتگرال می‌بریم:

$$s_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)[\cos mu\cos mx_0+\sin mu\sin mx_0]du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos m(u-x_0)\right]du$$

با استفاده از دستور (۲۶) شماره **۶۸۰**، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n} cosm(u-x_0)=\frac{sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2sin\frac{u-x_0}{2}}$$

و سرانجام

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2sin\frac{u-x_0}{2}}du \qquad (3)$$

این انتگرال مهم، نام دیریکلهٔ (G. Lejeune-Dirichlet) را بر خود دارد.

از آن‌جا که، دراین‌جا، با تابعی از u، با دورهٔ تناوب 2π، سرکار داریم، بنابراین، بازهٔ انتگرال‌گیری $[-\pi, \pi]$ را می‌توان، مثلاً به بازهٔ $[x_0-\pi, x_0+\pi]$ تغییرداد:

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(u)\frac{sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2sin\frac{u-x_0}{2}}du$$

با تبدیل $t=u-x_0$، این انتگرال، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\frac{sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2sin\frac{1}{2}t}dt$$

که اگر آن‌را به‌دو انتگرال $\int_{0}^{\pi}+\int_{-\pi}^{0}$ تقسیم کنیم و، سپس، انتگرال دوم را، با تغییر علامت متغیر، در بازهٔ $[0, \pi]$ بنویسیم، به عبارت نهائی nامین مجموع جزئی رشتهٔ فوریه می‌رسیم:

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2sin\frac{1}{2}t}dt \qquad (4)$$

به‌این‌ترتیب، مساله منجر به بررسی رفتار این انتگرال می‌شود که شامل پارامتر n

است. ویژگی مساله دراین است که، دراین‌جا، نمی‌توان ازعبور حدی در زیر علامت انتگرال استفاده کرد*، درحالی که تاکنون (فصل چهاردهم را ببینید)، تنها وسیله برای جست‌وجوی حد در انتگرال‌های شامل پارامتر بود. دراین فصل و فصل بعدی، به‌طور منظم، به بررسی همین موقعیت می‌پردازیم.

۶۸۲. پیش‌قضیهٔ اصلی اول. قبل از آن‌که بررسی خود را ادامه دهیم، درستی گزارهٔ زیر را، که به دیمان تعلق دارد، ثابت می‌کنیم:

اگر تابع $g(x)$، دربازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر مطلق باشد، آن‌گاه

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\sin pt\,dt = 0$$

و به‌همین ترتیب

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\cos pt\,dt = 0$$

کافی است اثبات را، تنها برای حد اول بیاوریم. ابتدا یادآوری می‌کنیم که، برای هر بازهٔ متناهی $[\alpha, \beta]$ داریم:

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin pt\,dt\right| = \left|\frac{\cos p\alpha - \cos p\beta}{p}\right| \leqslant \frac{2}{p} \qquad (5)$$

نخست فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$، به‌معنای ویژه، انتگرال‌پذیر باشد. بازهٔ $[a, b]$ را، به‌وسیلهٔ نقطه‌های زیر، به n بخش تقسیم می‌کنیم:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = b \qquad (6)$$

و متناظر با آن، انتگرال را هم، تجزیه می‌کنیم:

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)\sin pt\,dt$$

مرز پایین مقدار $g(t)$ را در iامین بازه m_i می‌نامیم و، این عبارات را، به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

---

*) دراین‌جا، عبارت زیر انتگرال، به‌ازای $n \to \infty$، اصلاً حدی ندارد.

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [g(t)-m_i]\sin pt\,dt + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin pt\,dt$$

اگر ω_i را نوسان تابع $g(t)$ در بازهٔ iام بگیریم، آن‌وقت در مرزهای آن $g(t)-m_i \leqslant \omega_i$؛ اکنون، با در نظر گرفتن نابرابری (۵)، به‌سادگی می‌توانیم ارزیابی زیر را برای انتگرال خود به‌دست آوریم:

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta t_i + \frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1} |m_i|$$

با مفروض بودن عدد دلخواه $\varepsilon > 0$، ابتدا تقسیم (۶) را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta t_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

[با توجه به انتگرال‌پذیر بودن g، این عمل ممکن است (۲۹۷)]. اکنون، از آن‌جا که عدد m_i معین است، می‌توان انتخاب کرد:

$$p > \frac{4}{\varepsilon}\Sigma|m_i|$$

و برای این مقدارهای p، به‌دست می‌آید:

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right| < \varepsilon$$

که درستی گزارهٔ ما را ثابت می‌کند.

درحالتی که تابع $g(t)$، به‌معنای ناویژه (ولی حتماً به‌طور مطلق) انتگرال‌پذیر باشد، کافی است تنها یك نقطهٔ ویژه، و مثلاً نقطهٔ b را، در بازهٔ $[a, b]$ در نظر بگیریم*.

فرض می‌کنیم $0 < \eta < b-a$. انتگرال را به دو انتگرال تجزیه می‌کنیم:

---

*) می‌توان بازه را به‌تعداد محدودی بخش تقسیم کرد، به‌نحوی که در هریك از آن‌ها، تنها یك نقطهٔ ویژه وجود داشته باشد و، سپس، برای هر یك از این بخش‌ها استدلال کرد.

$$\int_a^b = \int_a^{b-\eta} + \int_{b-\eta}^b$$

برای انتگرال دوم درسمت راست، برای هر p داریم:

$$\left|\int_{b-\eta}^b g(t)\sin pt\,dt\right| \leqslant \int_{b-\eta}^b |g(t)|\,dt$$

که اگر η را به‌اندازهٔ کافی کوچك بگیریم، از $\frac{\varepsilon}{۲}$ کوچکترمی‌شود. واما دربارهٔ انتگرال

$$\int_a^{b-\eta} g(t)\sin pt\,dt$$

این انتگرال، به‌ازای $p \to \infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند، زیرا در فاصلهٔ $[a, b-\eta]$، به‌معنای ویژهٔ خود، انتگرال‌پذیراست؛ بنابراین، قدرمطلق‌این‌انتگرال‌هم، اگر p را به‌اندازهٔ کافی بزرگ‌بگیریم، از $\frac{\varepsilon}{۲}$ کوچکتر می‌شود. و این، اثبات را کامل می‌کند.

توجه خواننده را به این نکته جلب می‌کنیم که، دراین‌جا هم، حدهایی‌که انتگرال‌ها به‌سمت آن‌ها میل می‌کنند، بدون درنظر گرفتن عبور حدی، در زیر علامت انتگرال، معین شده‌اند.

اگر دستورهای (۱) را، که معرف ضریب‌های فوریه بودند، به‌یادآوریم، به عنوان نخستین نتیجهٔ مستقیم، به حکم زیر می‌رسیم:

ضریب‌های فوریهٔ a_m و b_m، در تابعی که به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر است، به ازای $m \to \infty$، به‌سمت صفر میل می‌کنند.

۶۸۳. نظام موضعی کردن. دومین نتیجهٔ مستقیم پیش‌قضیه‌ای‌که ثابت‌کردیم، عبارت است از به اصطلاح «نظام موضعی کردن».

عدد مثبت دلخواه $\delta < \pi$ را انتخاب و انتگرال (۴) را به دو انتگرال $\int_0^\pi = \int_0^\delta + \int_\delta^\pi$ تجزیه می‌کنیم. اگر انتگرال دوم را به این‌صورت بنویسیم:

$$\frac{۱}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{۲\sin\frac{۱}{۲}t}\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)t\,dt$$

آن‌وقت روشن است که، ضریب سینوس، تابعی است از t و در بازهٔ $[\delta, \pi]$، به‌طورمطلق انتگرال‌پذیر است، زیرا مخرج $2\sin\frac{1}{2}t$، دراین بازه، به‌سمت صفر میل نمی‌کند. در این صورت، این‌انتگرال، بنابرپیش‌قضیه، به‌ازای $n \to \infty$، به‌سمت صفرمیل‌می‌کند، به‌نحوی که، هم خود وجود حد برای مجموع جزئی رشتهٔ فوریه، $s_n(x_0)$، و هم مقدار این حد، به‌طورکامل، به‌وسیلهٔ رفتار تنها یکی از انتگرال‌ها، یعنی انتگرال زیر، معین می‌شود:

$$\rho_n(\delta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} [f(x_0+t)+f(x_0-t)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}t\right)}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt \qquad (۷)$$

ولی دراین‌انتگرال، تنها مقدارهایی ازتابع $f(x)$ شرکت دارندکه‌پاسخ‌گوی تغییرآوند دربازهٔ از $x_0-\delta$ تا $x_0+\delta$ است. همین ملاحظهٔ کوچک، «نظام موضعی‌کردن» را، که به‌صورت زیر بیان می‌شود، ثابت می‌کند:

قضیهٔ ریمان. رفتار رشتهٔ فوریه از تابع $f(x)$، درنقطه‌ای مثل x_0*، تنها بستگی به مقدارهایی دارد که تابع، در نزدیکی‌های نقطهٔ موردبررسی، قبول می‌کند، یعنی‌درهمسایگی به‌دلخواه کوچک آن.

به این‌ترتیب، اگر مثلاً دوتابع اختیار کنیم کـه مقدارهای آن‌هـا، در همسایگی به‌دلخواه کوچک نقطهٔ x_0، برهم منطبق باشند، آن‌وقت، هرقدر هم‌که در بیرون‌این‌همسایگی اختلاف داشته باشند، رشتهٔ فوریهٔ متناظر این تابع‌ها، درنقطهٔ x_0، رفتاری یکسان دارند؛ یا هر دوی آن‌ها متقارب‌اند و، درضمن، بـه‌سمت یـک مجموع میل می‌کنند، و یا هر دو متباعدند. این نتیجه‌گیری، باز هم بیشتر موجب شگفتی می‌شود، اگر تاکید کنیم که خود ضریب‌های فوریه در تابع‌های مورد بررسی، که به‌همهٔ مقدارهای تابع‌ها بستگی دارنـد، می‌توانند کاملاً باهم فرق داشته باشند.

این قضیه، معمولاً، با نام ریمان همراه است، زیرا می‌توان آن‌را نتیجه‌ای ازقضیهٔ کلی‌تری دانست‌که ریمان، درسال ۱۸۵۳، ثابت‌کرد. ولی باید یادآوری کردکه اندیشهٔ «نظام موضعی» در یکی از کارهـای اوستروگرادسکی (سال ۱۸۲۸) که مـربوط به فیزیک ریاضی است و، همچنین، در بررسی‌های لباچوسکی (سال ۱۸۳۴) که مربوط به‌رشته‌های

---

*) منظور از رفتار رشته در نقطهٔ x_0، روشن کردن همگرائی یا واگرائی رشته دراین نقطه و، همچنین، وجود این یا آن مجموع برای آن (درصورت همگرائی) می‌باشد.

مثلثاتی است، وجود دارد.

۶۸۴. معیارهای دینی و لیپ شیتس دربارهٔ همگرائی رشته‌های فوریه. دوباره به بررسی رفتار مجموع جزئی $s_n(x_0)$ در رشتهٔ فوریه، که برای آن، عبارت انتگرالی (۴) را به دست آورده بودیم، برمی‌گردیم. یادآوری می‌کنیم که، برابری مزبور، برای هر تابع $f(x)$ که با شرطهای مورد نظر سازگار باشد، برقرار است. اگر در حالت خاص فرض کنیم $f(x)\equiv ۱$، آن‌وقت $s_n(x)\equiv ۱$، و از (۴) به‌دست می‌آید:

$$۱=\frac{۲}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)t}{۲\sin\frac{۱}{۲}t}dt$$

اگر دوطرف این برابری را در عددثابت S_0 (به‌عنوان مجموع فرضی رشته ما که مقدار دقیق آن را در زیر پیدا خواهیم کرد) ضرب و، سپس، نتیجه را از (۴) کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$s_n(x_0)-S_0=\frac{۱}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)t}{۲\sin\frac{۱}{۲}t}dt \qquad (۸)$$

که برای سادگی‌کار، فرض شده است:

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-۲S_0 \qquad (۹)$$

اگر بخواهیم ثابت کنیم که S_0، به‌واقع، همان مجموع رشته است، باید ثابت کنیم که، انتگرال (۸)، به‌ازای $n\to\infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند.

به‌انتخاب خود عدد S_0 توجه می‌کنیم. درعمل، حالت‌هایی مهم‌اند که، (a) تابع $f(x)$ درنقطهٔ x_0 پیوسته‌است، یا (b) تابع $f(x)$ دراین‌نقطه، از هردوطرف، ناپیوستگی نوع اول (یا جهش) دارد، به‌نحوی‌که هر دوحد $f(x_0+۰)$ و $f(x_0-۰)$ وجود دارد ما به‌این دوحالت اکتفا می‌کنیم و، یکبار برای همیشه، فرض می‌کنیم:

درحالت (a): $S_0=f(x_0)$،

درحالت (b): $S_0=\dfrac{f(x_0+۰)+f(x_0-۰)}{۲}$.

اگر درنقطهٔ x_0، که درآن‌جا ناپیوستگی ما از نوع اول است، برابری

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

برقرار باشد، دیگر لزومی ندارد بین دوحالت (a) و (b) اختلافی قایل شویم. نقطه‌هایی را که، در مورد آن‌ها، این‌شرط رعایت شده باشد، گاهی نقطه‌های مرتب گویند.

یادآوری می‌کنیم که چون

$$\text{(a)}\ \lim_{t\to+0} f(x_0\pm t)=f(x_0)\quad \text{یا}\quad \text{(b)}\ \lim_{t\to+0} f(x_0\pm t)=f(x_0\pm 0)$$

آن‌وقت، با انتخاب مذکور عدد S_0، همیشه داریم:

$$\lim_{t\to+0}\varphi(t)=0 \qquad (10)$$

اکنون، با توجه به‌این مطلب، می‌توانیم بگوییم:

معیار دینی (D. Dini). رشتهٔ فوریهٔ تابع $f(x)$، در نقطهٔ x_0، به‌سمت مجموع S_0 همگراست، به‌شرطی‌که برای یك $h>0$، انتگرال زیر وجود داشته باشد:

$$\int_a^h \frac{\varphi(t)}{t}dt$$

درواقع، با این فرض، انتگرال زیر هم وجود دارد:

$$\int_0^\pi \frac{|\varphi(t)|}{t}dt$$

اگر عبارت (۸) را به‌صورت

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t}\cdot\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

بنویسیم، آن‌وقت براساس پیش‌قضیهٔ اصلی، روشن می‌شودکه، به‌ازای $n\to\infty$، به‌سمت صفرمیل‌می‌کند، زیرا تابع $\frac{\varphi(t)}{t}$ و، همراه با آن، تابع $\frac{\varphi(t)}{t}\cdot\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}$، به طور مطلق انتگرال‌پذیر است. و این، اثبات را کامل می‌کند.

انتگرال دینی را، می‌توان به‌این صورت نوشت:

(a) درحالت : $\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)|}{t}dt$،

(b) درحالت : $\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)|}{t}dt$

وروشن است که، کافی‌است، وجود هریك از انتگرال‌های‌زیر را (بسته به‌حالت موردنظر)، مفروض بگیریم:

$$\int_a^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0)|}{t}dt \quad \text{و} \quad \int_a^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0)|}{t}dt \qquad (۱۱)$$

یا

$$\int_a^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}dt \quad \text{و} \quad \int_a^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}dt$$

از این‌جا می‌توان یك‌رشته معیارهای جزئی، با استفاده از معیارهای مربوط به وجود انتگرال‌ها، به‌دست آورد. مثلاً، اگر خود را به‌حالت (a) محدود کنیم، می‌توان گفت:

معیار لیپ شیتس (R. O. Lipschitz). رشتهٔ فوریهٔ تابع $f(x)$ درنقطهٔ x_0 [که‌در آن‌جا، تابع $f(x)$ پیوسته است]، به‌سمت مجموع $f(x_0)$ همگراست، به شرطی که برای مقدارهای به‌قدر کافی کوچك t، این نابرابری برقرار باشد:

$$|f(x_0 \pm t)-f(x_0)| \leqslant Lt^{\alpha}$$

که درآن، L و α، ثابت‌های مثبتی هستند ($\alpha \leqslant 1$).

درحالت $\alpha = 1$، به‌طور ساده داریم:

$$\left|\frac{f(x_0 \pm t)-f(x_0)}{t}\right| \leqslant L$$

به‌نحوی که، انتگرال‌های(۱۱)، به‌عنوان انتگرال‌های‌ویژه، وجود دارند [۴۸۰]. درحالت $\alpha < 1$ به‌دست می‌آید:

$$\left|\frac{f(x_0 \pm t)-f(x_0)}{t}\right| \leqslant \frac{L}{t^{1-\alpha}}$$

و چون در سمت راست تابع انتگرال‌پذیر قرار دارد، بنابراین، انتگرال (۱۱)، دست‌کم به‌عنوان ناویژه، وجود دارد [۴۸۲].

به‌خصوص، شرط لیپ‌شیتس، به‌ازای $\alpha = 1$ آشکارا وجود دارد، وقتی‌که تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 مشتق متناهی $f'(x_0)$ را داشته باشد و یا دست‌کم، دارای مشتق‌های متناهی یک‌طرفهٔ زیر باشد:

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t}$$

ولو این‌که با هم فرق داشته باشند (یعنی با «نقطهٔ زاویه‌ای» سرکار داشته باشیم). به‌این ترتیب، در نقطهٔ x_0، که در آن تابع $f(x)$ دیفرانسیل‌پذیر است و یا دست مشتق‌های متناهی یک‌طرفه دارد، رشتهٔ فوریهٔ همگراست و، درضمن، مجموع آن برابر $f(x_0)$ است.

برای حالت (b) هم می‌توان، معیار لیپ‌شیتس را به‌سادگی بیان کرد. دراین‌جاهم، به عنوان نتیجه می‌توان گفت که: در نقطهٔ x_0 با ناپیوستگی نوع دوم، برای همگرابودن رشتهٔ فوریه، کافی است وجود حدهای متناهی زیر را مفروض بگیریم:

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}, \quad \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}$$

درضمن، دراین‌جا، مجموع (شته، برابر است با $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

این حدها، به‌مفهومی، شبیه مشتق‌های یک‌طرفه‌اند، تنها به‌جای مقدار $f(x_0)$ تابع در نقطهٔ x_0، باید به‌ترتیب مقدارهای حدی راست یا چپ آن در این نقطه، درنظر گرفت.

درعمل، اغلب با تابع‌هایی سروکار داریم که دارای دورهٔ تناوب 2π هستند و یا مشتق‌پذیر و یا قطعه به‌قطعه مشتق‌پذیرند.* همان‌طور که دیدیم، برای این‌گونه تابع‌ها، رشتهٔ

---

*) تابع $f(x)$ را، در بازهٔ $[a, b]$، قطعه به‌قطعه مشتق‌پذیر می‌نامند، وقتی‌که بتوان این بازه را به‌تعداد متناهی بازه‌های جزئی طوری تقسیم کرد که تابع‌ها، در درون هریک از آن‌ها، مشتق‌پذیر و در انتهاها، نه‌تنها دارای مقدارهای حدی، بلکه درضمن دارای مشتق‌های یک‌طرفه باشد، همراه با این شرط که مقدارهای تابع را با این مقدارهای حدی عوض کنیم. تابع قطعه به‌قطعه مشتق‌پذیر را، می‌توان به‌عنوان چندتا تابع «به‌هم‌چسبیده» تعبیر کرد که در بازه‌های جزئی بسته، مشتق‌پذیر (و درنتیجه، پیوسته) باشند، باوجودی که در «نقطه‌های اتصال» (دست‌مثل دوانتهای a و b از بازهٔ اصلی) باید مقدارهای آن را به‌طور جداگانه محاسبه کرد.

فوریه، به سمت خود تابع $f(x)$ همگراست، به‌استثنای «نقطهٔ جهش» تابع‌های مختلف، که در آن‌جا، مجموع رشته برابر است با $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

۶۸۵. پیش‌قضیهٔ اصلی دوم. برای دست‌یافتن به‌معیارهای بعدی، به‌یک گزارهٔ کمکی نیاز داریم که، برای نخستین‌بار، به‌وسیلهٔ دیریکله مطرح شد:

اگر تابع $g(t)$ صعودی یکنوا و در بازهٔ $[0, h]$ کران‌دار باشد $(h>0)$، آن‌وقت

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^h g(t)\frac{\sin pt}{t}dt=\frac{\pi}{2}g(+0) \qquad (۱۲)$$

اثبات. این انتگرال را می‌توان به‌صورت مجموع دو انتگرال نشان داد:

$$g(+0)\int_0^h\frac{\sin pt}{t}dt+\int_0^h[g(t)-g(+0)]\frac{\sin pt}{t}dt \qquad (۱۳)$$

اگر اولین انتگرال را به‌کمک تبدیل $pt=z$، به این‌صورت بنویسیم:

$$g(+0)\int_0^{ph}\frac{\sin z}{z}dz$$

آن‌وقت، بلافاصله روشن می‌شود که، به‌ازای $p\to+\infty$، به‌سمت $g(+0)\cdot\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند، زیرا

$$\int_0^\infty\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین، تمامی مطلب، به‌این‌جا منجر می‌شود که ثابت کنیم، انتگرال دوم در (۱۳)، به‌سمت صفر میل می‌کند.

از روی $\varepsilon>0$ مفروض، می‌توان $\delta>0$ را طوری پیدا کرد که داشته باشیم (می‌توان $\delta<h$ به‌حساب آورد):

$$0\leqslant g(t)-g(+0)<\varepsilon \quad (0<t\leqslant\delta)$$

انتگرال دوم (۱۳) را، به دو انتگرال تجزیه می‌کنیم:

$$\left(\int_0^\delta+\int_\delta^h\right)[g(t)-g(+0)]\frac{\sin pt}{t}dt=I_1+I_2$$

دربارهٔ انتگرال I_1، از دستور بونه [۳۰۶] استفاده می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$I_1=[g(\delta)-g(+0)]\int_{\eta}^{\delta}\frac{\sin pt}{t}dt=[g(\delta)-g(+0)]\int_{p\eta}^{p\delta}\frac{\sin z}{z}dz$$

که در آن، عامل اول کوچکتر از ε و عامل دوم، به‌ازای همهٔ مقدارهای p، به طور یکنوا کران‌دار است. درواقع، از همگرائی انتگرال ناویژهٔ $\int_0^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz$، نتیجه می‌شود که تابع پیوسته (به‌ازای $z\geqslant 0$)

$$\int_0^{z}\frac{\sin z}{z}dz$$

که به‌ازای $z\longrightarrow+\infty$، حدی محدود دارد، به‌ازای همهٔ مقدارهای z کران‌دار است:

$$\left|\int_0^{z}\frac{\sin z}{z}dz\right|\leqslant L\qquad(L=\text{const.})$$

به‌نحوی که

$$\left|\int_{p\eta}^{p\delta}\frac{\sin z}{z}dz\right|=\left|\int_0^{p\delta}-\int_0^{p\eta}\right|\leqslant 2L$$

به این ترتیب، انتگرال I_1 را می‌توان مستقل از p، ارزیابی کرد

$$|I_1|<2L\varepsilon \qquad (14)$$

اما آن‌چه به‌انتگرال I_2 مربوط می‌شود، این انتگرال به‌ازای $p\longrightarrow\infty$ (و δ ثابت)، بنا بر پیش‌قضیهٔ شمارهٔ **۶۸۲**، به‌سمت صفر میل می‌کند، زیرا ضریب $\sin pt$، تابعی است که به‌معنای ویژه انتگرال‌پذیر است (مگر نه این است که $|t|\geqslant\delta$). و با این مطلب، اثبات کامل می‌شود.

۶۸۶. معیار دیریکله ـ ژردان. اکنون به معیار تازه‌ای برای شناخت همگرائی رشتهٔ فوریه، که برمبنای کاملاً دیگری است، می‌رسیم.

معیار دیریکله ـ ژردان. رشتهٔ فوریهٔ تابع $f(x)$، در نقطهٔ x_0، به سمت مجموع S_0 میل می‌کند، به‌شرطی که در بازهٔ $[x_0-h, x_0+h]$، به مرکز این نقطه، تابع دارای تغییر محدود باشد.

درشمارهٔ ۶۸۳ دیدیم که، رفتار مجموع جزئی $s_n(x_0)$، به‌ازای $n \to \infty$، به‌وسیلهٔ رفتار انتگرال $\rho_n(\delta)$ [(۷) را ببینید] معین می‌شود که، در آن، δ می‌تواند درحالت خاص همان عدد h را اختیار کند که دربارهٔ آن، دربالا صحبت کردیم. انتگرال $\rho_n(h)$ را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\rho_n(h)=\frac{1}{\pi}\int_0^h [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt$$

مجموع داخل کروشه، بنابرفرض، تابعی باتغییر محدود است و، بنابراین: به‌صورت تفاضل دوتابع صعودی یکنواست. چون پیش‌قضیهٔ شمارهٔ قبل‌را می‌توان دربارهٔ هریك از آن‌ها به‌طور جداگانه به‌کاربرد، درمورد تفاضل آن‌ها هم‌کاربردپذیر است و به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n(h)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

و با این، همهٔ مطلب ثابت می‌شود، زیرا در نقطهٔ پیوستگی، عبارت حاصل به‌خودی خود به‌سمت $f(x_0)$ میل می‌کند.

یادآوری می‌کنیم که، ابتدا، شرط‌های بسط تابع به رشتهٔ فوریه، که به‌وسیلهٔ دیریکله تنظیم شده‌بود، خصلت خاص‌تری داشتندمثلاً اوگزارهٔ زیر را ثابت کرد.

معیار دیریکله. اگر تابع $f(x)$ با دورهٔ تناوب 2π، دربازهٔ $[\pi, -\pi]$، قطعه به‌قطعه یکنوا باشد* و دراین بازه، بیش از تعداد محدودی نقطهٔ انفصال نداشته باشد، آن‌وقت رشتهٔ فوریهٔ آن در هرنقطهٔ پیوسته به‌سمت $f(x_0)$ و درهرنقطهٔ ناپیوسته، به‌سمت $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ متقارب است.

ازاین به‌بعد، شرط‌هایی را که دراین‌جا آوریم، به‌نام «شرط‌های دیریکله» می‌نامیم.

چون تابعی که با این‌شرط‌ها سازگار باشد، به روشنی، در هر بازهٔ متناهی، دارای تغییری کران‌دار است، بنابراین، این معیار، به طور صوری، به وسیلهٔ معیار قبلی پوشیده می‌شود.

معیارهایی که‌آوردیم، برای رفع نیاز در آنالیز ریاضی و درکاربردهای آن، کاملاً

---

*) یعنی بتوان بازهٔ $[\pi, -\pi]$ را به‌تعدادمحدودی بازه‌های جزئی طوری تقسیم کرد، که تابع در درون هرکدام از آن‌ها، به‌طور جداگانه، یکنوا باشد.

کافی است. البته، معیارهای دیگری هم وجود دارند که بیشتر جنبهٔ نظری دارند و، به‌همین مناسبت، ازشرح و تفصیل آن‌ها می‌گذریم.

درپایان، به‌بستگی موجودبین‌معیاردینی با معیاردیریکله ـ ژردان می‌پردازیم. می‌توان ثابت کرد که، این دو معیار را، نمی‌توان با هم مقایسه کرد، یعنی نمی‌توان یکی از آن‌ها را از دیگری نتیجه گرفت. ابتدا، تابع $f(x)$ را درنظر می‌گیریم که این طور تعریف شده باشد*:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\ln\dfrac{|x|}{2\pi}} & (x\neq 0) \\ f(x)=0 & (x=0) \end{cases}$$

این تابع، پیوسته و یکنواست، یعنی با شرط‌های دیریکله سازگار است، در حالی‌که انتگرال دینی، نسبت به‌نقطهٔ $x=0$:

$$\int_0^h \frac{|f(t)+f(-t)-2f(0)|}{t}dt = 2\int_0^h \frac{dt}{t\ln\dfrac{t}{2\pi}}$$

آشکارا، برای هر $h>0$، واگرا می‌شود.

ازطرف دیگر، اگر تابع را دربازهٔ $[-\pi, \pi]$، با این برابری‌ها تعریف کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=x\cos\dfrac{x}{2\pi} & (x\neq 0) \\ f(0)=0 \end{cases}$$

آن‌وقت، درنقطهٔ $x=0$، شرط لیپ‌شیتس برقرار است:

$$|f(x)-f(0)|\leqslant|x|$$

وبنابراین، شرط دینی هم برقرار است. ولی‌این‌بار، تابع $f(x)$، درهیچ همسایگی $x=0$، تغییرکران‌دار ندارد [۵۶۷].

۶۸۷. حالت تابع‌های نامتناوب. تمامی نظریه‌ای‌که دراین‌جا، ساختیم، متکی براین فرض بود که تابع مفروض، برای همهٔ مقدارهای حقیقی x معین است و، در ضمن، دورهٔ

---

*) تابع، بربقیهٔ بخش‌محورعددی، طبق‌قانون تناوب، یعنی $f(x+2\pi)=f(x)$، گسترش‌می‌یابد.

تناوبی برابر 2π دارد. ولی اغلب با تابع نامتناوب $f(x)$ سروکار پیدا می‌کنیم که، حتی گاهی، تنها در بازهٔ $[\pi, -\pi]$ داده شده است.

برای این‌که بتوانیم از نظریهٔ مذکور، در مورد چنین تابعی استفاده کنیم، به‌جای $f(x)$، تابع کمکی $f^*(x)$ را در نظر می‌گیریم، که به‌ترتیب زیر تعریف شده باشد. در بازهٔ $[\pi, -\pi]$، f^* و f را متحد می‌کنیم:

$$f^*(x)=f(x) \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi) \qquad (۱۵)$$

سپس، فرض می‌کنیم:

$$f^*(-\pi)=f^*(\pi)$$

و برای بقیهٔ مقدارهای حقیقی x، تابع $f^*(x)$ را، طبق قانون تناوب، گسترش می‌دهیم.

دربارهٔ این تابع $f^*(x)$، با دورهٔ تناوب 2π و باچنین ساختاری، می‌توان از قضیه‌های مربوط به‌بسط استفاده کرد. با وجود این، وقتی صحبت بر سر نقطهٔ x_0 باشد که بین $-\pi$ و π قرار دارد، آن‌وقت، ضمن تحقیق درشرط‌های این قضیه‌ها، با توجه به (۱۵)، به‌طور طبیعی با تابع مفروض $f(x)$ سروکار پیدا خواهیم کرد. به‌همین علت ضریب‌های بسط را می‌توانیم، بنابردستور (۱)، محاسبه کنیم، بدون این‌که به‌تابع $f^*(x)$ مراجعه کنیم. کوتاه‌سخن از همهٔ آن‌چه تاکنون ثابت کرده‌ایم؛ با عبور از تابع کمکی $f^*(x)$، مستقیماً دربارهٔ تابع مفروض $f(x)$ استفاده می‌کنیم.

ولی دربارهٔ دو انتهای $x=\pm\pi$، دقت بیشتری لازم است. ضمن تحقیق شرط‌های هریك از قضیه‌های شمارهٔ ۶۸۴ و ۶۸۶ برای تابع $f^*(x)$، مثلاً در نقطهٔ $x=\pi$، باید هم به‌مقدارهای تابع کمکی $f^*(x)$ درسمت‌چپ $x=\pi$ توجه کنیم ــ که در آن‌جا، بامقدارهای متناظر تابع مفروض $f(x)$ تطبیق می‌کنند ــ و هم مقدارهای $f^*(x)$ درسمت‌راست $x=\pi$ که در آن‌جا با مقدارهای تابع $f(x)$ درسمت راست $x=-\pi$ مطابق‌اند. بنابراین، اگر بخواهیم برای نقطه‌های $x=\pm\pi$ ازمعیار دیریکله ــ ژردان استفاده کنیم، باید در هردوحالت طلب کنیم که، تابع $f(x)$، چه درسمت‌چپ $x=\pi$ وچه درسمت‌راست $x=-\pi$، تغییری محدود داشته باشد. برای این منظور، S_0 را برای هردوحالت، باید این‌طور انتخاب کنیم:

$$S_0=\frac{f^*(\pi+0)+f^*(\pi-0)}{2}=\frac{f^*(-\pi+0)+f^*(-\pi-0)}{2}=$$

$$=\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

به این ترتیب، اگر مقدار تابع $f(x)$ به ازای $x=\pm\pi$ پیوسته باشد، ولی دورهٔ تناوب

2π نداشته باشد، به نحوی که $f(\pi)\neq f(-\pi)$، آن‌وقت ضمن رعایت شرط‌های کافی برای همگرائی رشتهٔ فوریه، مجموع این رشته، برابر عدد

$$\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$$

می‌شود که هم با $f(-\pi)$ و هم با $f(\pi)$ فرق دارد. درموردچنین تابعی، تنها در بازهٔ باز $(-\pi, \pi)$ می‌توان از بسط استفاده کرد.

از خواننده می‌خواهیم، به‌نکته‌ای که خواهیم آورد، توجه کند. اگر رشتهٔ مثلثاتی(۲) دربازهٔ $(-\pi, \pi)$، به سمت تابع $f(x)$ میل کند، با توجه به‌این‌که جمله‌های آن، دورهٔ تناوبی برابر 2π دارند، خود رشته در همه‌جا همگرا می‌شود و، مجموع آن $S(x)$ هم، تابعی متناوب نسبت به x و با دورهٔ تناوب 2π از آب درمی‌آید. ولی این مجموع، در بیرون این بازه، به‌طورکلی با تابع $f(x)$ تطبیق نمی‌کند (در حالتی که تابع $f(x)$، در تمامی محور حقیقی داده شده باشد). درشمارهٔ ۶۹۰، این مطلب را روی چندمثال، روشن کرده‌ایم.

درپایان یادآوری می‌کنیم که، به‌جای بازهٔ $[-\pi, \pi]$، می‌توان هر بازه‌ای به‌صورت $[\alpha, \alpha+2\pi]$ را، به‌طول 2π، انتخاب کرد.

۶۸۸. حالت بازهٔ دلخواه. تابع $f(x)$ را در بازهٔ $[-l, l]$، به‌طول دلخواه $2l$ $(l>0)$، مفروض می‌گیریم. اگر این تبدیل را انجام دهیم:

$$x=\frac{ly}{\pi} \quad (-\pi\leqslant y\leqslant\pi)$$

آن‌وقت، به تابع $f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$ نسبت به‌متغیر y دربازهٔ $[-\pi, \pi]$ می‌رسیم، که آن‌را درشمارهٔ قبل بررسی کرده‌ایم. دیدیم که چنین تابعی را می‌توان، با رعایت شرط‌های معینی، به رشتهٔ فوریه بسط داد:

$$f\left(\frac{yl}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ny+b_n\sin ny)$$

که ضریب‌های آن، با دستور اولر ـ فوریه، تعیین می‌شود:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\cos ny\,dy, \quad (n=0, 1, 2, \ldots) \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\sin ny\,dy \quad (n=1, 2, \ldots)$$

با فرض $y=\frac{\pi x}{l}$، به متغیر قبلی x برمی‌گردیم. دراین‌صورت، بسط تابع مفروض $f(x)$ را به‌رشتهٔ مثلثاتی، با اندکی تغییر در نوع آن، به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (16)$$

در این‌جا، به‌جای x، با کسینوس‌ها و سینوس‌های $\frac{\pi x}{l}$ سروکار داریم. ضریب‌های بسط را هم می‌توان، برحسب همین متغیر نوشت:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (17)$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

همان نکته‌هایی که، درشمارهٔ قبل، دربارهٔ نقطه‌های $x=\pm\pi$ گفتیم، دراین‌جاهم، درمورد نقطه‌های انتهایی $x=\pm l$ صادق است. البته، بازهٔ $[-l,\ l]$ را می‌توان با هر بازهٔ دلخواه به‌طول $2l$، و مثلاً بازهٔ $[0,\ 2l]$ عوض کرد. درحالت اخیر، یعنی وقتی با بازهٔ $[0,\ 2l]$ سروکار داریم، باید دستورهای (۱۷) را، این‌طور نوشت:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (17^*)$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

با توجه به قیدهای مربوط به دوانتهای بازه و هم مربوط به نقطه‌های ناپیوستگی، توانستیم، تابع مفروض دلخواه را در بازهٔ دلخواه، دربارهٔ گروه گسترده‌ای از حالت‌ها*، به‌صورت رشتهٔ مثلثاتی بسط دهیم، یعنی آن‌را با یک عبارت تحلیلی ــ رشتهٔ مثلثاتی ــ در تمامی حوزهٔ تعریف‌خود، نشان دهیم. درشمارهٔ **۶۹۰** با تعداد بیشتری از این‌گونه تابع‌ها، که در بخش‌های مختلف حوزهٔ تعریف خود، با عبارت‌های تحلیلی مختلفی داده شده‌اند، آشنا می‌شویم. رشتهٔ مثلثاتی، وسیله‌ای عام برای «پیوند دادن» تابع‌ها و «پاک کردن» مرز بین آن‌هاست و امکان می‌دهد، تابعی را که با چند عبارت تحلیلی داده شده است، با یک بیان تحلیلی در تمامی حوزهٔ تعریف‌خود، معین کنیم [با **۴۶**، ۳°؛ **۳۶۳**، ۵)؛ **۴۰۷**، یادداشت ۱؛ **۴۰۷**، ۱۱) و غیره مقایسه کنید].

۶۸۹. بسط تابع، تنها برحسب کسینوس‌ها و یا تنها برحسب سینوس‌ها. از این نکته

---

*) از جمله، تابع‌های قطعه به‌قطعه مشتق‌پذیر یا قطعه به‌قطعه یکنوا و غیره.

آغاز می‌کنیم: اگر تابع $f(x)$، که در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ انتگرال‌پذیر است (به معنای ویژه یا ناویژه)، تابعی فرد باشد، آن‌وقت، برای آن داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

اگر انتگرال $\int_{-\pi}^{\pi}$ را به‌صورت مجموع دوانتگرال $\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}$ بنویسیم و درانتگرال دوم، x را به $-x$ تبدیل کنیم، درستی برابری بالا روشن می‌شود. از همین راه، در مورد تابع زوج $f(x)$ هم به‌دست می‌آید:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

[با ۳۱۲، ۹) و ۳۱۴ مقایسه کنید.]

اکنون $f(x)$ را تابعی زوج و انتگرال‌پذیر مطلق در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ فرض می‌کنیم. دراین‌صورت، حاصل‌ضرب $f(x)\sin nx$ تابعی فرد می‌شود و بنابرآن‌چه گفتیم:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0 \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

بنابراین، رشتهٔ فوریهٔ یك تابع زوج، تنها شامل کسینوس‌هاست:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (18)$$

چون، دراین حالت، $f(x)\cos nx$ تابعی زوج است، در نتیجه، می‌توان ضریب‌های a_n از بسط را، این‌طور نوشت:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (19)$$
$$(n=0, 1, 2, \ldots)$$

درحالتی که تابع $f(x)$ فرد باشد، تابع $f(x)\cos nx$ هم فرد می‌شود، به‌نحوی که

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$$
$$(n=0, 1, 2, \ldots)$$

به‌این نتیجه می‌رسیم که، رشتهٔ فوریهٔ تابع فرد، تنها شامل سینوس‌هاست:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx \qquad (۲۰)$$

در ضمن، به‌دلیل زوج‌بودن حاصل‌ضرب $f(x)\sin nx$ می‌توان نوشت:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \qquad (۲۱)$$

$$(n=1, 2, \ldots)$$

یادآوری می‌کنیم که هر تابع مفروض $f(x)$ را، در بازهٔ $[-\pi, \pi]$، می‌توان به‌صورت مجموع دوتابع نوشت، به‌نحوی‌که یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد باشد:

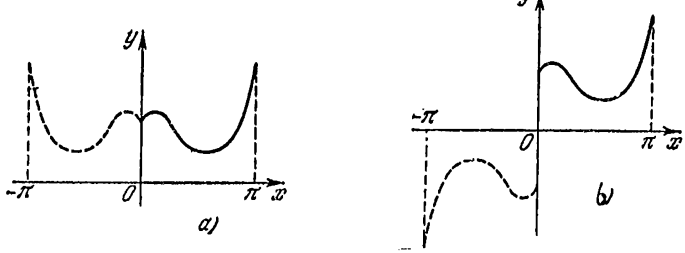
$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

که در آن

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

و روشن است که رشتهٔ فوریهٔ تابع $f(x)$، از بسط تابع $f_1(x)$ برحسب کسینوس‌ها، و بسط تابع $f_2(x)$ برحسب سینوس‌ها، به‌دست می‌آید.

اکنون فرض می‌کنیم تابع $f(x)$، تنها در بازه $[0, \pi]$ داده شده‌باشد. اگر بخواهیم آن‌را، دراین‌بازه، به‌رشتهٔ فوریهٔ (۲) بسط‌دهیم، ابتدا آن‌را، به‌دلخواه، در بازهٔ $(-\pi, 0)$ تعریف می‌کنیم و، سپس، ازآن‌چه در **۶۸۷** گفته‌ایم، استفاده می‌کنیم. تاکید بر اختیاری‌بودن تعریف تابع به ما امکان می‌دهد تا رشته‌های مثلثاتی مختلفی به دست آوریم. اگر در نقطه‌ای مثل x_0 واقع در بین ۰ و π، تابع ما با یکی ازمعیارهای مذکور در **۶۹۴**، **۶۹۶** سازگار باشد، آن‌وقت، همهٔ این رشته‌ها، در نقطهٔ x_0، به سمت $f(x_0)$ و یا، درحالت ناپیوستگی، به‌سمت $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ همگرا می‌شوند.



شکل ۱۲۳

می‌توان از اختیاری که برای تعریف تابع در بازهٔ $(0, -\pi]$ داریم، به‌نحوی استفاده کرد که بسط $f(x)$ را، تنها برحسب کسینوس‌ها و یا تنها برحسب سینوس‌ها به‌دست آوریم. درواقع، فرض می‌کنیم که برای $0 < x \leqslant \pi$ داشته باشیم:

$$f(-x) = f(x) \qquad (۲۲)$$

به‌نحوی که، درنتیجه، در بازهٔ $[\pi, -\pi]$، تابعی زوج به دست آید (شکل ۱۲۳ـa)، با همان دورهٔ تناوب 2π. دراین‌صورت، همان‌طور که دیدیم، بسط آن، تنها شامل کسینوس‌ها خواهد بود و ضریب‌های بسط را با دستور (۱۹) محاسبه کرد، که در آن، تنها ازمقدارهای تابع اصلی $f(x)$ استفاده شده است.

به‌همین ترتیب، اگر تعریف تابع $f(x)$ را با شرط (برای $0 < x \leqslant \pi$)

$$f(-x) = -f(x) \qquad (۲۳)$$

تکمیل کنیم، به‌نحوی که تابعی فرد بشود (شکل ۱۲۳ـb)، آن‌وقت در بسط با جمله‌هایی سروکار خواهیم داشت که تنها شامل سینوس‌ها هستند و ضریب‌های آن، با دستور (۲۱) به‌دست می‌آیند.

به‌این‌ترتیب، وقتی تابعی در بازهٔ $[\pi, 0]$، با رعایت شرط‌های معلوم داده‌شده باشد، می‌توان آن‌را به‌رشته‌ای تبدیل کرد که تنها شامل کسینوس‌ها یا تنها شامل سینوس‌ها باشد.

با همهٔ این‌ها، برای نقطهٔ $x = 0$ ونقطهٔ $x = \pi$، بررسی خاصی لازم است. دراین‌جا رفتار هر دو بسط، به صورتی متفاوت درمی‌آید. برای سادگی کار، فرض می‌کنیم، تابع مفروض $f(x)$، به‌ازای $0 \leq x \leq \pi$، پیوسته باشد و ابتدا، بسط برحسب کسینوس‌ها را درنظر می‌گیریم. شرط (۲۲)، پیوستگی را به‌ازای $x = 0$ حفظ می‌کند، به‌نحوی که، با رعایت شرط‌های لازم، رشته (۱۸)، به‌ازای $x = 0$ به‌سمت $f(0)$ همگرا می‌شود. سپس چون داریم:

$$f(-\pi + 0) = f(\pi - 0) = f(\pi)$$

بنابراین، به‌ازای $x = \pi$ هم، وضع مشابهی برقرار است.

در رابطه با بسط برحسب سینوس‌ها، کار به‌گونهٔ دیگری است. بی‌آنکه وارد در ملاحظه‌های مربوط به پیوستگی، شرط‌های (۲۳) و غیرآن بشویم، به‌سادگی متوجه می‌شویم که‌در نقطه‌های $x = 0$ و $x = \pi$، مجموع رشتهٔ (۲۰)، به‌روشنی برابر صفر می‌شود. بنابراین تنها وقتی می‌تواند مقدارهای $f(0)$ و $f(\pi)$ را به‌ما بدهد که، این مقدارها هم، برابرصفر باشند.

اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ $[0, l]$ $(l>0)$ داده شده باشد، آن‌وقت، به‌همان تبدیل متغیری متوسل می‌شویم که در ۶۸۸ داشتیم، به‌بسط آن به‌رشته‌ای برحسب کسینوس‌ها

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

و یا به‌رشته برحسب سینوس‌ها

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

می‌رسیم، درضمن، ضریب‌های بسط، به‌ترتیب، با این رابطه‌ها محاسبه می‌شوند:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad (n=0, 1, 2, \ldots) \qquad (24)$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1, 2, \ldots) \qquad (25)$$

۶۹۰. مثال‌ها. در مثال‌های زیر، تابع‌هایی را آورده‌ایم که، طبق معمول، به گروه مشتق‌پذیرها، یا قطعه به‌قطعه مشتق‌پذیرها، تعلق‌دارند. بنابراین، درامکان بسط آن‌ها، به‌رشتهٔ فوریه تردیدی وجود ندارد.

۱) این تابع را در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ بسط دهید:

$$f(x)=e^{ax} \quad (a=\text{const}, a\neq 0)$$

با توجه به دستورهای (۱) داریم:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}dx=\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a\pi}=2\frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{a\cos nx+n\sin nx}{a^2+n^2}e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi}=(-1)^n\frac{1}{\pi}\frac{2a}{a^2+n^2}\operatorname{sh}a\pi,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{a\sin nx-n\cos nx}{a^2+n^2}e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\frac{2n}{a^2+n^2}\operatorname{sh}a\pi$$

به‌این ترتیب، برای $-\pi<x<\pi$، خواهیم داشت:

$$e^{ax}=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}a\pi\left\{\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}[a\cos nx-n\sin nx]\right\}$$

اگر هم از بازهٔ $(0, 2\pi)$ آغاز می‌کردیم، به‌بسطی با ضریب‌های دیگر می‌رسیدیم؛ در این حالت، باید از دستورهای (*۱) استفاده کنیم. وجود این، بسط تازه را، می‌توان به‌سادگی از بسطی هم‌که در بالا به‌دست آورده‌ایم، پیدا کرد.

۲) این تابع را، در بازهٔ $(0, 2\pi)$ بسط دهید:

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$$

بنابر رابطه‌های (*۱)

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\,dx=\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx=0$$

$(n=1, 2, 3, \ldots)$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=-\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{n}$$

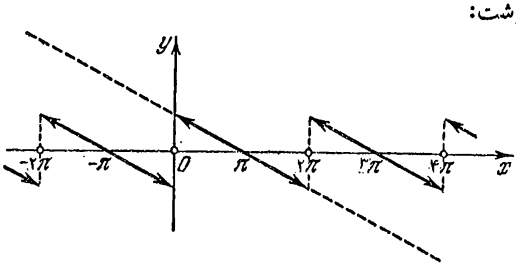
به‌این‌ترتیب، به بسط بسیار جالب و ساده‌ای می‌رسیم که تنها شامل سینوس‌هاست:

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\qquad (0<x<2\pi)$$

به‌ازای $x=0$ (یا $x=2\pi$)، مجموع رشته برابر صفر می‌شود و برابری به‌هم می‌خورد. دربیرون‌این‌بازه هم، برابری برقرار نیست. نمودار مجموع $S(x)$ (شکل ۱۲۴)، ازمجموع بی‌نهایت پاره‌خط‌های موازی و یک‌رشته‌نقطه واقع برمحور x، تشکیل‌شده‌است.

۳) با توجه به‌اهمیت خاصی که بسط‌حاصل درتمرین قبل‌دارد، بدون این‌که به‌نظریهٔ کلی بپردازیم، نتیجهٔ مقدماتی آن‌را می‌آوریم.

فرض می‌کنیم $2\pi>x>0$. با استفاده از رابطهٔ (۲۶) شمارهٔ ۶۸۰، که می‌توان آن‌را این‌طور نوشت:



شکل ۱۲۴

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

به‌این ترتیب خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k} = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} \cos kt\,dt = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= -\frac{x}{2} + \int_0^x \left[\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right] \sin(2n+1)\frac{t}{2}\,dt + \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{t}\,dt$$

ولی، جملهٔ دوم در بخش اخیر برابری، بنا به پیش‌قضیهٔ شمارهٔ **۶۸۲**، به‌ازای $n \to \infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند*. و جملهٔ سوم، با تبدیل $u = (2n+1)\frac{t}{2}$، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_0^{(2n+1)\frac{x}{2}} \frac{\sin u}{u}\,du$$

و روشن است که به سمت $\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$ میل می‌کند. از آن‌جا

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2}$$

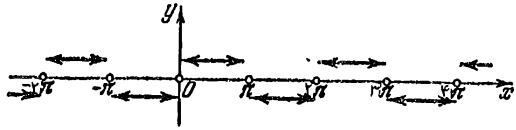
۴) از بسط ۲)، بدون‌هیچ‌محاسبه‌ای، می‌توان بسط‌های جالب دیگری به‌دست آورد. اگر در آن، x را به $2x$ تبدیل و، سپس، دوطرف را بر ۲ تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} \quad (0 < x < \pi)$$

---

*) اگر مقدار داخل کروشه را به‌ازای $t = 0$ برابر صفر بگیریم، یك، تابع تحلیلی در این نقطه می‌شود، زیرا درهمسایگی آن، به‌رشتهٔ توانی بسط داده می‌شود:

$$\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{12}t + \frac{37}{5760}t^3 + \dots$$



شکل ۱۲۵

و از تفاضل دو بسط، خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\quad(0<x<\pi)$$

اگر مجموع رشتهٔ اخیر را $S(x)$ بنامیم، آن‌وقت $S(\pi)=S(0)=0$. با تغییر علامت x، به خاطر فرد بودن سینوس، برای بازهٔ $(0,-\pi)$ نتیجهٔ می‌شود: $S(x)=-\frac{\pi}{4}$؛ برای بقیهٔ مقدارهای x، مجموع $S(x)$، طبق قانون تناوب به‌دست می‌آید، به‌نحوی که، درحالت خاص، برای بازهٔ $(2\pi,3\pi)$، دوباره $S(x)=\frac{\pi}{4}$ وغیره. نمودار $S(x)$ درشکل ۱۲۵ داده شده است؛ شکل ۱۲۶ هم، نزدیک شدن تدریجی مجموع‌های جزئی رشته را، به‌سمت این تابع ناپیوسته، نشان می‌دهد.

اگر دراین بسط $x=\frac{\pi}{2}$ بگیریم، به رشتهٔ لایب‌نیتس می‌رسیم که از قبل آن‌را می‌شناسیم [۴۰۴، (۱۶)]:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

به‌ازای $x=\frac{\pi}{6}$ و $x=\frac{\pi}{3}$، این رشته‌ها به‌دست می‌آیند:

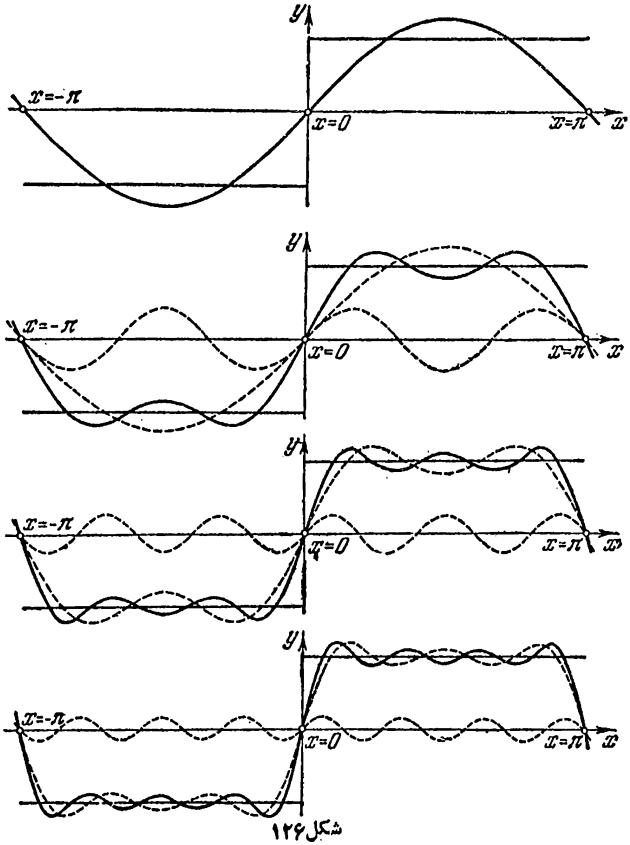
$$\frac{\pi}{4}=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\dots$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\dots$$

اگر بسطی راکه دراین‌جا به‌دست آوردیم، با بسط ۲) تلفیق کنیم، به‌سادگی به‌رشته‌ای برای تابع $f(x)=x$ می‌رسیم:

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi)$$

که به‌طور مستقیم، تنها برای $0<x<\pi$ به‌دست می‌آید، ولی‌روشن است که برابری برای $x=0$ هم برقرار است و، علاوه‌برآن، هر دوطرف برابری، تابع‌هایی فردهستند، به‌نحوی

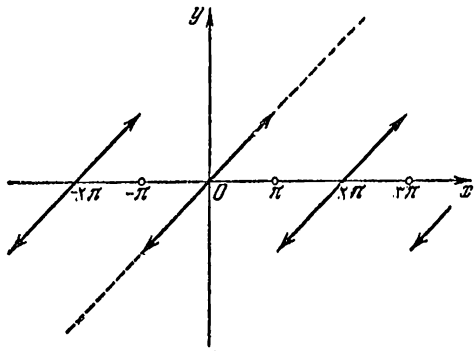


شکل ۱۲۶

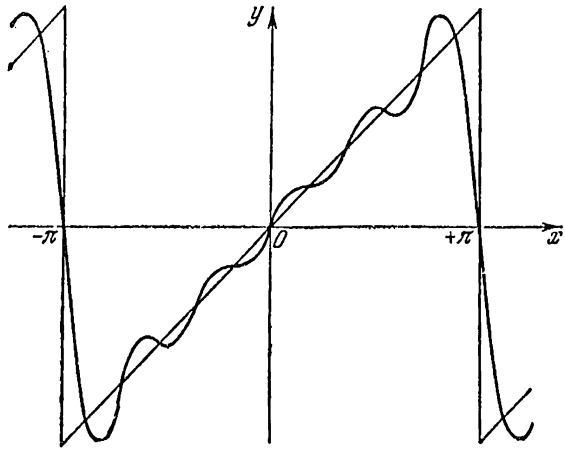
که سرانجام، بسط مزبور، برای تمامی بازهٔ $(-\pi, \pi)$ درست است.

نمودار رشته، ضمن تغییر x از $-\infty$ تا $+\infty$، در شکل ۱۲۷ داده شده است. روی شکل ۱۲۸، نمودار مجموع جزئی زیر داده شده است:

$$y = s_5(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5}\right)$$



شکل ۱۲۷



شکل ۱۲۸

۵) با تکیه بر بسط ۲)، ثابت کنید برای تمامی محور حقیقی داریم:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}=\begin{cases}x-E(x) & (x،\text{ عددی غیردرست})\\ \frac{1}{2} & (x،\text{ عددی درست})\end{cases}$$

۶) تابع(زوج) $f(x)=x^2$ را، در بازهٔ $[-\pi,\pi]$، به‌رشته‌ای بر حسب کسینوس‌ها بسط دهید.

بنا بر رابطهٔ (۱۹):

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{\pi^2}{3},$$

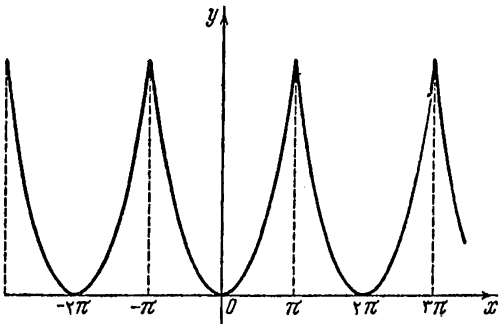
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{4}{n\pi}x\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{4}{n^2}\quad(n>0)$$

به‌نحوی که

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}\qquad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

نمودار مجموع رشته، از بی‌نهایت کمان سهمی متصل به‌هم، تشکیل شده است که در



شکل ۱۲۹

شکل ۱۲۹ می‌بینید.

اگر در رشتهٔ حاصل، $x=\pi$ یا $x=0$ بگیریم، به‌این نتیجه‌ها می‌رسیم که از قبل هم با آن‌ها آشنا هستیم:

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

که البته، هرکدام از آن‌ها را می‌توان به‌طور مستقیم، ازدیگری به‌دست آورد.

۷) این تابع‌ها را بسط دهید:

(a) $f_1(x)=\cos ax$ برحسب کسینوس‌ها در بازهٔ $[-\pi,\pi]$،

(b) $f_2(x)=\sin ax$ برحسب سینوس‌ها، در بازهٔ $(-\pi,\pi)$، (a دراین‌جا، عددی درست نیست).

(a) داریم:

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\,dx=\frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\,dx= \qquad (n>0)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(a+n)x+\cos(a-n)x]\,dx=(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\frac{\sin a\pi}{\pi}$$

به‌نحوی که

$$\frac{\pi}{2}\frac{\cos ax}{\sin a\pi}=\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2}\qquad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

(b) پاسخ: $\frac{\pi}{2}-\frac{\sin ax}{\sin a\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{a^2-n^2}$ $(-\pi<x<\pi)$.

درضمن، از (a)، به‌ازای $x=0$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\sin a\pi}=\frac{1}{a\pi}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\pi}{(a\pi)^2-(n\pi)^2}$$

واگر فرض کنیم $a\pi = z$:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2} = \frac{1}{z} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right]$$

(دراین‌جا، z، عددی است دلخواه غیراز π). دوباره به‌بسط تابع $\frac{1}{\sin z}$ به‌کسرهای ساده می‌رسیم. همچنین، اگر در (a) فرض کنیم: $x = \pi$، بسط $\cot g\, z$ را به‌کسرهای ساده به‌دست می‌آوریم [با ۴۴۱، ۹) مقایسه کنید].

و چقدر جالب است که چنین واقعیت‌هائی مهمی از ریاضیات، به‌عنوان نتیجه‌های ساده‌ای از بسط‌های مثلثاتی به‌دست می‌آیند.

۸) این تابع‌ها را بسط دهید:

(a) $f_1(x) = \operatorname{ch} ax$ برحسب کسینوس‌ها، دربازه $[-\pi, \pi]$،

(b) $f_2(x) = \operatorname{sh} ax$ برحسب سینوس‌ها، دربازهٔ $(-\pi, \pi)$.

این بسط‌ها را می‌توان، به‌سادگی، ازبسط تابع $f(x) = e^{ax}$ در ۱) به‌دست آورد [تابع‌های (a) و(b)، برای‌این‌تابع، درنقش تابع‌های‌زوج وفرد هستند (۶۸۹)]. داریم:

$$\frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a}{a^2 + n^2} \cos nx \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} a\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{a^2 + n^2} \sin nx \quad (-\pi < x < \pi)$$

از این بسط‌ها، به‌عنوان نتیجه، می‌توان بسط $\frac{1}{\operatorname{sh} z}$ وبسط $\operatorname{cth} z$را به‌کسرهای‌ساده به‌دست آورد.

اکنون به‌مثال‌هایی ازبسط تابع‌هایی می‌پردازیم که دربازهٔ از ۰ تا π داده شده‌اند (برحسب کسینوس‌ها، یا برحسب سینوس‌ها) [۶۸۹].

۹) تابع $f(x) = x$ را، دربازهٔ $[0, \pi]$، برحسب کسینوس‌ها بسط دهید.

بنابردستور (۱۹):

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{2},$$

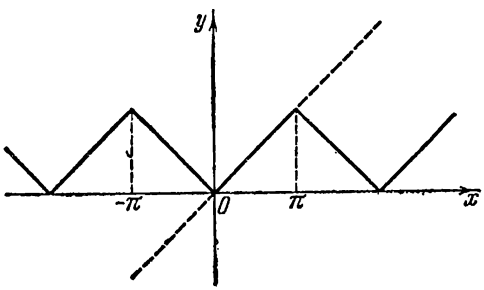
$$a_n = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{۲}{\pi}\left.x\frac{\sin nx}{n}\right|_{۰}^{\pi} - \frac{۲}{n\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin nx\,dx =$$

$$= ۲\frac{\cos n\pi - ۱}{n^{۲}\pi} \qquad (n>۰)$$

یعنی $a_{۲k}=۰$ و $a_{۲k-۱} = -\frac{۴}{(۲k-۱)^{۲}\pi}$ $(k=۱,۲,۳,\ \cdots)$.

بسط مطلوب، به‌این صورت است:

$$x = \frac{\pi}{۲} - \frac{۴}{\pi}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\cos(۲k-۱)x}{(۲k-۱)^{۲}} \qquad (۰\leqslant x\leqslant\pi)$$

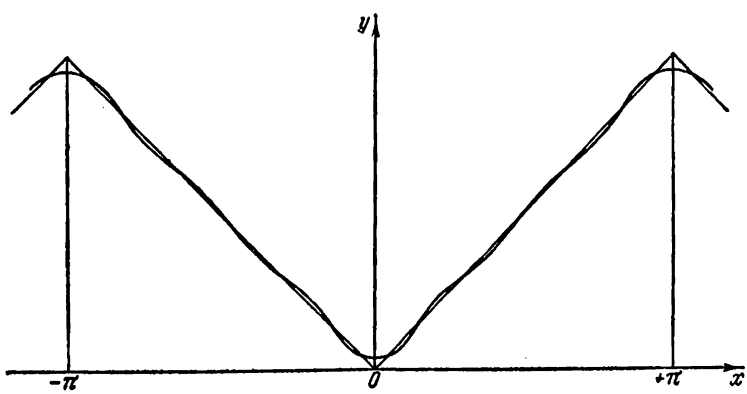


شکل ۱۳۰

نمودار مجموع رشته، درشکل ۱۳۰ داده شده است [با بسطی که در ۴)، برای همین تابع برحسب سینوس‌ها، داشتیم ونمودار آن‌درشکل ۱۲۷ داده شده بود، مقایسه کنید]. در شکل ۱۳۱، نمودار منحنی زیر داده شده است:

$$y = s_{۵}(x) = \frac{\pi}{۲} - \frac{۴}{\pi}\left(\cos x + \frac{۱}{۳^{۲}}\cos ۳x + \frac{۱}{۵^{۲}}\cos ۵x\right)$$

با ترکیب نتیجهٔ حاصل دربسط ۶) ازتابع $x^{۲}$ برحسب کسینوس‌ها، به‌سادگی ثابت



شکل ۱۳۱

می‌شود:

$$\frac{۳x^۲-۶\pi x+۲\pi^۲}{۱۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^۲}\quad(۰\leqslant x\leqslant\pi)$$

از آن‌جاکه، دوطرف برابری، با تبدیل x به $x-۲\pi$ تغییر نمی‌کنند، بنابراین، برابری فوق در بازهٔ وسیع‌تر $[۰, ۲\pi]$ هم برقرار است.

۱۰) تابع $f(x)=x^۲$ را، در بازهٔ $(۰, \pi)$، برحسب سینوس‌ها بسط دهید.

پاسخ: $x^۲=\sum_{n=۱}^{\infty}b_n \sin nx$، که در آن

$$b_{۲k}=-\frac{\pi}{k},\quad b_{۲k-۱}=\frac{۲\pi}{۲k-۱}-\frac{۸}{\pi(۲k-۱)^۳}$$

ازخواننده می‌خواهیم، نمودار مجموع رشته را رسم و آن را با نمودار شکل ۱۲۹ مقایسه کند.

۱۱) تابع $f(x)=e^{ax}$ را در بازهٔ از ۰ تا π: (a) به‌رشته‌ای برحسب کسینوس‌ها، (b) به‌رشته‌ای برحسب سینوس‌ها، بسط دهید.

پاسخ: (a) $$e^{ax}=\frac{e^{a\pi}-۱}{a\pi}+\frac{۲a}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n e^{a\pi}-۱}{a^۲+n^۲}\cos nx\quad(۰\leqslant x\leqslant\pi)$$

(b) $$e^{ax}=\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}[۱-(-۱)^n e^{a\pi}]\frac{n}{a^۲+n^۲}\sin nx\quad(۰<x<\pi)$$

۱۲) این تابع‌ها را بسط دهید:

(a) $f_۱(x)=\sin ax$، برحسب کسینوس‌ها در $[۰, \pi]$،

(b) $f_۲(x)=\cos ax$ برحسب سینوس‌ها در $(۰, \pi)$،

(a) حل. ابتدا، a را عددی غیرصحیح می‌گیریم. داریم:

$$\frac{۱}{۲}a_۰=\frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi}\sin ax\,dx=\frac{۱-\cos a\pi}{\pi},$$

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}\sin ax\cos nx\,dx=\frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi}[\sin(a+n)x+\sin(a-n)x]\,dx=$$

$$=\frac{۲a}{\pi}[۱-(-۱)^n\cos a\pi]\frac{۱}{a^۲-n^۲}$$

وبسط مطلوب، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\sin ax=\frac{1-\cos a\pi}{\pi}\left\{1+2a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{a^2-(2k)^2}\right\}+$$

$$+2a\frac{1+\cos a\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{a^2-(2k-1)^2}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$$

اکنون، a را عددی درست می‌گیریم. در این‌جا هم، دوحالت $a=2m$ (زوج) و $a=2m-1$ (فرد) را ازهم جدا می‌کنیم. برای $a=2m$ داریم*:

$$a_0=0,\ a_{2k}=0,\ a_{2k-1}=\frac{8m}{\pi}\frac{1}{(2m)^2-(2k-1)^2}$$

به‌نحوی که

$$\sin 2mx=\frac{8m}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2m)^2-(2k-1)^2}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$$

به‌همین‌ترتیب، برای $a=2m-1$، خواهیم داشت*:

$$\sin(2m-1)x=\frac{2}{\pi}\left\{1+2(2m-1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2m-1)^2-(2k)^2}\right\}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$$

(b) راهنمائی: درهمان حالت‌های (a)، به‌طور جداگانه، بررسی کنید.

۱۳) ثابت کنید که برای x در $[0,\pi]$ داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^4}=\frac{1}{96}\pi(\pi-2x)(\pi^2+2\pi x-2x^2)$$

راهنمائی. تابع $f(x)$ واقع در سمت راست برابری را به‌رشتهٔ فوریه بسط دهید (ضمن انتگرال گیری مکرر جزء به‌جزء) و درنظر بگیرید: $f'(0)=f'(\pi)=0$.

۱۴) اکنون مثال‌هایی از بسط تابع‌ها را درنظر می‌گیریم که به‌معنای ناویژه، انتگرال‌پذیر باشند. فرض کنید بخواهیم تابع زوج زیر را، دربازهٔ $(-\pi,\pi)$، برحسب کسینوس‌ها بسط دهیم:

$$f(x)=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$$

---

*) به‌سادگی ثابت می‌شودکه، اگر درسمت چپ، سینوس را به‌قدرمطلق آن تبدیل کنیم، این بسط برای تمامی محور حقیقی برقرار می‌شود.

تابع، در دوانتهای بازه به‌سمت ∞ میل می‌کند، ولی همچنان انتگرال‌پذیر (به‌طورمطلق) باقی می‌ماند.

بنابردستور (۱۹) داریم:

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln 2\cos\frac{x}{2}\,dx=\ln 2+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\,dt=0$$

[۴۹۲، ۱° را ببینید]؛ وبرای $n>0$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln 2\cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\ln 2\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{nx}{n}\Big|_0^{\pi}+$$

$$+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cdot\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,dx=(-1)^{n-1}\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

(با تبدیل x به $\pi-x$). برای محاسبهٔ انتگرال آخر، تابع زیر انتگرال را به‌صورت مجموع می‌نویسیم:

$$\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}+\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

وهریك ازجمله‌ها را، با توجه به‌اتحاد (۲۶) شمارهٔ ۶۸۰، به‌ترتیب، به‌این مجموع‌ها تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n}\sin ix\quad\text{یا}\quad\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\cos ix$$

سرانجام

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\quad(n=1,2,3,\dots)$$

وبسط مطلوب، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi)$$

می‌توان این برابری را، به‌ازای $x=\pm\pi$ هم، برقرار دانست، به‌شرطی که هردو طرف آن را، دراین حالت، $-\infty$ بنویسیم. اگر درجلو علامت ln، به‌جای کسینوس، قدرمطلق آن را بنویسیم، آن‌وقت، برابری، برای هرمقدار حقیقی x، برقرار خواهد بود.

اگر دراین برابری، x را به $\pi-x$ تبدیل کنیم، به‌بسط جالب دیگری می‌رسیم.

$$-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\qquad(0<x<2\pi)$$

دربارهٔ گسترش این رابطه به‌مرزها هم، می‌توان همان نکتهٔ بالا را تکرار کرد.

درپایان، به‌بسط تابع‌هایی می‌پردازیم که، دربخش‌های مختلف بازه، با عبارت‌های تحلیلی مختلفی داده شده‌اند*.

۱۵) تابع زیررا به‌رشتهٔ کامل فوریه بسط دهید:

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi<x<0)\\ x & (0\leqslant x\leqslant\pi)\end{cases}$$

بنابردستورهای (۱) داریم:

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{\pi}{4},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{\cos n\pi-1}{n^2\pi},$$

یعنی $a_{2k}=0$ و $a_{2k-1}=-\dfrac{2}{(2k-1)^2\pi}$. به‌همین ترتیب

$$b_n=-\frac{\cos n\pi}{n}=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

وبسط، به‌این صورت درمی‌آید:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{2}{9\pi}\cos 3x+$$

$$+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}-\dots\qquad(-\pi<x<\pi)$$

---

*) درواقع، درمورد این مثال‌ها، هیچ‌چیز تازه‌ای نسبت به‌مثال‌های قبلی وجود ندارد؛ مگرنه این است‌که، مثلاً، مجموع رشتهٔ ۲) را می‌توان همچون تابعی درنظرگرفت‌که «پیوندی»، از رشتهٔ تابع‌های خطی است (با شکل ۱۲۴ مقایسه‌کنید).

۱۶) هریك از تابع‌های زیررا، از ۰ تا π، برحسب کسینوس‌ها بسط دهید:

$$\text{(a)}\quad f_1(x)=\begin{cases}1 & (0\leqslant x\leqslant h)\\ 0 & (h<x\leqslant\pi)\end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad f_2(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2h} & (0\leqslant x\leqslant 2h)\\ 0 & (2h<x\leqslant\pi)\end{cases}$$

برای حالت (a) داریم:

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^h dx=\frac{h}{\pi},\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^h \cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin nh}{n},$$

$$f_1(x)=\frac{2h}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cos nx\right\}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$$

البته، به‌استثنای نقطهٔ $x=h$، که در آن‌جا، مجموع رشته برابر $\frac{1}{2}$ است.

برای حالت (b):

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)dx=\frac{h}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos 2nh}{2n^2h}=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin^2 nh}{n^2h},$$

$$f_2(x)=\frac{2h}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\cos nx\right\}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$$

۱۷) ثابت کنید:

$$\text{(a)}\quad \cos x-\frac{\cos 5x}{5}+\frac{\cos 7x}{7}-\frac{\cos 11x}{11}+\cdots=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} & \left(0\leqslant x<\dfrac{\pi}{3}\right)\\ \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}} & \left(x=\dfrac{\pi}{3}\right)\\ 0 & \left(\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3}\right)\\ -\dfrac{\pi}{4\sqrt{3}} & \left(x=\dfrac{2\pi}{3}\right)\\ -\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} & \left(\dfrac{2\pi}{3}<x\leqslant\pi\right)\end{cases}$$

(b) $$\sin x-\frac{\sin 5x}{5^2}+\frac{\sin 7x}{7^2}-\frac{\sin 11x}{11^2}\dots=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}x & \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{3}\right)\\ \dfrac{\pi^2}{6\sqrt{3}} & \left(\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3}\right)\\ \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}(\pi-x) & \left(\dfrac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\pi\right)\end{cases}$$

۱۸) تابع $f(x)$، به‌این‌ترتیب، تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\cos x & \left(\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\right)\end{cases}$$

آن را، برحسب کسینوس‌ها بسط دهید.

پاسخ: $$f(x)=\frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}\right\}.$$

۱۹) ثابت کنید، مجموع رشتهٔ

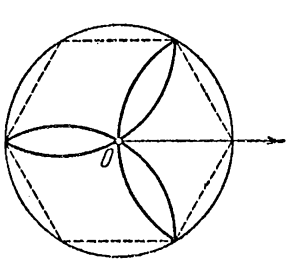
$$\frac{\pi}{2}(\cos x+\sin x)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}[\cos(4k+1)x-\sin(4k+1)x-$$
$$-\cos(4k+3)x-\sin(4k+3)x]$$

برای $m\pi<x<m\pi+\dfrac{\pi}{2}$ برابر $\pi\sin x$ و برای $m\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<(m+1)\pi$

برابر $\pi\cos x$ و برای $x=m\pi$ یا $x=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ برابر $(-1)^n\dfrac{\pi}{2}$ است

$(m=0,\pm1,\pm2,\dots)$.

۲۰) سه رأس یك شش‌ضلعی منتظم را (یك درمیان) درنظر گرفته‌ایم و به‌مرکز هرکدام از آن‌ها و به شعاع a، ضلع شش‌ضلعی، دایره‌هایی رسم کرده‌ایم؛ از کمان‌های درونی این دایره‌ها، یك «سه‌برگی» به دست می‌آید (شکل ۱۳۲). معادلهٔ کامل این «سه برگی» را بنویسید، به شرطی که قطب را



شکل ۱۳۲

مرکز شش‌ضلعی و محور قطبی را خط راستی بگیریم که از مرکز یکی از دایره‌ها گذشته باشد. راهنمایی. $r=f(\theta)\ (-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$، که در آن، تابع زوج $f(\theta)$، با این برابری‌ها تعریف می‌شود:

$$f(\theta)=\begin{cases}2a\cos\theta & \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)\\ 2a\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & \left(\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\pi\right)\end{cases}$$

این تابع را، برحسب کسینوس‌ها بسط دهید.

پاسخ: $\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}a}r=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\cdot4}\cos2\theta-\dfrac{1}{5\cdot7}\cos6\theta+\dfrac{1}{8\cdot10}\cos9\theta-\cdots$

$$(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

۲۱) با استفاده از بسط‌های معلوم، ثابت کنید:

(a) $x\sin x=1-\dfrac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos nx}{n^2-1}$ $\qquad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$

(b) $x\cos x=-\dfrac{1}{2}\sin x+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n^2-1}\sin nx$ $\qquad(-\pi<x<\pi)$

(c) $\sin x\ln\left(2\cos\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{4}\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2-1}\sin nx$ $\qquad(-\pi<x<\pi)$

(d) $\cos x\ln\left(2\cos\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n^2-1}\cos nx$ $\qquad(-\pi<x<\pi)$

۲۲) اگر تابع مفروض $f(x)$ در بازهٔ $[0,2\pi]$، با این شرط سازگار باشد:

(a) $f(2\pi-x)=f(x)$، یا (b) $f(2\pi-x)=-f(x)$

آن‌وقت، در حالت اول $b_n=0$، و در حالت دوم $a_n=0$.

این را ثابت کنید [یا با آغاز از دستور (۱)، یا با تکیه بر زوج یا فرد بودن ادامهٔ تابع به‌طور متناوب].

یادداشت. اکنون روشن است که ویژگی‌های بسط تابع‌های $\dfrac{\pi-x}{2}$ و $\ln\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right)$ را

[۲) و ۱۴)]، در بازهٔ $[0, 2\pi]$، می‌شد پیش‌بینی کرد، زیرا

$$\frac{\pi-(2\pi-x)}{2}=-\frac{\pi-x}{2},$$

$$\ln\left(2\sin\frac{2\pi-x}{2}\right)=\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$$

۲۳) ثابت کنید، اگر در بازهٔ $[-\pi, \pi]$، تابع $f(x)$، با این شرط سازگار باشد:

$$\text{(a)}\ f(x+\pi)=f(x)\quad \text{یا}\quad \text{(b)}\ f(x+\pi)=-f(x)$$

آن‌وقت، در حالت اول $a_{2m-1}=b_{2m-1}=0$، و در حالت دوم $a_{2m}=b_{2m}=0$.

۲۴) اگر خود را به تابع‌هایی محدود کنیم که در بازهٔ $[0, \pi]$ داده شده‌اند، ثابت کنید شرط

(a) $f(\pi-x)=f(x)$، موجب برابری $a_{2m-1}=0$ (ضمن بسط برحسب کسینوس‌ها)، یا $b_{2m}=0$ (ضمن بسط برحسب سینوس‌ها) می‌شود.

(b) $f(\pi-x)=-f(x)$ منجر به برابری $\sigma_{2m}=0$ (ضمن بسط برحسب کسینوس‌ها) یا $b_{2m-1}=0$ (ضمن بسط برحسب سینوس‌ها) می‌شود.

یادداشت. براین اساس، می‌شد ویژگی‌های بسط تابع‌های $\frac{x}{2}$ و $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ و $\frac{\pi}{4}$ را در ۴)، و تابع‌های $\sin 2mx$ و $\sin(2m-1)x$ برحسب کسینوس‌ها را در ۱۲) و، همچنین، بسط‌های ۱۳)، ۱۷ و ۱۸) را پیش‌بینی کرد.

۲۵) با توجه به استدلال‌های شمارهٔ ۶۸۹، ثابت کنید که، اگر تابع $f(x)$ تنها در بازهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ داده شده باشد، با شرط قیدهای معمولی، می‌توان آن را برحسب کسینوس‌ها یا برحسب سینوس‌ها، تنها با مضرب‌های زوج یا تنها با مضرب‌های فرد x، بسط داد.

۲۶) تابع $f(x)$ را با دورهٔ تناوب 2π و a_m و b_m را ضریب‌های فوریهٔ آن، در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم $\bar{a}_m$ و $\bar{b}_m$، ضریب‌های فوریهٔ تابع $f(x+h)$ را برحسب آن بیان کنیم ($h=\text{const.}$).

با استفاده از یادداشت شمارهٔ ۶۸۱، دربارهٔ انتگرال تابع متناوب، داریم:

$$\bar{a}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(x)dx=a_0,$$

$$\bar{a}_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos mx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(x)\cos m(x-h)dx=$$

$$= \cos mh \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)\cos mx\,dx + \sin mh \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)\sin mx\,dx =$$

$$= a_m \cos mh + b_m \sin mh$$

و به‌همین ترتیب

$$\bar{b}_m = b_m \cos mh - a_m \sin mh$$

۶۹۱. بسط $\ln\Gamma(x)$. به‌عنوان یک مثال پیچیده‌تر، با پیروی از کومر (E.E.Kummer) تابع $\ln\Gamma(x)$ را، در بازهٔ $[0, 1]$، به رشتهٔ فوریه بسط می‌دهیم.

با استفاده از ملاحظه‌های شمارهٔ **۶۸۸** دربارهٔ بسط تابع در بازهٔ $[0, 2l]$ (در این‌جا: $2l = 1$)، خواهیم داشت:

$$\ln\Gamma(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x)$$

درضمن، ضریب‌های آن را می‌توان با دستورهایی شبیه دستورهای (۱۷*) شمارهٔ **۶۸۸** به‌دست آورد:

$$a_n = 2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad b_n = 2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin 2n\pi x\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ولی نشان خواهیم داد که ضریب‌های a_n را می‌توان، تقریباً بدون هیچ محاسبه‌ای، تعیین کرد. درواقع، با لگاریتم گرفتن از رابطهٔ معلوم [۵۳۱، ۵*]

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{2\pi}{2\sin\pi x}$$

به‌دست می‌آید:

$$\ln\Gamma(x) + \ln\Gamma(1-x) = \ln 2\pi - \ln(2\sin\pi x)$$

رشتهٔ فوریهٔ تابع $\ln\Gamma(1-x)$، از رشتهٔ فوریهٔ تابع $\ln\Gamma(x)$، با تبدیل x به $1-x$، به‌دست می‌آید، به‌نحوی که جمله‌های شامل کسینوس تغییر نمی‌کنند و جمله‌های شامل سینوس تغییر علامت می‌دهند. با جمع کردن به‌دست می‌آید:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos 2n\pi x$$

ازطرف‌دیگر، به‌سادگی می‌توان رشتهٔ فوریه‌را برای تابعی که درسمت راست‌برابری‌قرار دارد، نوشت؛ برای این منظور، باید از بسط تابع $\ln\left(۲\sin\frac{x}{۲}\right)$ — استفاده کرد [۶۹۰، ۱۴)]، به‌شرطی که x را به $۲\pi x$ تبدیل کنیم:

$$\ln ۲\pi+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}\cos(۲n\pi x)$$

به‌این ترتیب، بلافاصله به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}a_{۰}=\ln\sqrt{۲\pi},\quad a_n=\frac{۱}{۲n}\quad(n=۱,۲,\dots)$$

برای محاسبهٔ b_n، باید زحمت بیشتری را تحمل کرد. از دستور مربوط به $\ln\Gamma(x)$ آغاز می‌کنیم [۵۴۰]

$$\ln\Gamma(x)=\int_{۰}^{\infty}\left[(x-۱)e^{-z}-\frac{e^{-z}-e^{-xz}}{۱-e^{-z}}\right]\frac{dz}{z}$$

که با تبدیل $e^{-z}=t$، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\ln\Gamma(x)=\int_{۰}^{۱}\left[\frac{۱-t^{x-۱}}{۱-t}-x+۱\right]\frac{dt}{\ln t}$$

اگراین عبارت را، دررابطهٔ مربوط به b_n قراردهیم، ونسبت به x ونسبت به t، انتگرال بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$b_n=۲\int_{۰}^{۱}\frac{dt}{\ln t}\int_{۰}^{۱}\frac{۱-t^{x-۱}}{۱-t}-x+۱\Big]\sin ۲n\pi x\,dx$$

برای این‌که قانع شویم که درمورد‌جابه‌جائی انتگرال‌ها، اشکالی وجود ندارد، به‌این‌نکته توجه می‌کنیم. عبارت

$$\left[\frac{۱-t^{x-۱}}{۱-t}-x+۱\right]\frac{\sin ۲n\pi x}{\ln t}$$

به‌عنوان عبارتی از دومتغیر، تنها به‌ازای $t=۰$ پیوستگی خود را ازدست می‌دهد*. ولی، انتگرال این‌عبارت نسبت به‌متغیر t، به‌طوریکنواخت، نسبت به x دربازهٔ $[۰,۱]$ متقارب

*) به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که، پیوستگی تابع، به‌ازای $t=۱$ خراب نمی‌شود.

است، زیرا (به‌ازای $0<\tau<1$) داریم:

$$\int_0^\tau \left[\frac{t^{x-1}-1}{1-t}-(1-x)\right]\frac{|\sin 2n\pi x|}{|\ln t|}\,dt<$$

$$<\frac{1}{1-\tau}\cdot\frac{1}{|\ln\tau|}\cdot\frac{|\sin 2n\pi x|}{x}\,\tau^x<\frac{1}{1-\tau}\cdot\frac{1}{|\ln\tau|}\cdot 2n\pi$$

وبنابراین، با توجه به‌قضیه معلوم [۵۲۱]، جابه‌جائی مجاز است.

محاسبه را ادامه می‌دهیم. داریم:

$$\int_0^1 \sin 2n\pi x\,dx=0,\quad \int_0^1 x\sin 2n\pi x\,dx=-\frac{1}{2n\pi},$$

$$\int_0^1 t^{x-1}\sin 2n\pi x\,dx=\frac{1}{t}\int_0^1 e^{x\ln t}\sin 2n\pi x\,dx=$$

$$=\frac{\ln t\cdot\sin 2n\pi x-2n\pi\cos 2n\pi x}{t[\ln^2 t+4n^2\pi^2]}\,e^{x\ln t}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{(1-t)2n\pi}{t[\ln^2 t+4n^2\pi^2]}$$

از آن‌جا

$$b_n=2\int_0^1\left[-\frac{2n\pi}{t[\ln^2 t+4n^2\pi^2]}+\frac{1}{2n\pi}\right]\frac{dt}{\ln t}$$

سرانجام، با فرض $t=e^{-2n\pi u}$، به‌عبارت زیر برای b_n می‌رسیم:

$$b_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{1+u^2}-e^{-2n\pi u}\right]\frac{du}{u}$$

و درحالت خاص $b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{1+u^2}-e^{-2\pi u}\right]\frac{du}{u}$. واز آن‌جا

$$nb_n-b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty(e^{-2\pi u}-e^{-2n\pi u})\frac{du}{u}=\frac{1}{\pi}\ln n$$

(انتگرال فرولانی؛ ۴۹۵). به‌این ترتیب، تعیین همهٔ ضریب‌ها، به‌تعیین اولین ضریب منجر می‌شود.

عبارت انتگرالی ثابت اولر را به‌یاد بیاوریم [۵۳۵]:

$$C=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+u}-e^{-u}\right)\frac{du}{u}$$

دراین‌صورت

$$b_n-\frac{1}{\pi}C=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{1+u}\right)\frac{du}{u}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty(e^{-u}-e^{-2\pi u})\frac{du}{u}$$

اولین انتگرال، بلافاصله، محاسبه می‌شود؛ این انتگرال برابرصفراست. انتگرال دوم‌هم، برابر $\frac{1}{\pi}\ln 2\pi$ است (همان انتگرال فرولانی). بنابراین به‌دست می‌آید:

$$b_1=\frac{1}{\pi}(C+\ln 2\pi),\ b_n=\frac{1}{n\pi}(C+\ln 2n\pi)$$

به‌این‌ترتیب، بسط مطلوب به‌این صورت درمی‌آید:

$$\ln\Gamma(x)=\ln\sqrt{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\cos 2n\pi+\frac{1}{n\pi}(C+\ln 2\pi n)\sin 2n\pi x$$

$$(0<x<1)$$

§۳. تکمیل

۶۹۲. رشته‌های با ضریب‌های نزولی. تا این‌جا، کار را ازتابع‌های مفروضی آغاز می‌کردیم و، بااستفاده از شرط‌های کافی، آن‌ها را به‌رشتهٔ فوریه بسط می‌دادیم. در برخی حالت‌های ساده، می‌توان برعکس، ازروی رشتهٔ مثلثاتی مفروض، ثابت کرد که این رشته، به‌سمت یك‌تابع انتگرال‌پذیر (به‌طورمطلق)، متقارب است، که این‌رشته، همان‌رشتهٔ فوریهٔ آن است. دراین‌جا، بررسی یونگ (W. H. Young) را در این‌باره، شرح می‌دهیم.

صحبت برسررشته‌هایی است که به‌این صورت‌ها باشند:

$$(C)\ \frac{1}{2}q_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}q_\nu\cos\nu x,\quad (S)\ \sum_{\nu=1}^{\infty}q_\nu\sin\nu x$$

در ضمن، یکبار برای همیشه، فرض را براین می‌گیریم که، ضریب‌های q_ν، مثبت‌اند و به‌طور نزولی یکنواخت، به‌سمت صفرمیل می‌کنند. همان‌طورکه می‌دانیم [پایان شمارهٔ ۴۳۰ را ببینید]، درهربازهٔ بسته‌ای‌که شامل نقطه‌های $2k\pi$ نباشد ($k=0,\pm1,\dots$)، هردو رشته، به‌صورتی یکنواخت متقاربند. مجموع رشتهٔ (C) را $f(x)$ و مجموع رشتهٔ

(S) را $g(x)$ می‌نامیم؛ هردو تابع، دورهٔ تناوبی برابر 2π دارند و درهمه‌جا، به‌استثنای نقطه‌های به‌صورت $2k\pi$، پیوسته‌اند. رشتهٔ (C)، در این نقطه‌های استثنائی، متباعد هم می‌تواند باشد*. چون f تابعی زوج و g تابعی فرد است، بنابراین، کافی است خود را به‌بازهٔ $[0, \pi]$ محدود کنیم.

۱°. اگر تابع f (یا g)، به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر باشد، آن‌وقت، رشتهٔ C (یا S)، رشتهٔ فوریهٔ آن خواهد بود.**

(a) اگر بسط تابع g را در $\sin mx$ ضرب کنیم $(m = 1, 2, 3, \dots)$:

$$g(x)\sin mx = \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu \sin \nu x \cdot \sin mx$$

به‌رشته‌ای می‌رسیم که، دربازهٔ $[0, \pi]$، به‌طور یکنواخت متقارب است. درواقع، چون

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu x = \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

بنابراین

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu x \sin mx\right| \leqslant \frac{|\sin mx|}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{mx}{\frac{x}{\pi}} = m\pi$$

ودرمورد آن، معیار دیریکله را به‌کار می‌بریم [۴۲۹]. [دراین‌جا، ازنابرابری‌های مقدماتی

$$|\sin z| \leqslant z (z \geqslant 0), \quad \sin z > \frac{2}{\pi} z \quad \left(0 < z \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

استفاده کرده‌ایم.] دراین‌حالت، می‌توان ازرشته، جمله به‌جمله، از ۰ تا π، انتگرال گرفت؛

---

*) اگر رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty} q_\nu$ همگرا باشد، آن‌وقت، هردو رشتهٔ (C) و (S)، به‌سمت تابع‌هایی به‌طور یکنواخت همگرا می‌شوند، به‌نحوی‌که، این‌ها، رشته‌های فوریهٔ آن‌ها را تشکیل می‌دهند [۶۷۸]. برای ما حالتی جالب است‌که، درآن، رشتهٔ مذکور واگرا باشد.

**) این قضیه، حالت خاصی ازیک قضیهٔ کلی‌تر است‌که، البته، اثبات آن، به‌قدرکافی دشوار است [۷۵۰ و ۷۵۱ را ببینید]؛ ما ترجیح‌دادیم، دراین‌جا، برای‌رشته‌های‌موردبررسی‌خود، به‌همین قضیه اکتفا کنیم.

به‌دست می‌آید.:

$$q_m = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} g(x)\sin mx\,dx$$

(b) برای تابع f، بسط آن را در $۱-\cos mx$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)(۱-\cos mx) = \frac{۱}{۲}q_۰(۱-\cos mx) + \sum_{\nu=۱}^{\infty} q_\nu \cos \nu x(۱-\cos mx)$$

این رشته هم، با توجه به‌معیار دیریکله، در بازهٔ $[۰\,,\pi]$، به‌طور یکنواخت متقارب است. برای قانع شدن در این مورد، توجه می‌کنیم که

$$\frac{۱}{۲}+\sum_{\nu=۱}^{n}\cos\nu x = \frac{\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)x}{۲\sin\frac{۱}{۲}x} \qquad (۱)$$

و بنابراین

$$\left|\frac{۱}{۲}(۱-\cos mx)+\sum_{\nu=۱}^{\infty}\cos\nu x(۱-\cos mx)\right| \leqslant \frac{۱-\cos mx}{۲\sin\frac{x}{۲}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\frac{۱}{۲}m^۲x^۲}{\frac{۲x}{\pi}} = \frac{۱}{۴}m^۲\pi x \leqslant \frac{۱}{۴}m^۲\pi^۲$$

[از نابرابری $۱-\cos z < \frac{۱}{۲}z^۲$ استفاده کرده‌ایم.]

اگر از ۰ تا π انتگرال بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$q_۰ - q_m = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} f(x)\,dx - \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$$

$$(m=۱,۲,۳,\ \ldots)$$

در این‌جا، به‌سمت مقدار حدی می‌رویم، وقتی که $m \to \infty$. بنا بر فرض $q_m \to ۰$؛ انتگرال آخری هم، بنا به پیش‌قضیهٔ شمارهٔ ۶۸۳، به‌سمت صفر میل می‌کند. بنابراین، ابتدا به‌دست می‌آید:

$$q_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

وسپس، به‌طور کلی

$$q_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$$

که اثبات را کامل می‌کند.

۲°. اگر رشتهٔ

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q_\nu}{\nu}=Q \qquad (2)$$

همگرا باشد، آن‌وقت، هردو رشتهٔ (C) و (S)، تابع‌هایی را تعریف می‌کنند که به‌طور مطلق انتگرال‌پذیرند (و بنابراین، رشته‌های فوریهٔ آن‌ها هستند).

چون بحث دربارهٔ هردو رشته، یکسان است، تنها به حالت رشتهٔ (C) می‌پردازیم. با فرض

$$Q_n=\frac{1}{2}q_0+q_1+\cdots+q_n$$

به‌ترتیب، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_n}{n(n+1)}=\frac{1}{2}q_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\nu=1}^{n}q_\nu=$$

$$=\frac{1}{2}q_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}q_\nu\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}q_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q_\nu}{\nu}=\frac{1}{2}q_0+Q \qquad (3)$$

دراین‌جا، مجموع‌ها را جابه‌جا [۳۹۳] واز برابری‌های روشن زیراستفاده کرده‌ایم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1 \quad و \quad \sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{\nu}$$

اکنون، فرض کنید:

$$\frac{\pi}{n+1}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{n}$$

برای این مقدارهای x، تابع $f(x)$ را این‌طور می‌نویسیم:

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}q_0+\sum_{\nu=1}^{n}q_\nu\cos\nu x\right)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}q_\nu\cos\nu x$$

مجموع اول، ازلحاظ قدرمطلق، با عدد Q_n برآورد می‌شود. برای برآورد مجموع دوم، پیش‌قضیهٔ آبل [۳۸۳] را درمورد عبارت

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+m}q_\nu\cos\nu x$$

به‌کارمی‌بریم. ازآن‌جاکه

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+\mu}\cos\nu x\right|=\left|\frac{\sin\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}$$

بنابراین

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+m}q_\nu\cos\nu x\right|\leqslant\frac{q_{n+1}}{\sin\frac{1}{2}x}<\frac{\pi}{x}q_{n+1}<\frac{\pi}{x}q_n<(n+1)q_n$$

همین برآورد، برای همهٔ مجموع دوم درحد هم حفظ می‌شود، به‌نحوی‌که سرانجام

$$|f(x)|\leqslant Q_n+(n+1)q_n\quad\left(\frac{\pi}{n+1}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{n}\right)$$

درچنین حالتی [(۳) و (۲) را ببینید]:

$$\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}|f(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n(n+1)}[Q_n+(n+1)q_n]=\pi\left(\frac{1}{2}q_0+2Q\right)$$

به‌نحوی‌که تابع $f(x)$، درواقع‌هم، به‌طورمطلق انتگرال‌پذیراست.کافی است۱° رابه‌کار ببریم.

همان‌طورکه بعداً خواهیم دید [۷۳۲]، همگرائی‌رشتهٔ (۲)، درعین‌حال، شرط لازم برای آن است‌کـه رشتهٔ (S)، رشتهٔ فوریه باشد، به‌نحوی‌کـه در رابطه بـا رشتهٔ (S)،

نمی‌توان نتیجهٔ حاصل را بهتر کرد. ولی درمورد رشتهٔ (C)، وضع به‌گونهٔ دیگری است: دراین‌جا، شرط مذکور، به‌هیچ‌وجه لازم نیست. برای این حالت، شرط کافی دیگری را می‌آوریم که، به‌وسیلهٔ شرط قبلی، پوشیده نمی‌شود.

۳°. اگر تفاضل $\Delta q_\nu = q_\nu - q_{\nu+1}$، با ترقی ν، به طور یکنوا نزولی باشد، آن‌گاه تابع $f(x)$ غیرمنفی و انتگرال‌پذیر است (و رشتهٔ (C)، رشتهٔ فوریهٔ آن است).

با توجه به‌تبدیل آبل [۳۸۳]، مجموع جزئی

$$C_n(x)=\frac{1}{2}q_0+\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \cos \nu x \qquad (x>0)$$

را تبدیل می‌کنیم. با درنظر گرفتن (۱)، به‌دست می‌آید:

$$C_n(x)=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\Delta q_\nu \cdot \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x+q_n \cdot \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\}$$

این مجموع را، دوباره، درمعرض تبدیل آبل قرار می‌دهیم. اگر برای سادگی‌کار فرض کنیم: $\Delta q_\nu - \Delta q_{\nu+1} = \Delta^2 q_\nu$، و توجه کنیم که

$$\sum_{\nu=0}^{m} \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x=\frac{1-\cos(m+1)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

آن‌وقت، $C_n(x)$ به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$C_n(x)=\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}x}\sum_{\nu=0}^{n-2}\Delta^2 q_\nu \cdot [1-\cos(\nu+1)x]+$$

$$+\Delta q_{n-1}\cdot\frac{1-\cos nx}{4\sin^2\frac{1}{2}x}+q_n\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

چون دوجملهٔ آخر، به‌ازای $n \to \infty$، به‌سمت صفر میل می‌کنند، بنابراین با گذر به‌حد، برای $f(x)$، بسطی برحسب تابع‌های غیرمنفی وپیوسته به‌دست می‌آید:

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^2 q_\nu \cdot \frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{1}{2}x}$$

(ضریب‌های $\Delta^{۲}q_{\nu}$، بنا به‌فرض، غیرمنفی‌اند). ازاین‌جا، روشن است که، تابع $f(x)$ هم، غیرمنفی است.

برای اثبات انتگرال‌پذیری این تابع، از نتیجهٔ شمارهٔ **۵۱۸** و یادداشت مربوط به آن، با اندکی تغییر برای رشته‌ها، استفاده می‌کنیم. می‌توان نوشت:

$$\int_{۰}^{\pi} f(x)\,dx=\sum_{\nu=۰}^{\infty}\Delta^{۲}q_{\nu}\int_{۰}^{\pi}\frac{۱-\cos(\nu+۱)x}{۴\sin^{۲}\frac{۱}{۲}x}\,dx$$

تنها با این شرط که، این رشته همگرا باشد. چون

$$\frac{۱-\cos(\nu+۱)x}{۴\sin^{۲}\frac{۱}{۲}x}=\sum_{\mu=۰}^{\nu}\frac{\sin\left(\mu+\frac{۱}{۲}\right)x}{۲\sin\frac{۱}{۲}x}=\sum_{\mu=۰}^{\nu}\left\{\frac{۱}{۲}+\sum_{\lambda=۱}^{\mu}\cos\lambda x\right\}$$

بنا بر این، بلافاصله، به‌دست می‌آید:

$$\int_{۰}^{\pi}\frac{۱-\cos(\nu+۱)x}{۴\sin^{۲}\frac{۱}{۲}x}\,dx=\frac{\pi}{۲}(\nu+۱)$$

[با ۳۰۹، ۵)، (b) مقایسه کنید]، به‌نحوی که

$$\int_{۰}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{\pi}{۲}\sum_{\nu=۰}^{\infty}(\nu+۱)\Delta^{۲}q_{\nu}$$

اکنون کافی است قانع شویم که رشتهٔ سمت راست متقارب است.

در **۳۷۵**، ۳) دیدیم که، اگر رشتهٔ

$$\sum_{\nu=۰}^{\infty}a_{\nu} \qquad (۴)$$

با جمله‌های مثبت و به‌طور یکنوا نزولی، متقارب باشد، باید داشته باشیم:

$$\nu a_{\nu}\to ۰$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود که رشته

$$\sum_{\nu=۰}^{\infty}(\nu+۱)(a_{\nu}-a_{\nu+۱})=\sum_{\nu=۰}^{\infty}(\nu+۱)\Delta a_{\nu}$$

متقارب است وهمان مجموع (۴) را دارد؛ این مطلب، از اتحاد زیرروشن می‌شود:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)(a\nu-a_{\nu+1})=\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu-na_n$$

اکنون، اگرفرض کنیم $a_\nu=\Delta q_\nu$، آن‌وقت، معلوم می‌شود که

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\Delta^2 q_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta q_\nu=q_0$$

وسرانجام

$$\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}q_0$$

قضیه، ثابت شد.

مثلاً، شرط این قضیه، درمورد رشتهٔ زیرصدق می‌کند:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\ln n}$$

این‌مثال، ازآن جهت آموزنده است که قضیهٔ ۲° را در مورد آن، نمی‌توان به‌کار برد، زیرا رشتهٔ

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

متباعد است [۳۶۷، ۶۹)].

یادداشت. اگر در رشته‌های (C) و (S)، x را به $x+\pi$ تبدیل کنیم، آن‌وقت، به‌رشته‌هایی می‌رسیم که‌ضریب‌های آن‌ها از لحاظ قدرمطلق نزولی، ولی باعلامت‌های‌متغیرند. قضیه‌هایی راکه دراین‌جا ثابت‌کردیم، درمورد این رشته‌ها هم، به‌قوت خود باقی‌هستند.

۶۹۳. مجموع‌رشته‌های مثلثاتی به‌کمک تابع‌های‌تحلیلی با متغیرمختلط. در مورد‌هایی، ضمن بررسی ضریب‌های رشته‌هایی ازنوع (C) یا (S)، می‌توان ثابت کردکه، این رشته‌ها، متقاربند (احتمالاً، با استثناکردن نقطه‌های جداگانه) و برای مجموع‌های خود، رشته‌های فوریه هستند (مثلاً، شمارهٔ قبل را ببینید)، ولی به‌طور طبیعی، درهمهٔ این حالت‌ها، این پرسش پیش می‌آیدکه: چگونه می‌توان مجموع این رشته‌ها را پیدا کرد، ویا دقیق‌تر، چگونه می‌توان آن‌ها را، به‌صورتی متناهی، برحسب تابع‌های‌مقدماتی (به‌شرطی‌که به‌این صورت قابل بیان باشند)، بیان کرد. حتی اولر و لاگرانژ هم توانستند،

برای محاسبهٔ مجموع‌های مثلثاتی، از تابع‌های تحلیلی با متغیرمختلط استفاده کنند. اندیشهٔ مربوط به‌روش اولر را دراین‌جا می‌آوریم.

فرض کنیم، برای انتخابی از ضریب‌های $\{q_\nu\}$، رشته‌های (C) و (S)، همه‌جا در بازهٔ $[0, 2\pi]$ (تنها با استثنا کردن نقطه‌های جداگانه) به سمت تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ متقارب باشند. رشته‌ای توانی را درنظر می‌گیریم که دارای همان ضریب‌ها باشد و توان آن، با متغیرمختلط z بیان شده باشد:

$$\frac{1}{2}q_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}q_\nu z^\nu \qquad (۵)$$

درهمسایگی دایرهٔ واحد $|z|=1$، یعنی به‌ازای $z=e^{ix}$، این رشته، به استثنای نقطه‌های جداگانه، بنابرفرض متقارب است:

$$\frac{1}{2}q_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}q_\nu e^{\nu ix}=\frac{1}{2}q_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}q_\nu(\cos\nu x+i\sin\nu x)=f(x)+ig(x) \qquad (۶)$$

دراین حالت، بنابرویژگی معلوم رشته‌های توانی، رشتهٔ (۵) به‌ازای $|z|<1$، یعنی در درون دایرهٔ واحد، متقارب است و تابعی مثل $\varphi(z)$ را با متغیر مختلط تعریف می‌کند. با استفاده از بسط‌های معلوم تابع‌های مقدماتی با متغیرمختلط [§۵، فصل دوازدهم را ببینید]، اغلب می‌توان به بسطی دست یافت که $\varphi(z)$ منجر به آن می‌شود. دراین صورت، برای $(r<1)$ $z=re^{xi}$ داریم:

$$\frac{1}{2}q_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}q_\nu re^{i\nu x}=\varphi(re^{ix})$$

وبنابرقضیهٔ آبل [۴۵۶]، تنها به‌شرطی که رشتهٔ (۶) همگرا باشد، مجموع آن به‌عنوان حد زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x)+ig(x)=\lim_{r\to 1}\varphi(re^{ix}) \qquad (۷)$$

معمولاً، این‌حد به‌طور ساده، برابر $\varphi(e^{ix})$ است که امکان محاسبهٔ تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ را به‌دست می‌دهد.

مثلاً، این رشته‌ها را درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x}{\nu} \quad و \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu}$$

ازآن‌چه در شمارهٔ قبل دیدیم، نتیجه می‌شود که این دورشته متقاربند (اولی، به‌استثنای

نقطه‌های ۰ و 2π) و رشته‌های فوریه را، برای تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ که به‌وسیلهٔ آن‌ها معین می‌شوند، تشکیل می‌دهند. ولی، این تابع‌ها کدام‌اند؟ برای پاسخ به‌این پرسش، رشتهٔ

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu}$$

را تشکیل می‌دهیم. با توجه به‌شباهتی که با رشتهٔ لگاریتمی دارد [۴۵۸]، به‌سادگی مجموع آن به‌دست می‌آید:

$$\varphi(z) = -\ln(1-z) = \ln\frac{1}{1-z} \quad (|z|<1)$$

بنا بر این

$$f(x)+ig(x) = \ln\frac{1}{1-e^{ix}} \quad (x\neq 0, 2\pi)$$

اکنون، به‌سادگی می‌توان محاسبه را دنبال کرد:

$$\frac{1}{1-e^{ix}} = \frac{1}{(1-\cos x)-i\sin x} = \frac{1}{2}+i\frac{\sin x}{2(1-\cos x)} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]$$

به‌نحوی که، مدول این‌عبارت، برابر $\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$ و آرگومان آن برابر $\frac{\pi-x}{2}$ است. یعنی

$$\ln\frac{1}{1-e^{ix}} = -\ln 2\sin\frac{x}{2}+i\frac{\pi-x}{2}$$

و به‌این ترتیب، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$f(x) = -\ln 2\sin\frac{x}{2}, \quad g(x) = \frac{\pi-x}{2} \quad (0<x<2\pi)$$

این نتیجه‌ها، برای ما آشنا هستند [۶۹۰، ۱۴) و ۲)]؛ حتی یکبار هم، آن‌ها را به کمك ملاحظه‌های «مختلط» به‌دست آوردیم [۴۶۱، ۶)، (b)]؛ ولی در حالت اول از تابع‌های f و g آغاز کرده بودیم و در حالت دوم از تابع تحلیلی φ. در این‌جا هم، نقطهٔ

آغاز حرکت ما، خود رشته‌ها بودند. درشمارهٔ بعد، با مثال‌های دیگری ازاین قبیل آشنا می‌شویم.

باردیگرتأکید می‌کنیم که، از قبل، باید اطمینان داشت که رشته‌های (C) و (S) همگرا هستند تااین‌حق را پیداکنیم که مجموع آن‌ها را به‌کمك رابطهٔ حدی (۷)به‌دست آوریم. وجودحد درسمت راست این برابری، به‌تنهائی نمی‌تواند موجب این نتیجه‌گیری بشودکه رشته‌های مذکور همگرا هستند. برای این‌که، این موضوع را، روی مثالی‌روشن کنیم، این رشته‌ها را درنظرمی‌گیریم:

$$\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty} cos\nu x \quad و \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} sin\nu x$$

روشن است که این دورشته، در $0<x<2\pi$ متباعدند. ولی اگررشتهٔ متناظرآن‌ها را تشکیل دهیم:

$$\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}$$

آن‌وقت، اگر نقطهٔ $z=re^{ix}$ را درطول شعاع دایرهٔ واحد، به‌سمت نقطهٔ e^{ix} روی محیط دایره میل دهیم، مجموع آن، حد کاملاً معینی پیدا خواهدکرد:

$$\frac{1}{1-e^{ix}}-\frac{1}{2}=i\frac{\sin x}{2(1-\cos x)} \quad (0<x<2\pi)$$

اگرهمگرائی رشته‌های (C) و (S) ازقبل ثابت نشده باشد، برابری (۷) را تنها می‌توان به عنوان یك نشانه درنظر گرفت: وقتی‌که به‌کمك برابری (۷)، تابع‌های f و g را به‌دست می‌آوریم، باید ضریب‌های فوریهٔ آن‌ها را محاسبه‌کنیم وتنها درحالتی‌که با ضریب‌های رشته‌های مفروض تطبیق کنند، به‌معیارهایی‌که برای همگرائی رشته‌های فوریه می‌شناسیم، مراجعه‌کنیم.

۶۹۴.مثال‌ها: در همهٔ مسأله‌ها، اثبات همگرائی رشته‌های داده شده را، به عهدهٔ خواننده گذاشته‌ایم.

۱) مجموع این رشته‌ها را به‌دست آورید:

$$(a)\ 1+\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{\cos nx}{1\cdot 2\cdots n}+\cdots$$

$$(b)\ \frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{\sin nx}{1\cdot 2\cdots n}+\cdots$$

حل. دراین‌جا داریم*:

$$\varphi(z)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\nu!}=e^{z}$$

به نحوی که

$$\varphi(e^{ix})=e^{\cos x+i\sin x}=e^{\cos x}[\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)]$$

ازآن‌جا

$$\text{(a)}\ f(x)=e^{\cos x}\cos(\sin x),\ \text{(b)}\ g(x)=e^{\cos x}\sin(\sin x)$$

۲) مجموع این رشته‌ها را به‌دست آورید:

$$\text{(a)}\ \frac{\cos x}{1!}-\frac{\cos 3x}{3!}+\frac{\cos 5x}{5!}-\ldots;\quad \text{(b)}\ \frac{\sin x}{1!}-\frac{\sin 3x}{3!}+\frac{\sin 5x}{5!}-\ldots;$$

$$\text{(c)}\ 1-\frac{\cos 2x}{2!}+\frac{\cos 4x}{4!}-\ldots;\quad \text{(d)}\ \frac{\sin 2x}{2!}-\frac{\sin 4x}{4!}+\frac{\sin 6x}{6!}-\ldots$$

راهنمائی. درحالت‌های (a) (b)، تابع $\varphi(z)$ چنین است:

$$\sin z=\frac{z}{1!}-\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}-\ldots$$

ودرحالت‌های (c) و (d):

$$\cos z=1-\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}-\ldots$$

از تجزیهٔ سینوس وکسینوس (با آوند مختلط)، به‌بخش‌های حقیقی وموهومی استفاده کنید [۳۵۹]:

$$\sin(\alpha+\beta i)=\sin\alpha\,\mathrm{ch}\beta+i\cos\alpha\,\mathrm{sh}\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta i)=\cos\alpha\,\mathrm{ch}\beta-i\sin\alpha\,\mathrm{sh}\beta$$

پاسخ. (a) $\sin(\cos x)\mathrm{ch}(\sin x)$; (b) $\cos(\cos x)\mathrm{sh}(\sin x)$;

(c) $\cos(\cos x)\mathrm{ch}(\sin x)$; (d) $\sin(\cos x)\mathrm{sh}(\sin x)$

۳) مجموع این رشته‌ها را پیدا کنید:

---

*) علامت‌گذارهای شمارهٔ قبل را حفظ کرده‌ایم.

(a) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n(n+1)}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$;

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2-1}$; (d) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n^2-1}$;

(e) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2-1}\cos nx$; (f) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2-1}\sin nx$;

(g) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{(n+1)(n+2)}$; (h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{(n+1)(n+2)}$

(a) و (b). حل. رشتهٔ متناظر این حالت‌ها

$$\varphi(z)=1+\frac{z}{1\cdot 2}+\frac{z^2}{2\cdot 3}+\frac{z^3}{3\cdot 4}+\cdots$$

به‌طور مستقیم، ما را به‌یك تابع مقدماتی نمی‌رساند، ولی اگراز برابری واضح

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

استفاده کنیم، می‌توان رشته را به‌این صورت نوشت:

$$1+\left\{z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots\right\}+\left\{-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\frac{z^3}{4}+\cdots\right\}$$

بنابراین، با به‌یادآوردن رشتهٔ لگاریتمی [۴۵۹]، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\varphi(z)=1+\ln(1+z)+\frac{1}{z}[\ln(1+z)-z]=\left(1+\frac{1}{z}\right)\ln(1+z)$$

اکنون قرار می‌دهیم: $z=e^{ix}=\cos x+i\sin x$. داریم:

$$1+z=(1+\cos x)+i\sin x=2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)$$

به‌نحوی که (برای $0<x<\pi$)، مدول این عبارت برابر $2\cos\frac{x}{2}$ و آوندآن برابر $\frac{x}{2}$ است، و

$$\ln(1+z)=\ln 2\cos\frac{x}{2}+i\frac{x}{2}$$

در نتیجه

$$\varphi(e^{ix})=[(1+\cos x)+i\sin x]\cdot\left[\ln 2\cos\frac{x}{2}+i\frac{x}{2}\right]$$

بنابراین، برای $0<x<\pi^2$ داریم:

$$f(x)=(1+\cos x)\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}x\sin x,$$

$$g(x)=\frac{1}{2}x(1+\cos x)-\sin x\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$$

(c) تا (h). راهنمایی. دراین حالت‌ها، به‌ترتیب، از اتحادهای زیر استفاده کنید:

$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right),\quad \frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

و بعد، به‌رشتهٔ لگاریتمی منجر کنید.

پاسخ. (g) $(\cos x+\cos 2x)\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x)-\cos x$,

(h) $(\sin x+\sin 2x)\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}(\cos x+\cos 2x)-\sin x$

دربارهٔ (c) تا (f)، با ۶۹۰، (۲) مقایسه کنید.

۴) مجموع این رشته را به‌دست آورید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{n}$$

راهنمائی. $\varphi(z)=\frac{1}{z}\ln(1+z^2)$.

پاسخ: با محدود شدن در بازهٔ $0\leqslant x\leqslant\pi$ داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x\ln(2\cos x)+x\sin x & \left(0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \cos x\ln 2|\cos x|+(x-\pi)\sin x & \left(\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\right)\end{cases}$$

۵) مجموع این رشته‌ها را به‌دست آورید:

$$\text{(a)}\ \frac{\cos ۲x}{۱\cdot۲}+\frac{\cos ۳x}{۲\cdot۳}+\frac{\cos ۴x}{۳\cdot۴}+\dots,$$

$$\text{(b)}\ \frac{\cos ۲x}{۱\cdot۲\cdot۳}+\frac{\cos ۳x}{۲\cdot۳\cdot۴}+\frac{\cos ۴x}{۳\cdot۴\cdot۵}+\dots$$

راهنمائی. از تجزیهٔ کسرهای

$$\frac{۱}{(n-۱)n}\ \text{و}\ \frac{۱}{(n-۱)n(n+۱)}$$

به «کسرهای ساده» استفاده کنید؛ کار منجر به $\ln\frac{۱}{۱-z}$ می‌شود.

پاسخ. $$\text{(a)}\ (۱-\cos x)\ln\left(۲\sin\frac{x}{۲}\right)-\frac{\pi-x}{۲}\sin x+\cos x,$$

$$\text{(b)}\ (۱-\cos x)\ln\left(۲\sin\frac{x}{۲}\right)+\frac{۳}{۴}\cos x-\frac{۱}{۲}$$

درهردوحالت، برای $۰<x<۲\pi$.

۶) مجموع هریك ازاین رشته‌ها را پیداکنید:

$$\text{(a)}\ \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{\cos(۲n-۱)x}{۲n-۱},\quad \text{(b)}\ \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{\sin(۲n-۱)x}{۲n-۱},$$

$$\text{(c)}\ \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{\cos(۲n-۱)x}{(۲n-۱)۲n}$$

(a) و (b). حل. با تشکیل رشتهٔ

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{z^{۲n-۱}}{۲n-۱}$$

متوجه بسط آرك تانژانت درآن می‌شویم:

$$\operatorname{arc\,tg} z=\frac{۱}{۲i}\ln\frac{۱+zi}{۱-zi}$$

که برای $|z|\leqslant ۱$، به‌استثنای $z=\pm i$ برقرار است [۴۵۹].

فرض می‌کنیم: $z=e^{ix}$ و آن را به‌بازهٔ $0\leqslant x\leqslant\pi\ \left(x\neq\frac{\pi}{2}\right)$ محدود می‌کنیم.

داریم:

$$\frac{1+zi}{1-zi}=i\frac{\cos x}{1+\sin x}=i\,tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

به‌نحوی که، مدول آن، برابر $\left|tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|$ و آرگومان آن برای $x<\frac{\pi}{2}$ برابر $+\frac{\pi}{2}$ و برای $x>\frac{\pi}{2}$ برابر $-\frac{\pi}{2}$ است. بنابراین

$$\ln\frac{1+zi}{1-zi}=\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|\pm\frac{\pi}{2}i$$

و

$$\operatorname{arc}\,tgz=\pm\frac{\pi}{4}+i\cdot\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|$$

به‌این‌ترتیب:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4} & \left(0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\right)\\[2ex] -\dfrac{\pi}{4} & \left(\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\right)\end{cases}$$

و برای همان مقدارهای x

$$g(x)=\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|=\frac{1}{4}\ln tg^{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

(c) راهنمائی. نتیجه‌ای راکه هم‌اکنون به‌دست آوردیم، با نتیجهٔ تمرین ۴) توأم کنید، به‌دست می‌آید:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(\cos x\ln 2\cos x+x\sin x) & \left(0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\right)\\[2ex] -\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(\cos x\ln 2|\cos x|+(x-\pi)\sin x) & \left(\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\right)\end{cases}$$

۷) مجموع هریك ازاین رشته‌ها را به‌دست آورید:

(a) $\cos x+\frac{1}{2}\frac{\cos 3x}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\cos 5x}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\cos 7x}{7}+\dots;$

(b) $\sin x+\frac{1}{2}\frac{\sin 3x}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin 5x}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\sin 7x}{7}+\dots;$

(c) $\frac{\cos x}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}\frac{\cos 3x}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\cos 5x}{5\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\cos 7x}{7\cdot 8}+\dots;$

(d) $\frac{\sin x}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}\frac{\sin 3x}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin 5x}{5\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\sin 7x}{7\cdot 8}+\dots$

حل. برای حالت‌های (a) و (b):

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}=\operatorname{arcsin} z$$

[۴۵۹]. سپس، برای $0\leqslant x\leqslant\pi$:

$$\operatorname{arcsin} e^{ix}=\operatorname{arcsin}\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}+i\ln(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\sin x})$$

این برابری را، به‌سادگی و به‌این‌ترتیب می‌توان تحقیق کرد که اگر از سمت راست آن سینوس بگیریم، e^{ix} به‌دست می‌آید. درضمن، این عبارت را می‌توان، بی‌هیچ‌زحمتی، با پیداکردن u و v ازمعادله‌های زیر به‌دست آورد:

$$\sin u\operatorname{ch} v=\cos x,\quad \cos u\operatorname{sh} v=\sin x$$

به‌این‌ترتیب:

$$f(x)=\operatorname{arc}\sin\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$$

$$g(x)=\ln(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\sin x})\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$$

برای حالت‌های (c) و (d)، به‌این رشته‌ها می‌رسیم:

$$\frac{z}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^7}{7\cdot 8}+\dots=$$

$$=\left\{z+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^7}{7}+\dots\right\}-$$

$$-\frac{1}{z}\left\{\frac{1}{2}z^2+\frac{1\cdot1}{2\cdot4}z^4+\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}z^6+\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}z^8+\dots\right\}=$$

$$=\operatorname{arc}\sin z+\frac{1}{z}\left(\sqrt{1-z^2}-1\right)$$

[۴۶۰]. ازآن‌جا، برای $0\leqslant x\leqslant\pi$ داریم:

$$f(x)=\operatorname{arc}\sin\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}+\sqrt{2\sin x}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos x,$$

$$g(x)=\ln\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\sin x}\right)-\sqrt{2\sin x}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin x$$

۶۹۵. شکل مختلط رشته‌های فوریه. دوباره تابع دلخواه $f(x)$ را با دورهٔ تناوب 2π وانتگرال‌پذیر مطلق در یک بازهٔ متناهی در نظر می‌گیریم، همراه با رشتهٔ فوریهٔ مربوط به آن.

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos mx+b_m\sin mx \qquad (8)$$

ضریب‌های این رشته، با این دستورها، به‌دست می‌آیند:

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos mu\,du,\quad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\sin mu\,du \qquad (9)$$

$$(m=0,1,2,\dots)\qquad\qquad (m=1,2,\dots)$$

اکنون اگر $\cos mx$ و $\sin mx$ را با مقدارهای آن‌ها برحسب تابع‌نمائی با آرگومان موهومی خالص عوض کنیم [۴۵۷]:

$$\cos mx=\frac{1}{2}(e^{mxi}+e^{-mxi}),$$

$$\sin mx=\frac{1}{2i}(e^{mxi}-e^{-mxi})=\frac{1}{2}(e^{-mxi}-e^{mxi})$$

آن‌وقت، به‌این رشته می‌رسیم:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_m-b_mi)e^{mxi}+\frac{1}{2}(a_m+b_mi)e^{-mxi}$$

که به‌صورتی کوتاه، می‌توان آن را این‌طور نوشت:

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{kxi} \qquad (۱۰)$$

اگر فرض کنیم:

$$c_0=\frac{1}{2}a_0,\ c_m=\frac{1}{2}(a_m-b_m i),\ c_{-m}=\frac{1}{2}(a_m+b_m i) \qquad (۱۱)$$
$$(m=1,2,3,\ldots)$$

به‌نحوی که*

$$c_{-m}=\bar{c}_m \qquad (۱۲)$$

واین، همان شکل مختلط رشتهٔ فوریه از تابع $f(x)$ است.

اگر شرط‌های کافی همگرائی رشتهٔ (۸) به‌تابع $f(x)$ رعایت شود، آن‌گاه، رشتهٔ (۱۰) هم به‌سمت همان مجموع میل می‌کند، تنها بااین شرط که (همان‌طورکه از نحوهٔ به‌دست‌آمدن این رشته معلوم می‌شود)، روند پیداکردن مجموع را، به‌عنوان جست‌وجوی حد مجموع زیر، که به‌طور متقارن تشکیل شده است، به‌ازای $n\to+\infty$، بفهمیم:

$$\sum_{m=-n}^{n}c_m e^{mxi}$$

درضمن، اگر رشته‌های زیر، به‌طور جداگانه، همگرا باشند:

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_m e^{mxi}\ \text{و}\ \sum_{m=1}^{\infty}c_{-m}e^{-mxi}$$

آن‌وقت، حد مزبور، ازجمع مجموع‌های آن‌ها به‌دست می‌آید.

ضریب‌های c_m بسط(۱۰) را، که بادستورهای (۱۱) معین می‌شوند، اگردستورهای اولر ـ فوریه (۹) را ترجیح دهیم، می‌توان به‌صورت زیرنوشت:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)e^{-nui}du \qquad (۱۳)$$
$$(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

این ضریب‌ها را، به‌طور مستقیم هم می‌توان، شبیه ضریب‌های a_m و b_m به‌دست آورد [۶۷۸]، بااین فرض که تابع $f(x)$ را به‌صورت رشتهٔ (۱۰) درنظر بگیریم (مثل این که، به‌جای $\sim$ بتوان $=$ را قرارداد). برای این منظور، دوطرف برابری را در e^{-mxi}ضرب

---

*) به‌یاد بیاوریم که اگر z عددی مختلط باشد، نماد $\bar{z}$، به‌معنای عدد مزدوج آن است.

می‌کنیم و، سپس، از $\pi-$ تا π انتگرال می‌گیریم؛ درضمن در سمت راست، انتگرال را جمله‌به‌جمله محاسبه می‌کنیم.

اگر با تابعی مختلط سروکار داشته باشیم:

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x)$$

که در آن، f_1 و f_2، تابع‌هایی حقیقی از گونهٔ مورد بررسی هستند، آن‌وقت، طبیعی است که رشتهٔ فوریهٔ تابع f را، مجموع صوری رشته‌های فوریه از تابع‌های f_1 و f_2 بگیریم که، البته، دومی را باید از قبل، جمله‌به‌جمله در i ضرب کرد. درشکل مختلط رشتهٔ فوریهٔ تابع f، به‌صورت (۱۰) درمی‌آید وضریب‌های c_n آن با دستورهای (۱۳) بیان‌می‌شوند. [البته، درحالت کلی، نمی‌توان حکم کرد که ضریب‌های c_m و c_{-m} مزدوج یکدیگرند.]

گاهی، بسط تابع به‌رشتهٔ فوریه، به‌طورطبیعی ومستقیماً، به‌صورت مختلط‌درمی‌آید. به‌عنوان مثال، می‌توانیم از تابعی نام ببریم که تابع بسل را به‌وجود می‌آورد و، همچنین بسط آن را به‌یاد بیاوریم [۳۹۵، ۱۴]:

$$e^{\frac{a}{2}(z-z^{-1})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(a)z^n$$

به‌سادگی دیده می‌شود که، این بسط، برای همهٔ مقدارهای مختلط $z\neq 0$، برقرار است. اگر دراین‌جا $z=e^{ix}$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$e^{ai\sin x}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(a)e^{nxi} \qquad (۱۴)$$

تابع مختلط

$$e^{ai\sin x}=\cos(a\sin x)+i\sin(a\sin x) \qquad (۱۵)$$

بسط به‌رشته‌ای از نوع (۱۰) است که نسبت به x (بنا به‌ویژگی رشته‌های توانی) به‌طور یکنواخت متقارب* و، بنابراین، به‌روشنی، رشتهٔ فوریه است.

به‌خاطر می‌آوریم که

$$J_{-m}(a)=(-1)^mJ_m(a)$$

[۳۹۵، ۱۴] وبسط حاصل را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

---

*) نظرما به‌این رشته‌هاست، $\sum_{n=0}^{\infty}$ و $\sum_{n=-1}^{-\infty}$.

$$J_0(a)+\sum_{m=1}^{\infty}J_m(a)[e^{mxi}+(-1)^m e^{-mxi}]=$$

$$=J_0(a)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(a)\cos 2kx+2i\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k-1}(a)\sin(2k-1)x \qquad (16)$$

اگر به‌طور جداگانه، بخش‌های حقیقی و موهومی را، در عبارت‌های (۱۵) و (۱۶) برابر قرار دهیم، آن‌گاه به‌این بسط جالب می‌رسیم:

$$\cos(a\sin x)=J_0(a)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(a)\cos 2kx,$$

$$\sin(a\sin x)=2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k-1}(a)\sin(2k-1)x$$

اگر x را به $x+\frac{\pi}{2}$ تبدیل کنیم، دوبسط دیگررا به‌دست می‌آوریم:

$$\cos(a\cos x)=J_0(a)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(a)\cos 2kx,$$

$$\sin(a\cos x)=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}J_{2k-1}(a)\cos(2k-1)x$$

بالاخره، اگر برای محاسبهٔ ضریب‌های بسط (۱۴)، از دستورهای (۱۳) استفاده کنیم، به‌عبارت‌های آشنای انتگرالی، برای تابع‌های بسل می‌رسیم:

$$J_n(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(a\sin x-nx)i}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(a\sin x-nx)dx$$

که بارها، با آن برخورد داشته‌ایم.

۶۹۶. رشته‌های مزدوج. رشتهٔ مثلثاتی

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos mx+b_m\sin mx \qquad (17)$$

با ضریب‌های حقیقی دلخواه را، می‌توان به‌طور صوری*، به‌عنوان بخش حقیقی این رشته توانی درنظر گرفت:

---

*) می‌گوییم به‌طور صوری، زیرا از همگرایی این رشته‌ها، اطلاعی نداریم.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m-b_m i)z^m \qquad (۱۸)$$

که برحسب توان‌های متغیر مختلط z، بسط داده شده است (به‌ازای $z=e^{xi}$). درواقع، دراین‌صورت

$$z^m=e^{mxi}=\cos mx+i\sin mx;$$

$$(a_m-b_m i)z^m=(a_m\cos mx+b_m\sin mx)+i(-b_m\cos mx+a_m\sin mx)$$

بخش موهومی هم، به‌طور صوری، این رشته را می‌دهد:

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-b_m\cos mx+a_m\sin mx) \qquad (۱۹)$$

رشتهٔ (۱۹) را، مزدوج رشتهٔ (۱۷) گویند.

برای ما دراین‌جا، رشته‌ای جالب است که مزدوج رشته فوریه ازیك تابع $f(x)$ (که دورهٔ تناوبی برابر 2π دارد و انتگرال‌پذیر مطلق است) باشد. به‌خصوص، می‌توان، درکنار پرسش مربوط به‌همگرائی خود رشتهٔ فوریهٔ (۱۷)، پرسش مربوط به‌همگرائی رشتهٔ مزدوج آن راهم طرح کرد. درضمن، درحالت اخیر، دشواری اضافی دراین‌جاست که، ازقبل، روشن نیست، چه‌مجموعی به‌طور طبیعی درانتظار مزدوج رشته است.

مثل مورد شمارهٔ ۶۹۱، از تشکیل عبارتی مناسب برای مجموع جزئی $\tilde{s}_n(x_0)$ رشتهٔ (۱۹)، به‌ازای $x=x_0$، آغازمی کنیم. به‌جای ضریب‌های a_0، a_1، b_1، ...، a_m، b_m، ...، عبارت‌های انتگرالی آن‌هارا درنظرمی گیریم [(۹) را ببینید] و به‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$\tilde{s}_n(x_0)=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)[-\sin mu\cos mx_0+\cos mu\sin mx_0]\,du=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\sum_{m=1}^{n}\sin m(u-x_0)\,du$$

اگرمجموع زیرانتگرال را، با توجه به‌رابطهٔ

$$\sum_{m=1}^{n}\sin mt=\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

تبدیل کنیم، عبارت $\tilde{s}_n(x_0)$ به‌این صورت درمی آید:

$$s_n(x_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{\cos\frac{1}{2}(u-x_0)-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x_0)}{\sin\frac{1}{2}(u-x_0)}$$

این انتگرال، شبیه انتگرال دیریکله است.

اگر به‌بازهٔ $[x_0-\pi, x_0+\pi]$ برویم و ازتبدیل $u-x_0=t$، مثل شمارهٔ ۶۸۱، استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\tilde{s}_n(x_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\,\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\psi(t)\,\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt \qquad (20)$$

که برای سادگی‌کار فرض کرده‌ایم:

$$\psi(t)=f(x_0+t)-f(x_0-t) \qquad (21)$$

اگر فرض کنیم، انتگرال

$$\tilde{S}_0=-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\psi(t)}{tg\frac{1}{2}t}\,dt \qquad (22)$$

متقارب است، ولو به‌طور غیرمطلق، آن‌وقت می‌توان نوشت:

$$\tilde{s}_n(x_0)-\tilde{S}_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\psi(t)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

اکنون، کوشش می‌کنیم ثابت کنیم، انتگرال اخیر، به‌ازای $n\to+\infty$، به‌سمت صفرمیل می‌کند که، دراین‌صورت، $\tilde{S}_0$، مجموع رشتهٔ (۱۹) خواهدشد. به‌شرط کافی، باتوجه به‌معیار دینی دراین مورد، اکتفا می‌کنیم [۶۸۴]:

رشتهٔ مزدوج، برای رشتهٔ فوریهٔ تابع $f(x)$، وقتی در نقطهٔ $x=x_0$ به‌سمت مجموع

$\tilde{S}_0$ میل می‌کندکه انتگرال

$$\int_0^h \frac{|\psi(t)|}{t}dt \quad (h>0)$$

وجود داشته باشد.

با توجه به‌این‌که

$$\frac{\psi(t)}{2\,tg\frac{1}{2}t} = \frac{\psi(t)}{t}\cdot\frac{\frac{1}{2}t}{tg\frac{1}{2}t}$$

ازفرضی‌که داشتیم، حتی‌تقارب مطلق انتگرال (۲۲) نتیجه می‌شود. به‌همین‌ترتیب، تقارب مطلق انتگرال

$$\int_0^\pi \frac{\psi(t)}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

هم ثابت می‌شود و ازآن‌جا، براساس پیش‌قضیهٔ شمارهٔ **۶۸۲**، نتیجه می‌شود $\tilde{S}_n(x_0) - \tilde{S}_0 \to 0$؛ چیزی‌که می‌خواستیم ثابت کنیم.

به‌روشنی معلوم است‌که‌کافی است شرط وجود هریك از انتگرال‌های

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0)|}{t}\,dt, \quad \int_0^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0)|}{t}\,dt$$

یا فرض خاص‌تر برقراربودن شرط‌های لیپ‌شیتس را درنظر بگیریم:

$$|f(x_0\pm t)-f(x_0)| \leqslant Ct^\alpha \quad (0<\alpha\leqslant 1)$$

یادآوری می‌کنیم، همهٔ این‌شرط‌ها، پیوستگی تابع $f(x)$ درنقطهٔ x_0، یا دست‌کم، انطباق حدهای $f(x_0\pm 0)$ را ایجاب می‌کنند. درضمن، درحالت‌کلی، می‌توان ثابت کردکه درحالت وجود جهش درتابع $f(x)$ درنقطهٔ مورد بررسی x_0، یعنی باشرط

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)\gtrless 0$$

رشتهٔ مزدوج (۱۹) دراین‌نقطه، به‌روشنی، واگرا می‌شود*، به‌نحوی‌که پیوستگی تابع

*) همچنین، روشن است‌که انتگرال (۲۲) هم، واگرا می‌شود.

$f(x)$ در نقطهٔ x_0، امری لازم است. دراین مورد، تفاوت جالبی بین موقعیت‌های دورشتهٔ (۱۷) و (۱۹) وجود دارد: مگر نه‌این است که، برای رشتهٔ (۱۷)، وجود جهش، به‌خودی خود، مانعی در برابر همگرائی نیست.

دراین‌جا، لزومی نمی‌بینیم، رشته‌های مزدوج رشته‌های فوریه را، با تفصیل بیشتری بررسی کنیم.

۶۹۷. رشته‌های فوریهٔ تکراری. رشته‌های فوریه را، برای تابع‌های با چند متغیر هم، می‌توان مورد مطالعه قرار داد. بـرای این‌که تصوری در این‌باره داشته باشیم، کافی است تنها به‌حالت تابع‌های با دو متغیر بپردازیم.

فرض کنید، تابع $f(x, y)$، بـرای همهٔ مقدارهای حقیقی x و y مفـروض باشد. تابع را، هم نسبت به x وهـم نسبت به y، با دورهٔ تناوب 2π درنظـر می‌گیریم وفرض می‌کنیم (به‌معنای ویژه یا ناویژه)، درمربع زیرانتگرال‌پذیر باشد:

$$(Q)=[-\pi, \pi; -\pi, \pi]$$

با توجه به‌بسط (۱۰)، رشتهٔ دوگانهٔ

$$f(x, y)\sim \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \gamma_{n,m} e^{(nx+my)i} \qquad (۲۳)$$

را برای آن می‌نویسیم، کـه در آن، ضریب‌هـای $\gamma_{\nu,\mu}$، با دستورهایی شبیه (۱۳) معیـن می‌شوند:

$$\gamma_{\nu,\mu}=\frac{1}{4\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x, y)e^{-(\nu x+\mu y)i}\,dxdy$$
$$(\nu,\mu=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

و این، عبارت است از رشتهٔ فوریه برای تابع $f(x, y)$ در شکل مختلط آن. ضریب‌های آن را می‌توان با روش معمولی به‌دست آورد، به‌شرطی‌که علامت $\sim$ را به $=$ تبدیل و دوطرف «برابری» را در $e^{-(nx+my)i}$ ضرب کنیم و، سپس، نسبت به‌مربع (Q) انتگرال بگیریم (این انتگرال‌گیری، برای رشته، جمله به‌جمله انجام می‌گیرد).

رشتهٔ فوریه، درشکل حقیقی‌خود، این‌بار، به‌اندازهٔ کافی بزرگ می‌شود. اگر به‌رشتهٔ مختلط، جمله‌های مزدوج را پیوند دهیم، به‌دست می‌آید:

$$f(x, y)\sim \sum_{n,m=0}^{\infty}[a_{n,m}\cos nx\cos my+b_{n,m}\cos nx\sin my+$$
$$+c_{n,m}\sin nx\cos my+d_{n,m}\sin nx\sin my] \qquad (۲۴)$$

که در آن:

$$a_{0,0}=\frac{1}{4\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x,y)dxdy,$$

$$a_{n,0}=\frac{1}{2\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x,y)\cos nx\,dxdy;$$
$$(n=1,2,3,\ldots)$$

$$a_{0,m}=\frac{1}{2\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x,y)\cos my\,dxdy;$$
$$(m=1,2,3,\ldots)$$

$$b_{0,m}=\frac{1}{2\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x,y)\sin mx\,dxdx;$$
$$(m=1,2,3,\ldots)$$

$$c_{n,0}=\frac{1}{2\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x,y)\sin nx\,dxdy;$$
$$(n=1,2,3,\ldots)$$

و بالاخره، برای $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{cases} a_{n,m}=\dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int\int_{(Q)} f(x,y)\cos nx\cos my\,dxdy, \\ b_{n,m}=\dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int\int_{(Q)} f(x,y)\cos nx\sin my\,dxdy, \\ c_{n,m}=\dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int\int_{(Q)} f(x,y)\sin nx\cos my\,dxdy, \\ d_{n,m}=\dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int\int_{(Q)} f(x,y)\sin nx\sin my\,dxdy \end{cases} \qquad (25)$$

درضمن، رشتهٔ (۲۴) را، معمولاً، به‌این صورت می‌نویسند:

$$f(x,y)\sim\sum_{n,m=0}^{\infty}\lambda_{n,m}[a_{n,m}\cos nx\cos my+b_{n,m}\cos nx\sin my+$$
$$+c_{n,m}\sin nx\cos my+d_{n,m}\sin nx\sin my] \qquad (24^*)$$

ضریب $\lambda_{n,m}$، درحالت $n=m=0$، برابر یك چهارم، درحالتی که از n و m تنها یکی برابرصفر باشد برابر یـك‌دوم و درحالتی که هیچ کـدام ازآن‌ها صفرنباشند، برابر واحد است. بنابراین، همهٔ ضریب‌های $a_{n,m}$، $b_{n,m}$، $c_{n,m}$ و $d_{n,m}$ بـا دستورهای (۲۵) به‌دست می‌آیند.

مسأله مربوط به‌همگرائی رشته (۲۴) [یا (۲۴*)] از طریق بررسی مجموع جزئی آن، $S_{n,m}(x_0, y_0)$، حل می‌شود، که برای آن، می‌توان عبارتی انتگرالی، شبیه انتگرال دیریکله، به‌دست آورد:

$$S_{n,m}(x_0, y_0)=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x_0+u, y_0+v)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\sin\left(m+\frac{1}{\pi}\right)v}{\sin\frac{1}{2}u\sin\frac{1}{2}v}\,dudv$$

که مـا به‌آن نمی‌پردازیم. تنها یادآوری می‌کنیم کـه، تابع $f(x, y)$، به‌شرطی در نقطهٔ (x_0, y_0) به‌رشتهٔ فوریه بسط داده می‌شود کـه این شرط‌ها برقرار باشند: ۱) مشتق‌های نسبی f'_x و f'_y درهمه‌جا وجود داشته باشند ومحدود باشند، ۲) درهمسایگی نقطهٔ‌مفروض مشتق دوم f''_{xy} (یا f''_{yx}) وجود داشته باشد ودر نقطهٔ مفروض پیوسته باشد.

§۴. خصلت همگرائی دررشته‌های فوریه

۶۹۸. برخی اضافه‌ها درمورد پیش‌قضیه‌های اصلی. بـا بررسی خصلت همگرائی دررشته‌های فوریه،ابتدا، به‌شرط‌های‌کافی برای‌همگرائی یکنواخت‌این رشته‌هامی‌پردازیم.

برای این منظور،لازم است، قبل ازهرچیز، اضافه‌ای برای پیش‌قضیهٔ اساسی‌شمارهٔ **۶۸۲** بیاوریم. با درنظرگرفتن انتگرال‌های با پارامترهای مختلف،کـه درآن‌جا بررسی می‌کردیم، اکنـون به‌میل یکنواخت انتگرال‌ها، به‌سمت صفـر، نسبت به‌این پارامترهـا، می‌پردازیم.

۱°. تابع $g(t)$ را معین و انتگرال‌پـذیر مطلق، دربازهٔ $[A, B]$، می‌گیریم؛ دراین صورت، هردو انتگرال

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt,\quad \int_a^b g(t)\cos pt\,dt$$

وقتی $p\to+\infty$، به‌طور یکنواخت، نسبت به‌متغیرهای a و b که مقدارهای دلخواهی

را در بازهٔ $[A, B]$ اختیار می‌کنند، به‌سمت صفر میل می‌کنند.

کافی است تنها انتگرال اول را مورد مطالعه قرار دهیم. با توجه به پیوستگی یکنواخت تابع

$$\int_A^t |g(t)|\,dt$$

می‌توان، ازروی $\varepsilon > 0$ مفروض، بازهٔ $[A, B]$ را با نقطه‌های

$$A=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_i<\tau_{i+1}<\cdots<\tau_n=B$$

به‌چنان بخش‌های کوچکی تقسیم کرد که داشته باشیم:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |g(t)|dt<\varepsilon \quad (i=0, 1, \ldots, n-1)$$

درمورد انتگرال‌های به‌صورت

$$\int_{\tau_i}^{\tau_j} g(t)\sin pt\,dt \qquad (1)$$

$$(i,j=0,1,2,\ldots,n)$$

به‌دلیل محدودبودن تعداد آن‌ها، می‌توان $\Delta > 0$ را، به‌طور کلی، طوری درنظر گرفت که، برای $p>\Delta$، همهٔ آن‌ها ازلحاظ قدرمطلق، کوچکتر از ε باشند. ولی به‌سادگی دیده می‌شود که انتگرال

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt$$

برای هرمقدار a و b، با هریك‌از انتگرال‌های (۱)، برای هرمقدار p، کمتراز 2ε اختلاف دارد. بنابراین، به‌ازای $p>\Delta$، بدون بستگی به a و b، از لحاظ قدرمطلق کوچکتر از ε است. واین، همان چیزی است که اثبات آن لازم بود.

۲°. حتی می‌توان گفت که انتگرال‌های

$$\int_a^b g(x\pm t)\sin pt\,dt, \qquad \int_a^b g(x\pm t)\cos pt\,dt$$

هم، به‌ازای $p \to \infty$، نسبت به‌متغیرهای a، b و x، به‌طور یکنواخت به‌سمت صفر میل

می‌کنند، به‌شرطی که داشته باشیم:

$$A \leqslant x \pm a,\ x \pm b \leqslant B$$

درواقع، مثلاً برای اولی، می‌توان فرض کرد:

$$x \pm t = u$$

وآن را به‌این صورت نشان داد:

$$\int_{x\pm a}^{x\pm b} g(u)\sin p(u-x)du =$$

$$= \cos px \int_{x\pm a}^{x\pm b} g(u)\sin pudu - \sin px \int_{x\pm a}^{x\pm b} g(u)\cos pudu$$

به‌نحوی که، مساله، منجر به‌حالت قبل (۱°) می‌شود.

۳°. سرانجام، اگر ضریب دلخواه $\gamma(t)$ را بـا تغییر محـدود در $[A, B]$، در عبارت زیر رادیکال وارد کنیم، آن‌گاه انتگرال‌های

$$\int_a^b g(x \pm t)\gamma(t)\sin pt\,dt,\quad \int_a^b (x \pm t)\gamma(t)\cos pt\,dt$$

هم، به‌ازای $p \to \infty$ به‌طور یکنواخت به‌سمت صفر میل می‌کند.

چون $\gamma(t)$ را می‌توان به‌صورت تفاضل دو تابع صعودی یکنـوا نوشت، بنابراین کافی است خود $\gamma(t)$ را صعودی درنظـر بگیریم. درچنین حالتی، بنابرقضیهٔ دوم مربوط به‌میانگین [۳۰۶]

$$\int_a^b g(x \pm t)\gamma(t)\sin pt\,dt =$$

$$= \gamma(a)\int_a^{\tau} g(x \pm t)\sin pt\,dt + \gamma(b)\int_{\tau}^b g(x \pm t)\cos pt\,dt$$

$$(a \leqslant \tau \leqslant b)$$

که با توجه به‌کران‌دار بودن تابع $\gamma(t)$، دراین‌جا هم، منجر به‌حالت ۲° می‌شود.

اکنون به‌سراغ پیش‌قضیهٔ اساسی دوم [شمارهٔ ۶۸۵] می‌رویم وآن را بـا ملاحظهٔ زیر، تکمیل می‌کنیم.

۴°. تابع $g(t)$ در بازهٔ $[A, B]$ که شامل بازهٔ $[a, b]$ در درون خودش است، پیوسته

و به‌طور یکنوا صعودی است. ثابت کنید انتگرال

$$\int_0^h g(x\pm t)\frac{\sin pt}{t}\,dt$$

(که در آن: $0<h\leqslant a-A$ و $B-b$) به‌ازای $p\to+\infty$، نسبت به x به‌طور یکنواخت در بازهٔ $[a, b]$ به‌سمت $\frac{\pi}{2}g(x)$ میل می‌کند.

به‌تقریب، از همان روش اثباتی پیروی می‌کنیم که در شمارهٔ **۶۸۵** داشتیم. نخستین انتگرال (۱۳) در شمارهٔ **۶۸۵**، که حالا به‌این صورت نوشته می‌شود:

$$g(x)\int_0^h \frac{\sin pt}{t}\,dt = g(x)\int_0^{ph}\frac{\sin z}{z}\,dz$$

با توجه به‌کران‌دار بودن $g(x)$، به‌طور یکنواخت نسبت به x، در بازهٔ $[a, b]$، به‌سمت حد $\frac{\pi}{2}g(x)$ میل می‌کند. از طرف دیگر، پیوستگی یکنواخت تابع $g(x)$ در $[A, B]$، این امکان را به‌ما می‌دهد که، به‌ازای $\varepsilon>0$ مفروض، عدد $\delta>0$ را مستقل از x و متغیر درمحدودهٔ از a تا b، چنان اختیار کنیم که داشته باشیم:

$$|g(x\pm t)-g(x)|<\varepsilon \quad (0<t\leqslant\delta)$$

دومین انتگرال (۱۳) از شماره **۶۸۵** را، مثل همان‌جا، به‌مجموع I_1+I_2 تقسیم می‌کنیم، به‌برآورد (۱۴) می‌رسیم که نه‌تنها به p، بلکه به x هم بستگی ندارد. انتگرال I_2، با توجه ۳°، به‌طور یکنواخت نسبت به x، به‌سمت صفر میل می‌کند. به‌این‌ترتیب، درمجموع، به‌همان نتیجهٔ دلخواه می‌رسیم.

۶۹۹. معیارهای تقارب یکنواخت در رشته‌های فوریه. اکنون دیگر به سادگی می‌توان به‌معیارهایی دست یافت که به‌کمك آن‌ها بتوان دربارهٔ تقارب یکنواخت رشتهٔ فوریه به‌سمت خود تابع $f(x)$، در بازه‌ای مثل $[a, b]$، داوری کرد. طبیعی است که، این تابع را، دربازهٔ موردنظر، پیوسته بگیریم [**۴۳۱** را ببینید]. ابتدا این معیار تغییریافته‌را تنظیم می‌کنیم:

معیار دینی. رشتهٔ فوریهٔ تابع $f(x)$ پیوسته در بازهٔ $[a, b]$، در این بازه به‌طور یکنواخت به‌سمت $f(x)$ میل می‌کند، اگر برای $h>0$ مفروض، برای همهٔ xها از $[a, b]$، انتگرال

$$\int_a^h \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt \qquad (۲)$$

هم (به‌ازای $t=۰$) به‌طور یکنواخت نسبت به x، به‌سمت $f(x)$ میل کند.

به‌یاد بیاوریم که در این حالت

$$\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-۲f(x)$$

$$s_n(x)-f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_۰^\pi \varphi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)t}{۲\sin\frac{۱}{۲}t}\,dt \qquad (۳)$$

با توجه به‌فرض، به‌ازای $\varepsilon>۰$ مفروض، می‌توان عدد $\delta>۰$ مستقل از x را طوری پیدا کرد که برای همهٔ xها از $[a, b]$ داشته باشیم:

$$\int_۰^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt<\varepsilon$$

بنابراین، انتگرال (۳)، به‌صورت مجموع $\frac{۱}{\pi}\int_۰^\delta+\frac{۱}{\pi}\int_\delta^\pi$ درمی‌آید. در ضمن روشن است که، هرچه باشد n، به‌طور هم‌زمان برای همه مقدارهای x داریم*:

$$\left|\frac{۱}{\pi}\int_۰^\delta \varphi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)t}{۲\sin\frac{۱}{۲}t}\,dt\right|\leqslant\frac{۱}{\pi}\int_۰^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}\cdot\frac{\frac{۱}{۲}t}{\sin\frac{۱}{۲}t}\,dt<$$

$$<\frac{۱}{۲}\int_۰^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt<\frac{\varepsilon}{۲}$$

با برگشت به‌انتگرال

$$\frac{۱}{\pi}\int_\delta^\pi \varphi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)t}{۲\sin\frac{۱}{۲}t}\,dt \qquad (۴)$$

---

*) ازاین نابرابری استفاده کرده‌ایم،

$$\sin z>\frac{۲}{\pi}z\quad\left(۰<z<\frac{\pi}{۲}\right)$$

می‌بینیم که انتگرال

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} f(x\pm t)\cdot\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

با توجه به ۳° از شمارهٔ قبل، به‌ازای $n\to\infty$، به‌طور یکنواخت نسبت به x، به‌سمت صفرمیل می‌کند. همین موضوع، دربارهٔ انتگرال

$$\frac{1}{\pi}f(x)\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

هم با توجه به کران‌داربودن تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a, b]$ ، درست است. بنابراین شمارهٔ N را، مستقل از x می‌توان پیدا کرد، به‌نحوی که برای $n>N$، انتگرال (۳) هم، از لحاظ قدرمطلق، کوچکتر از ε باشد. (هرچه باشد x از $[a, b]$). و به‌این‌ترتیب، آن‌چه‌لازم بود، اثبات شد.

ازاین‌جا، درحالت خاص، نتیجه می‌شود:

معیار لیپ‌شیتس. رشته فوریهٔ تابع $f(x)$، دربازهٔ $[a, b]$، به‌طور یکنواخت به‌سمت تابع $f(x)$ متقارب است، به‌شرطی که دربازهٔ گسترده‌تری مثل $[A, B](A<a<b<B)$، این شرط برقرار باشد:

$$|f(x')-f(x)|\leqslant C|x'-x|^{\alpha}$$

که درآن، x و x'، نقطه‌های دلخواهی از $[A, B]$ و C و α، ثابت‌های مثبتی باشند $(\alpha\leqslant 1)$.

درواقع، اگر ازبین عددهای $B-b$ و $A-a$، کوچکترین آن‌ها را h بنامیم، آن‌وقت انتگرال (۲)، به‌ازای همهٔ xها در $[a, b]$، با انتگرال متقارب زیر محدود می‌شود:

$$\int_{0}^{h}\frac{2C}{t^{1-\alpha}}\,dt$$

روشن است که شرط لیپ‌شیتس (برای $\alpha=1$) برقرار است و، بنابراین، تقارب یکنواخت به سمت تابع $f(x)$ دربازهٔ $[a, b]$، وقتی تحقق می‌پذیرد که، تابع $f(x)$، در بازهٔ گسترده‌تری، دارای مشتق متناهی $f'(x)$ باشد.

درضمن، این شرط را می‌توان حالت خاصی از شرط زیردانست:

معیار دیریکله-ژوردان. رشتهٔ فوریهٔ تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، به‌طور یکنواخت به‌سمت این تابع متقارب است، اگر در یک بازهٔ بزرگتر $[A, B]$، تابع $f(x)$ پیوسته و دارای تغییرمتناهی باشد.

بحث شمارهٔ ۶۸۶ را دنبال وانتگرال

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt$$

را به‌صورت مجموع دو انتگرال $\frac{1}{\pi}\int_0^{h}+\frac{1}{\pi}\int_h^{\pi}$ درنظر می‌گیریم که، در آن، عدد مثبت h، کوچکترین عدد از بین عددهای $a-A$ و $B-b$ و مستقل از x در $[a, b]$ است. درمورد دومین انتگرال از این انتگرال‌ها، بلافاصله روشن است که، بنابر ۳°، به‌ازای $n\to\infty$، به‌طور یکنواخت نسبت به x، به‌سمت صفر میل می‌کند. درمورد انتگرال اول هم، با فرض

$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}=\left[\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right]+\frac{1}{t}$$

قبل ازهرکار، این بخش را جدا می‌کنیم:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{h}[f(x+t)+f(x-t)]\left[\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt$$

که آن‌هم، بنابر ۳°، به‌طور یکنواخت به‌سمت صفرمیل می‌کند*.

اکنون باید به‌این انتگرال بپردازیم:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{h}[f(x+t)-f(x-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt$$

چون تابع $f(x)$، در بازهٔ $[A, B]$، به‌صورت تفاضل دوتابع پیوستهٔ صعودی درمی‌آید:

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x)$$

---

*) پاورقی صفحهٔ ۲۳۶۷ را ببینید.

بنابراین، اگر از گزارهٔ ۴° درمورد هریك از آن‌ها استفاده کنیم، قانع می‌شویم که این انتگرال هم، به‌طور یکنواخت، به‌سمت $\frac{۱}{\pi}\cdot\frac{\pi}{۲}۲f(x)$، یعنی $f(x)$ میل می‌کند. و در نتیجه، اثبات به‌پایان می‌رسد.

درحالت خاص، اگر تابع $f(x)$ دربازهٔ $[-\pi, \pi]$ داده شده باشد، به‌نحوی که‌در این بازه، پیوسته و تغییری متناهی داشته باشد و، در ضمن، با شرط

$$f(-\pi)=f(\pi)$$

سازگار باشد، آن‌وقت، رشتهٔ فوریهٔ آن، در تمامی بازه، به‌طور یکنواخت به‌سمت آن میل می‌کند.

برای اثبات، کافی است، با توجه به‌تناوب با دورهٔ ۲π، تابع را در تمامی محور عددی گسترش دهیم و، سپس، فاصلهٔ دلخواهی را که بازهٔ $[-\pi, \pi]$ در درون آن باشد، به‌عنوان بازهٔ $[A, B]$ انتخاب کنیم.

۷۰۰. رفتار رشتهٔ فوریه، در نزدیکی نقطه‌های ناپیوستگی: حالت خاص. بررسی رفتار رشتهٔ فوریهٔ تابع $f(x)$ را درنزدیکی نقطه‌های ناپیوستگی این تابع، با مطالعهٔ رشتهٔ خاصی آغاز می‌کنیم. می‌دانیم که رشتهٔ

$$۲\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲k-۱)x}{۲k-۱}=۲\left(\sin x+\frac{\sin ۳x}{۳}+\frac{\sin ۵x}{۵}+\cdots\right) \qquad (۵)$$

به‌سمت مجموع زیرمتقارب است:

$$\sigma(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{۲} & (۰<x<\pi)\\ ۰ & (x=۰, \pm\pi)\\ -\frac{\pi}{۲} & (-\pi<x<۰)\end{cases}$$

[۶۹۰، ۴) را ببینید]. این تابع، درنقطهٔ $x=۰$، هم ازراست وهم از چپ دارای جهش است:

$$\sigma(+۰)-\sigma(۰)=\frac{\pi}{۲},\quad \sigma(۰)-\sigma(-۰)=\frac{\pi}{۲}$$

رفتار مجموع جزئی رشته را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

$$\sigma_{2n-1}(x)=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x^{*}}{2k-1}$$

که به دلیل فردبودن آن، کافی است این مجموع را تنها در بازهٔ $[0,\pi]$ بررسی کنیم. به‌جز آن، اتحاد روشن

$$\sin(2k-1)\left(\frac{\pi}{2}+x'\right)=\sin(2k-1)\left(\frac{\pi}{2}-x'\right)$$

نشان می‌دهد که، $\sigma_{2n-1}(x)$، نسبت به‌نقطهٔ $x=\frac{\pi}{2}$ متقارن است:

$$\sigma_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}+x'\right)=\sigma_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}-x'\right)$$

واین، به‌معنای آن است که می‌توان بررسی را به‌بازهٔ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ محدود کرد.

برای مجموع $\sigma_{2n-1}(x)$، به‌سادگی، این عبارت به‌دست می‌آید:

$$\sigma_{2n-1}(x)=2\int_{0}^{x}[\cos u+\cos 3u+\cdots+\cos(2n-1)u]du=$$

$$=\int_{0}^{x}\frac{\sin 2nu}{\sin u}du \qquad (6)$$

واگر $2nu=t$ بگیریم:

$$\sigma_{2n-1}(x)=\frac{1}{2n}\int_{0}^{2n\pi}\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2n}}dt \qquad (7)$$

عبارت اخیر را، می‌توان به‌صورت این مجموع نوشت:

$$\sigma_{2n-1}(x)=\frac{1}{2n}\left\{\int_{0}^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}+\cdots+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}+\int_{k\pi}^{2n\pi}\right\}\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2n}}dt \qquad (8)$$

---

*) روشن است که $\sigma_{2n}(x)=\sigma_{2n-1}(x)$.

که در آن $k=E\left(\frac{۲nx}{\pi}\right)$. اگر به‌طور کلی، برای $i=۰,۱,\dots,n-۱$، فرض کنیم:

$$\frac{۱}{۲n}\int_{i\pi}^{(i+۱)\pi}\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{۲n}}dt=(-۱)^i\frac{۱}{۲n}\int_{۰}^{\pi}\frac{\sin z}{\sin\frac{z+i\pi}{۲n}}dz=(-۱)^i v_i$$

آن‌وقت، به‌روشنی داریم:

$$v_i>۰ \quad و \quad v_{i+۱}<v_i \qquad (۹)$$

به‌این ترتیب، سرانجام

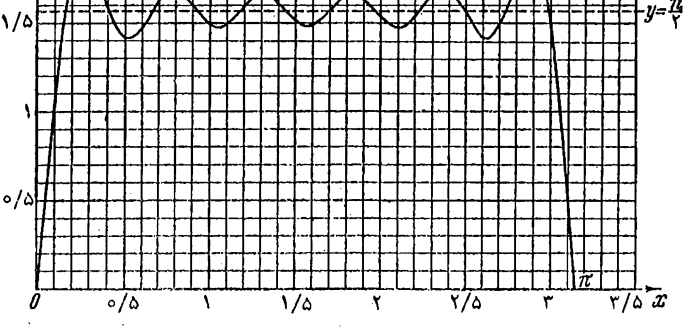
$$\sigma_{۲n-۱}(x)=v_۰-v_۱+\dots+(-۱)^{k-۱}v_{k-۱}+(-۱)^k\tilde{v}_k \qquad (۸^*)$$

که در آن، $(-۱)^k\tilde{v}_k$، معرف «خطای» جملهٔ آخر است؛ این جمله دارای علامت $(-۱)^k$ است و از لحاظ قدرمطلق، کمتر از v_k است.

ازاین‌جا، به‌طور مستقیم، به‌یك رشته نتیجه‌گیری دربارهٔ رفتار مجموع $\sigma_{۲n-۱}(x)$ می‌رسیم، به‌شرطی که n را ثابت و x را متغیر از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ بگیریم:

۱) مجموع $\sigma_{۲n-۱}(x)$ مثبت است و تنها، به‌ازای $x=۰$، برابر صفر می‌شود؛

۲) این مجموع، در نقطه‌های $x_n=\frac{m\pi}{۲n}$ $(m=۱,۲,\dots,n)$ دارای اکسترمم است: وقتی m فرد باشد، ماکزیمم، و وقتی m زوج باشد می‌نیمم. درواقع، تابع $\sigma_{۲n-۱}(x)$، همان‌طور که از (۸^*) روشن است، در بازه $\left[m\frac{\pi}{۲n},(m+۱)\frac{\pi}{۲n}\right]$، وقتی m



شکل ۱۳۳

زوج باشد صعودی ووقتی m فرد باشد نزولی است*.

سرانجام، با توجه به‌مقدار اکسترمم‌ان

$$\sigma_{۲n-۱}(x_m)=v_۰-v_۱+\cdots+(-۱)^m v_m$$

می‌توان، با درنظرگرفتن نابرابری (۹)، به‌این نتیجه رسید که

۳) اگر تغییر x را در محدودهٔ بازهٔ $\left]۰,\frac{\pi}{۲}\right[$ درنظر بگیریم، مقدارهای ماکزیمم $\sigma_{۲n-۱}(x)$ ازچپ به‌راست نزولی و مقدارهای می‌نیمم آن صعودی هستند.

همهٔ این‌ها را می‌توان درشکل ۱۳۳ مشاهده‌کرد؛ در این شکل، نمودار تابع $\sigma_{۱۱}(x)$، به‌عنوان نمونه رسم شده است.

اکنون به‌بزرگترین ماکزیمم تابع $\sigma_{۲n-۱}(x)$، یعنی به‌نخستین ماکزیمم (باآغازاز $x=۰$) توجه می‌کنیم. این مقدار تابع، در نقطهٔ $x_۱^{(n)}=\frac{\pi}{۲n}$ به‌دست می‌آید ومقدار آن چنین است [(۷) را ببینید]:

$$M_۱^{(n)}=\sigma_{۲n-۱}(x_۱^{(n)})=\frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{\pi}\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{۲n}}dt$$

دراین‌جا، شمارهٔ n درعلامت‌گذاری وارد شده است، زیرا این‌بار می‌خواهیم رفتار تابع را، به‌ازای تغییر n، دنبال‌کنیم. روشن است‌که $x_۱^{(n)}$، با صعود n، به‌طور یکنوا، نزولی است، وبه‌ازای $n\longrightarrow\infty$، به‌سمت صفرمیل می‌کند. برای‌این‌که بررسی‌خود $M_۱^{(n)}$ساده‌تر باشد، آن را به‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$M_۱^{(n)}=\int_۰^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,\frac{\frac{t}{۲n}}{\sin\frac{t}{۲n}}\,dt$$

ازآن‌جاکه عامل دوم درعبارت زیرانتگرال، با صعود n، به‌طور یکنواخت (نسبت به t و در ضمن نزولی**) به‌سمت واحد میل می‌کند، بنابراین، $M_۱^{(n)}$ نزولی است و به‌سمت حد

---

*) (حکم ۲) دربارهٔ اکسترمم‌های تابع $\sigma_{۲n-۱}(x)$ را می‌توان به‌سادگی، با بررسی مشتق‌زیر به‌دست آورد [(۶) را ببینید].

$$\frac{d}{dx}\sigma_{۲n-۱}(x)=\frac{\sin ۲nx}{\sin x}$$

**) ازاین حقیقت‌استفاده‌می‌کنیم‌که، تابع $\frac{z}{\sin z}$، وقتی‌z ازه تا $\frac{\pi}{۲}$ صعودکند، صعودی‌است.

زیرمیل می‌کند:

$$\lim_{n\to\infty} M_1^{(n)} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = \mu_1 \qquad (۱۰)$$

به‌این‌ترتیب: ۴) نخستین ماکزیمم (حداکثر) تابع $\sigma_{2n-1}(x)$ به‌ازای $x = x_1^{(n)}$ به‌دست می‌آید که با صعود نامتناهی n، به طور نزولی به‌سمت صفر میل می‌کند و، خود ماکزیمم $M_1^{(n)}$، به‌طور نزولی یکنوا، به‌سمت حد μ که با دستور (۱۰) بیان می‌شود، میل می‌کند.

به‌همین‌گونه می‌توان دربارهٔ kامین اکسترەمم تابع بحث کرد؛ این اکسترەمم به‌ازای مقدار

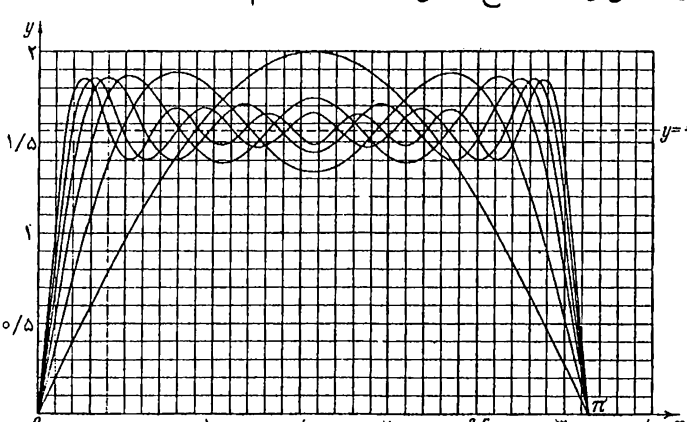
$$x_k^{(n)} = k.\frac{\pi}{2n} \quad (n \geqslant k)$$

به‌دست می‌آید که، به‌ازای $n \to \infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند و، درضمن، خود مقدار اکسترەمم kام، یعنی $M_k^{(n)}$، به‌طور یکنوا، به‌سمت حد

$$\mu_k = \int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

میل می‌کند؛ این میل درحالت ماکزیمم (k، عددی فرد) نزولی و درحالت می‌نیمم (k، عددی زوج) صعودی است.

برای روشن‌ترشدن وضع، شکل ۱۳۴ را داده‌ایم که، در آن، نمودار شش‌مجموع



شکل ۱۳۴

نخستین $\sigma_{۲n-۱}(x)$ ($n=۱،۲،۳،۴،۵،۶$ به‌ازای) با هم مقایسه شده‌اند.

همان‌طور که از بحث ۴۳۹ معلوم است، عدد μ_k، به‌نوبت، گاهی بزرگتر و گاهی کوچکتر است از عدد

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{۲}$$

و تفاضل‌های $\rho_k = \mu_k - \frac{\pi}{۲}$، این مقدارها را دارند.

$$\rho_۱ \doteq ۰/۲۸۱^{*}،\quad \rho_۲ \doteq -۰/۱۵۳،\quad \rho_۳ \doteq ۰/۱۰۴،\quad \rho_۴ \doteq -۰/۰۷۳،$$

$$\rho_۵ \doteq ۰/۰۶۳،\ \ldots \qquad (۱۱)$$

اکنون در وضعی هستیم که می‌توانیم دربارهٔ تقارب مجموع جزئی $\sigma_{۲n-۱}(x)$ از رشتهٔ (۵)، به مجموع آن $\sigma(x)$، توضیح کافی بدهیم؛ برای مشخص بودن وضع، به‌بازهٔ $[۰، \pi]$ اکتفا می‌کنیم.

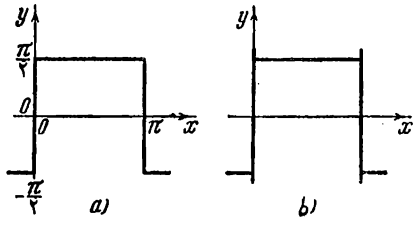
اگر نقطه‌های ناپیوستگی $x=۰$ و $x=\pi$ را با همسایگی‌های به‌قدر کافی کوچک $(۰، \delta)$ و $[\pi-\delta، \pi)$ جدا کنیم، آن‌گاه در بازهٔ باقی‌ماندهٔ $[\delta، \pi-\delta]$، با توجه به آن‌چه در شمارهٔ قبل ثابت کردیم، رشته به‌طور یکنواخت متقارب است. به‌زبان دیگر، نمودارهای مجموع‌های جزئی $\sigma_{۲n-۱}(x)$، برای مقدارهای به‌قدر کافی بزرگ n، در تمامی طول این بازه، به‌قدر دلخواه به‌خط راست $y=\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می‌شوند. در نزدیکی نقطهٔ $x=۰$ (و $x=\pi$) که تابع $\sigma(x)$، با جهش، از مقدار $\frac{\pi}{۲}$ به‌مقدار صفر می‌رود، یکنواختی نزدیک‌شدن از بین می‌رود، زیرا $\sigma_{۲n-۱}(x)$ از مقدارهای نزدیک به $\frac{\pi}{۲}$ به‌ازای $x=\delta$ (یا $\pi-\delta$)، به‌طور پیوسته، به‌مقدار ۰ به‌ازای $x=۰$ (یا $x=\pi$) می‌رود.

توجه خواننده را به‌این نکتهٔ بسیار مهم جلب می‌کنیم که، از بین رفتن یکنواختی با آن‌چه در این‌جا گفته شد، تمام نمی‌شود. در نزدیکی مستقیم محور y و در سمت راست آن، قبل از آن که به‌سرعت به‌سمت مبداء $(۰، ۰)$ میل کند، نمودار تابع $\sigma_{۲n-۱}(x)$ دور خط راست $y=\frac{\pi}{۲}$ نوسان می‌کند، درضمن «دامنهٔ» این نوسان‌ها به‌هیچ‌وجه تمایلی به‌این ندارد

---

*) با ۴۱۲، ۴) مقایسه کنید.

که، به‌ازای $n \to \infty$، بی‌نهایت کوچک بشود. برعکس، همان‌طور که دیدیم، ارتفاع نخستین و بلندترین «کوهان»، نسبت به خط راست مذکور، به‌سمت مقدار $\rho_1 = ۰/۲۸۱$ میل می‌کند؛ به‌دنبال برآمدگی اول، با حرکت از راست به‌چپ، با صعود n و با نزدیک‌شدن محور y، با فرورفتگی‌ها و برآمدگی‌های بعدی مواجه می‌شویم، در ضمن، فاصلهٔ راس‌های آن‌ها از خط راست $y = \frac{\pi}{۲}$، وقتی $n \to \infty$، به‌ترتیب به‌سمت مقدارهای بعدی $\rho_۲$، $\rho_۳$، ... از رشتهٔ (۱۱) میل می‌کنند. همین وضع در نزدیکی خط راست $x = \pi$ درسمت چپ وجود دارد. درست همین وضع در نزدیکی محور y درسمت چپ، دوباره با همان منظره تکرار می‌شود، تنها با این تفاوت که همهٔ مقدارهای مورد نظر با علامت مخالف به‌دست می‌آیند.



شکل ۱۳۵

می‌توان گفت که «تصویر هندسی حدی»، به‌ازای $n \to \infty$، برای منحنی‌های $y = \sigma_{۲n-۱}(x)$، آن‌طور که انتظار می‌رود، به صورت شکل ۱۳۵–a نیست، بلکه به‌صورت شکل ۱۳۵–b درمی‌آید، به‌نحوی که پاره‌خط‌های قائم، به‌تقریب به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{۲} \cdot ۰/۲۸۱$، یعنی ۱۸٪ دراز می‌شوند.

این ویژگی مربوط به نقص تقارب، برای نخستین بار در کارهای گیبس (J.W.Gibbs) در اواخر سدهٔ گذشته، روی مثال خاص بسط مثلثاتی، دیده می‌شود و، به‌همین مناسبت، آن‌را پدیدهٔ گیبس می‌نامند. هم‌اکنون خواهیم دید که، پدیدهٔ گیبس، در حالت کلی هم وجود دارد.

۷۰۱. حالت تابع غیرمشخص. تابع متناوب $f(x)$ با دورهٔ تناوب ۲π را در نظر می‌گیریم، به‌نحوی به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر و دارای نقطهٔ مجزای ناپیوستگی نوع اول $x = x_۰$ باشد. در این صورت، در بازه‌ای مثل $[x_۰ - \Delta, x_۰ + \Delta]$ $(\Delta > ۰)$، نقطهٔ ناپیوستگی دیگری وجود ندارد. برای سادگی کار، فرض می‌کنیم، تابع در این بازه، دارای تغییر محدود باشد.

اکنون تابع $\sigma(x - x_۰)$ را وارد می‌کنیم که با تابع شمارهٔ قبل، در حرکت به‌راست به‌اندازهٔ $x_۰$ تفاوت دارد و، به‌کمک آن، تابع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(x_۰ + ۰) + f(x_۰ - ۰)}{۲}$$

$$-\frac{1}{\pi}[f(x_0+0)-f(x_0-0)]\sigma(x-x_0)$$

اگر مقدار $f(x)$ را در نقطهٔ ناپیوستگی $x=x_0$، برابر $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ بگیریم، آن‌وقت، به‌سادگی معلوم می‌شود که

$$\varphi(x_0+0)=\varphi(x_0-0)=\varphi(x_0)=0$$

تابع $\varphi(x)$، در نقطهٔ $x=x_0$، پیوسته از آب درمی‌آید: به کمک تابع σ، توانستیم ناپیوستگی تابع f را جبران کنیم! اگر $\Delta<\pi$ بگیریم، تابع φ در سایر نقطه‌های بازهٔ $[x_0-\Delta, x_0+\Delta]$ هم پیوسته است؛ به‌جز این، تابع φ هم، مثل تابع‌های f و σ، در بازهٔ مذکور، تغییر محدود دارد.

حالا می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{\pi}[f(x_0+0)-f(x_0-0)\sigma(x-x_0)+\varphi(x)$$

در این‌جا، اگر به‌جای هر یک از تابع‌های $\sigma(x-x_0)$ و $\varphi(x)$، بسط آن‌ها را به رشتهٔ فوریه بنویسیم، آن‌وقت بسط تابع مفروض هم به رشتهٔ فوریه به‌دست می‌آید. مجموع جزئی $s_m(x)$، از رشتهٔ اخیر، به‌این‌صورت است:

$$s_m(x)=f(x_0)+\frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{\pi}\sigma_m(x-x_0)+\varphi_m(x)$$

در این‌جا، به‌ازای $m=2n$ یا $m=2n-1$

$$\sigma_m(x-x_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)(x-x_0)}{2k-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)}[\cos x_0\sin(2k-1)x-\sin x_0\cos(2k-1)x]$$

و $\varphi_m(x)$ عبارت است از مجموع جزئی متناظر رشته، برای φ.

چون $\varphi(x_0)=0$ و تابع $\varphi(x)$ در نقطهٔ x_0 پیوسته است، بنابراین، به‌ازای مقدارهای به‌قدر کافی کوچک Δ، همهٔ مقدارهای آن در بازهٔ $[x_0-\Delta, x_0+\Delta]$، به‌دلخواه کوچک می‌شوند. درضمن، $\varphi_m(x)$ در این بازه، به‌طور یکنواخت به‌سمت $\varphi(x)$ میل می‌کند، بنابراین، به‌ازای مقدارهای به‌قدر کافی بزرگ m، مقدارهای $\varphi_m(x)$ هم، به‌دلخواه کوچک

می‌شوند. به‌این‌ترتیب، رفتار مجموع $s_m(x)$ را می‌توان، دراساس، ازروی رفتارمجموع $\sigma_m(x-x_0)$ (که برای مامعلوم‌است) مشخص‌کرد؛ وجودجملهٔ $\varphi_m(x)$، تنها یك‌انحراف ناچیز درآن به‌وجود می‌آورد وهرچه x به x_0 نزدیك‌تر و m بزرگتر شود، این‌انحراف کوچکتر می‌شود.

اگر برای حالتی‌که m عددی فرد است $(m=2n-1)$، فرض‌کنیم:

$$\xi_m = x_0 + \frac{\pi}{2n} = x_0 + \frac{\pi}{m+1}$$

وبرای حالتی‌که m زوج است $(m=2n)$:

$$\xi_m = x_0 + \frac{\pi}{2n} = x_0 + \frac{\pi}{m}$$

آن‌وقت خواهیم داشت:

$$\lim_{m\to\infty} \xi_m = x_0$$

وهمراه باآن، اگر (۱۰) را به‌حساب آوریم:

$$\lim_{m\to\infty} s_m(\xi_m) = f(x_0) + \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{\pi}\cdot\mu_1$$

زیرا روشن است‌که، به‌ازای $m \to \infty$، داریم:

$$\varphi_m(\xi_m) = [\varphi_m(\xi_m) - \varphi(\xi_m)] + \varphi(\xi_m) \to 0$$

μ_1 را بـا $\frac{\pi}{2}+\rho_1$ عوض ومقدارجهش $D = f(x_0+0)-f(x_0-0)$ راواردمی‌کنیم، دراین صورت، نتیجهٔ حاصل‌چنین می‌شود:

$$\lim_{m\to\infty} s_m(\xi_m) = f(x_0+0) + \frac{D}{\pi}\rho_1 \qquad (12)$$

به‌همین‌ترتیب، با فرض $\xi_m = x_0 - \frac{\pi}{m+1}$ یا $\bar{\xi}_m = x_0 - \frac{\pi}{m}$ (بسته به‌این‌که m، عددی فرد باشد یا زوج)، به‌دست می‌آید:

$$\lim_{m\to\infty} s_m(\bar{\xi}_m) = f(x_0-0) - \frac{D}{\pi}\rho_1 \qquad (13)$$

به‌این ترتیب، دراین‌حالت کلی هم، مقدارحدی نوسان مجموع $s_n(x)$ درهمسایگی نقطهٔ ناپیوستگی x_0، از خود مقدار $|D|$، جهش تابع $f(x)$، به‌اندازهٔ $\rho_1 \frac{2|D|}{\pi}$ بیشتر می‌شود، یعنی به‌همان اندازهٔ ۱۸٪ آن. دراین‌جا هم، برای به‌دست‌آوردن شکل هندسی حدی ازنمودارهای مجموع‌های $s_m(x)$، کافی نیست که پاره‌خطهای قائم $x=x_0$ را در فاصلهٔ نقطه‌های باعرض‌های $f(x_0-0)$ و $f(x_0+0)$ ازمنحنی $y=f(x)$، به‌هم‌وصل کنیم، بلکه باید این پاره‌خطها را ازبالا واز پایین درازترکرد. می‌توان گفت که: برای هرتابع دلخواه، پدیدهٔ گیبس وجود دارد.

یادداشت. بررسی پدیدهٔ گیبس، مارا به‌نتیجه‌جالب دیگری‌هم می‌رساند. به‌کمک‌این پدیده، می‌توان‌دستوری به‌دست‌آورد که، برای‌تابع $f(x)$ باتغییرمحدود، حدهای‌یک‌سوئی $f(x_0\pm 0)$ ومقدارجهش درهرنقطهٔ x_0 را، مستقیماً به‌وسیلهٔ رشتهٔ فوریهٔ‌آن، محاسبه‌کرد. برای این‌منظور، می‌توان مثلاً ازدستورهای (۱۲) و (۱۳) استفاده‌کرد؛ اگراین‌دودستور را ازهم کم کنیم:

$$D=\frac{\pi}{2\mu_1}\lim_{m\to\infty}[s_m(\xi_m)-s_m(\xi_m)]$$

که سپس، $f(x_0\pm 0)$ به‌سادگی معین می‌شود. فه‌یر (L. Fejer) دستورهای مختلفی از این‌گونه را، به‌دست آورده است.

۷۰۲. ویژگی‌های رشته‌های فوریه. ملاحظه‌های مقدماتی. درهمهٔ‌معیارهای‌همگرائی رشته‌های فوریه، علاوه برپیوستگی تابع، شرطهای دیگری هم ضرورت دارد: وجودیک انتگرال، برقراری نابرابری، وجود مشتق متناهی، محدود بودن تغییرتابع، یکنوائی قطعه به قطعهٔ آن. به‌طور طبیعی، پرسشی پیش می‌آید: آیا، برای همگرائی رشتهٔ فوریه، تنها همان پیوستگی تابع مولدآن‌کافی‌نیست؟ حتی درسال ۱۸۷۶، بوادیموند (P.du Bois-Reymond) توانست نمونه‌ای ازتابع‌های پیوسته را پیداکند که، رشتهٔ فوریهٔ مربوط به‌آن، دربعضی نقطه‌ها، متباعد بود.

درسال۱۹۰۶، له‌بگ (H. Lebesgue)، نمونه‌ای تابع پیوسته رامطرح‌کردکه، رشتهٔ فوریهٔ آن، درهمه‌جا، به‌سمت آن متقارب بود، ولی نه‌به‌طور یکنواخت.

دراین‌جا می‌خواهیم‌نمونه‌هایی بیاوریم که«ویژگی‌دوبوادیموند»و یا«ویژگی‌له‌بگ» راداشته‌باشندوبرای ساختن آن‌ها، ازراهی‌می‌رویم که فه‌یرنشان داده‌است. عنصرهای‌اصلی در هردوحالت، عبارتند ازچندجمله‌ای‌های مثلثاتی متناهی (m و n، عددهایی طبیعی‌اند):

$$P_{m,n}(x)=\left[\frac{\cos mx}{n}+\frac{\cos(m+1)x}{n-1}+\dots+\frac{\cos(m+n-1)x}{1}\right]-$$

$$-\left[\frac{\cos(m+n+1)x}{1}+\dots+\frac{\cos(m+2n-1)x}{n-1}+\frac{\cos(m+2n)x}{n}\right];$$

$$Q_{m,n}(x)=\left[\frac{\sin mx}{n}+\frac{\sin(m+1)x}{n-1}+\dots+\frac{\sin(m+n-1)x}{1}\right]-$$

$$-\left[\frac{\sin(m+n+1)x}{1}+\dots+\frac{\sin(m+2n-1)x}{n-1}+\frac{\sin(m+2n)x}{n}\right]$$

ویژگی‌هایی ازاین چندجمله‌ای‌ها را، مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

۱°. قبل از همه، برای هرمقدار متغیر x ونشانه‌های m و n، مقدار ثابت M وجود دارد، به‌نحوی که

$$|P_{m,n}(x)|\leqslant M \quad و \quad |Q_{m,n}(x)|\leqslant M \qquad (۱۴)$$

برای اثبات، چندجمله‌ای‌های P و Q را، با یکی‌کردن جمله‌هایی که ضریب برابر دارند، تبدیل می‌کنیم. مثلاً درچندجمله‌ای P (به‌ازای n ،... ،۲ ،۱ $=\nu$) داریم:

$$\frac{\cos(m+n-\nu)x}{\nu}-\frac{\cos(m+n+\nu)x}{\nu}=2\sin(m+n)x\,\frac{\sin\nu x}{\nu}$$

وبنابراین، چندجمله‌ای P را می‌توان این‌طور نوشت:

$$P_{m,n}(x)=2\sin(m+n)x\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}$$

وشبیه آن

$$Q_{m,n}(x)=-2\cos(m+n)x\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}$$

چون ضریب $\sum$ درهردوچندجمله‌ای، مقداری محدود است، باید ثابت کنیم، خودمجموع، کران‌دار است. این مجموع را می‌توان به‌این صورت نوشت [۶۹۰، ۳]:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}=-\frac{x}{2}+\int_{0}^{x}\left[\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt+$$

$$+\int_{0}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin u}{u}du$$

جملهٔ دوم سمت راست، به‌ایـن دلیل کـه به‌ازای $n\to\infty$، به‌سمت صفـر میل می‌کند، کران‌دار است [۶۹۸، ۱°]؛ جملهٔ سوم هم، به‌دلیل متقارب بودن انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$، کران‌دار است. بنابراین، نتیجهٔ مطلوب، به‌دست می‌آید.

۲°. درمورد مجموع‌هـای جزئی چندجمله‌ای‌هـای P و Q (یعنی مجموع تعـداد دلخواهی ازجمله‌های پشت‌سرهم آن، باآغاز از جملهٔ اول)، وضع به‌گونهٔ دیگری‌است. اگربرای چندجمله‌ای $P_{m,n}(x)$، مجمـوع n جملهٔ اول را درنظر بگیریم، به‌ازای $x=0$ به‌دست می‌آید:

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

که با بزرگ شدن n، تا بی‌نهایت صعود می‌کند [۳۶۵، ۱)]. ازآن‌جاکه روشن است

$$\frac{1}{\nu}>\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{dx}{x}=\ln(\nu+1)-\ln\nu$$

بنابراین، برای H_n برآورد معلوم زیربه‌دست می‌آید:

$$H_n>\ln n$$

همهٔ مجموع‌های جزئی $Q_{m,n}(x)$، به‌ازای $x=0$، برابرصفرمی‌شوند. با وجود این، اگر مجموع nجملهٔ اول‌آن را درنقطهٔ نزدیك به‌صفر (برای m و n بزرگ) $x=\frac{\pi}{2(m+n)}$ محاسبه‌کنیم، آن‌وقت خواهیم داشت:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\nu\pi}{2(m+n)}\right)$$

ولی، بنابر نابرابری معلوم $\sin z>\frac{2}{\pi}z$ $\left(\text{برای } 0<z<\frac{\pi}{2}\right)$، این مجموع هم، بزرگتر می‌شود از:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{m+n}\right)=H_n-\frac{n}{m+n}>\ln n-1$$

و دوباره، همراه با n، تا بی‌نهایت صعود می‌کند. دراین‌جا، مثل این است که، نطفهٔ هردو «ویژگی» دوباره‌یموند و له‌بگ نهفته است.

۳°. اگرعدد مثبت ودلخـواه ε را انتخاب، وتغییر متغیر x را به بازه $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ محدود کنیم*، آن‌وقت، همهٔ مجموع‌های‌جزئی هردوچندجمله‌ای (ازلحاظ قدرمطلق)، به‌یك مقدار ثابت $L(\varepsilon)$ محدود می‌شوندکه بستگی به m و n ندارد. کافی است، این مطلب را، درمورد عبارت‌هایی به‌صورت زیر ثابت کنیم:

$$\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{\cos(p\pm\lambda)x}{\lambda},\quad \sum_{\lambda=1}^{l}\frac{\sin(p\pm\lambda)x}{\lambda} \tag{۱۵}$$

زیرا، به‌سادگی دیده می‌شود کـه، مجموع‌های جـزئی مذکور، درحالت کلی، تفاضل دو عبارت ازاین‌گونه‌اند.

به‌عنوان نمونه، به‌این عبارت می‌پردازیم:

$$\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{\cos(p+\lambda)x}{\lambda}$$

وبـرای ارزیابی آن، ازپیش قضیهٔ آبل استفاده می‌کنیم [۳۸۳]. عامل $\frac{1}{\lambda}$، با بزرگ شدن λ، ضمن این‌که مثبت باقی می‌ماند، نـزول می‌کند. و اما عامـل $\cos(p+\lambda)x$، مجموع هرتعداد آن

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda_0}\cos(p+\lambda)x=\frac{\sin\left(p+\lambda_0+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

ازلحاظ‌قدرمطلق، ازمقدارثابت $\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$ تجاوز نمی‌کند. ازاین‌جا نتیجه می‌شودکه نابرابری زیرهم برقرار است:

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{\cos(p+\lambda)x}{\lambda}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$$

---

*) ویا معادل آن، بازهٔ از $2k\pi+\varepsilon$ تا $2(k+1)\pi-\varepsilon$ (k، عدد درست دلخواهی است).

درمورد بقیهٔ عبارت‌های (۱۵) هم، همین‌وضع وجود دارد. بنابراین، به‌جای مرز $L(\varepsilon)$، می‌توان مقدار ثابت $\frac{۲}{\sin\frac{\varepsilon}{۲}}$ را درنظر گرفت.

ازهمهٔ این ویژگی‌ها، درشمارهٔ بعد، استفاده خواهیم کرد.

۷۰۳. ساختن خصوصیت‌ها. حالا، دنبالهٔ عددهای مثبت $\{a_k\}$ را، که برای آن رشتهٔ $\sum a_k$ متقارب است، و دودنبالهٔ عددهای طبیعی $\{m_k\}$ و $\{n_k\}$ را، که تا بی‌نهایت‌صعودی هستند، انتخاب می‌کنیم و، دورشتهٔ زیررا می‌سازیم:

$$\sum_{k=۱}^{\infty} a_k P_{m_k,n_k}(x) = \Phi(x) \qquad (I)$$

$$\sum_{k=۱}^{\infty} a_k Q_{m_k,n_k}(x) = \Psi(x) \qquad (II)$$

هردو رشته، به‌طور مطلق و به‌طوریکنواخت، متقارب‌اند، زیرا بنابر (۱۴) با رشتهٔمتقارب $M\sum a_k$ محدود می‌شوند. بنابراین [۴۳۱]، تابع‌های $\Phi(x)$ و $\Psi(x)$ پیوسته‌اند.

انتخاب عددهای a_k، m_k و n_k را با دوخواست زیرمشروط می‌کنیم:

۱) $m_{k+۱} > m_k + ۲n_k$ (برای $k = ۱,۲,۳, \ldots$)؛

۲) $a_k \ln n_k \to +\infty$، به‌ازای $k \to \infty$.

می‌توان، مثلاً، فرض کرد:

$$a_k = \frac{۱}{k^۲},\quad m_k = n_k = ۲^{k^۲}$$

با توجه به ۱) چندجمله‌ای‌های مثلثاتی مختلف $a_k P_{m_k,n_k}(x)$ و $a_k Q_{m_k,n_k}(x)$، که به‌ترتیب دررشته‌های (I) و (II) داده شده‌اند، شامل جمله‌هایی بـا مضرب‌های یکسان x نیستند. اکنون اگرهمهٔ جمله‌های چندجمله‌ای‌ها را پشت‌سرهم بنویسیم، یعنی همـهٔ‌پرانتزها را بازکنیم، دورشتهٔ مثلثاتی (اولی برحسب کسینوس‌ها ودومی برحسب سینوس‌ها) به‌دست می‌آیدکه همان رشته‌های فوریهٔ تابع‌هـای $\Phi(x)$ و $\Psi(x)$ هستند. مثلاً اگـر دو طرف برابری (I) را در $\cos px$ ضرب کنیم و، سپس، از ۰ تـا ۲π انتگرال بگیریم، بـا توجه به‌تقارب یکنواخت‌رشته، می‌توان انتگرال‌گیری را جمله‌به‌جمله انجام‌داد. بعد،هرانتگرال

$$\int_{۰}^{۲\pi} a_k P_{m_k,n_k}(x) \cos px\, dx$$

با مجموع متناهی انتگرال‌ها عوض می‌شود؛ درضمن، همهٔ آن‌ها برابرصفر می‌شود، به‌جز حالتی‌که در ترکیب $a_k P_{m_k,n_k}(x)$، $\cos px$ وارد شود. به‌این طریق قانع می‌شویم که ضریب $\cos px$، ضریب فوریه است.

حالا، به موضوع تقارب این رشته‌های فوریه وخصلت آن‌ها می‌پردازیم. اگر تغییر x، به‌بازهٔ $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ محدود باشد، هردو رشته متقارب می‌شوند وحتی یکنواخت،شبیه رشته‌های (I) و (II). این مطلب ناشی ازآن است که هرمجموع جزئی، مثلاً برای رشتهٔ فوریه ازتابع $\Phi(x)$، با هرمجموع جزئی

$$\sum_{k=1}^{s-1} a_k P_{m_k,n_k}(x)$$

ازرشتهٔ (I) با هرمجموع جزئی ازچندجمله‌ای مثلثاتی زیرفرق دارد:

$$a_s P_{m_s,n_s}(x)$$

که با توجه به ۷۰۲، ۳°، ازلحاظ قدرمطلق، از $a_s L(\varepsilon)$ تجاوزنمی کند ووقتی s، به‌طور نامحدود ترقی می‌کند، به‌طور یکنواخت به‌سمت صفرمیل می‌کند.

بنابراین، برای‌هر ε دلخواه، تقارب رشته‌های‌فوریه برای تابع‌های $\Phi(x)$ و$\Psi(x)$ به‌ازای همهٔ مقدارهای x در $(0, 2\pi)$ تضمین می‌شود. با وجود این، رشتهٔ اول، به‌ازای $x=0$(یا 2π) متباعد است و «ویژگی دوبوادیموند» در برابر ما قرار می‌گیرد. درواقع، اگر mامین مجموع جزئی آن را $\bar{s}_m(x)$ بنامیم، داریم:

$$\bar{s}_{m_k+n_k-1}(x)-\bar{s}_{m_k-1}(x)=$$

$$=a_k\left[\frac{\cos m_k x}{n_k}+\dots+\frac{\cos(m_k+n_k-1)x}{1}\right]$$

به‌نحوی که [۷۰۰، ۲°]

$$s_{m_k+n_k-1}(0)-s_{m_k-1}(0)=a_k H_{n_k}>a_k \ln n_k$$

که با توجه به‌شرط ۲)، گواه برخراب شدن شرط اصلی تقارب رشته است [۳۷۶].

واما دربارهٔ رشتهٔ فوریهٔ تابع $\Psi(x)$، که تنها از سینوس‌ها تشکیل شده است، باید گفت که این رشته، برای $x=0$ (یا 2π) هم متقارب است. ولی این تقارب، درهمسایگی نقطهٔ $x=0$، یکنواخت نیست و، بنابراین، با «ویژگی لبگ» روبه‌رو می‌شویم. برای این‌که دراین مورد قانع شویم، mامین مجموع جزئی را $\bar{s}_m(x)$ می‌نامیم وتفاضل

$$\bar{s}_{m_k+n_k-1}(x)-\bar{s}_{m_k-1}(x)=a_k\left[\frac{\sin m_k x}{n_k}+\ldots+\frac{\sin(m_k+n_k-1)x}{1}\right]$$

را در نقطهٔ $x=\dfrac{\pi}{2(m_k+n_k)}$ محاسبه می‌کنیم؛ با توجه به ۷۰۰: ۲°، این تفاضل بزرگتر است از

$$a_k(\ln n_k-1)$$

وهمراه با k، تا بی‌نهایت ترقی می‌کند.

با اندکی دشواری بیشتر، می‌توان چنان تابع متناوبی از $\Phi(x)$ با دورهٔ تناوب 2π را ساخت که، رشتهٔ فوریهٔ آن، درهر بخشی از بازهٔ $[0,2\pi]$، دارای نقطه‌های متناظر با تباعد رشته باشد.

با وجود این، هنوز به‌این پرسش پاسخ نداده‌ایم که: آیا رشتهٔ فوریهٔ یك تابع پیوسته، می‌تواند در همه‌جا متباعد باشد؟ البته، آکادمیسین آ. ن. کولموگوروف، نمونه‌ای ازرشتهٔ فوریه را ساخته است که درهمه‌جا متباعد است، ولی ساختمان او بسیار ظریف و، درعین‌حال، پیچیده است و به‌تابع‌هایی مربوط می‌شود که سرشت بغرنج‌تری دارند و، در ضمن، ازمفهوم انتگرال (که به لبگ تعلق دارد) با تعریف کلی‌تری استفاده کرده است.

§۵. برآورد باقی‌مانده در ارتباط با ویژگی‌های دیفرانسیلی تابع‌ها

۷۰۴. بستگی بین ضریب‌های فوریهٔ تابع با مشتق‌های آن. تابع $f(x)$ را با دورهٔ تناوب 2π درنظرمی‌گیریم و فرض می‌کنیم تا خود مرتبهٔ kام $(k\geqslant 1)$ دارای مشتق باشد. روشن‌است که، $(k-1)$ مشتق نخستین تابع، پیوسته‌اند؛ مشتق kام آن‌را هم، انتگرال‌پذیر (مطلق) می‌گیریم. مثل قبل، ضریب‌های فوریهٔ تابع $f(x)$ را a_m و b_m می‌نامیم وضریب‌های فوریه را برای مشتق $f^{(i)}(x)$ $(i=1,2,\ldots,k)$، با $a_m^{(i)}$ و $b_m^{(i)}$ نشان می‌دهیم.

با انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء (برای $m=1,2,3,\ldots$) به‌دست می‌آید:

$$\pi a_m=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=f(x)\frac{\sin mx}{m}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin mx\,dx$$

به‌نحوی که برای a_m، وشبیه آن برای b_m، خواهیم داشت:

$$a_m=-\frac{b'_m}{m},\quad b_m=\frac{a'_m}{m}$$

اگرازاین رابطه‌ها، برای ضریب‌های a'_m و b'_m استفاده‌کنیم وعبارت‌های اخیررا برحسب a''_m و b''_m در رابطه‌های a_m و b_m قراردهیم، نتیجه می‌شود:

$$a_m=-\frac{a''_m}{m^2},\quad b_m=-\frac{b''_m}{m^2}$$

باادامهٔ ایـن روند، سرانجام، باروش استقرایی به‌دستورهایی می‌رسیم کـه، البته، برای حالت‌های زوج وفرد k، باهم فرق دارند:

$$k=2h:\qquad a_m=(-1)^h\frac{a_m^{(k)}}{m^k},\quad b_m=(-1)^h\frac{b_m^{(k)}}{m^k}\qquad (1a)$$

$$k=2h+1:\quad a_m=(-1)^{h+1}\frac{b_m^{(k)}}{m^k},\quad b_m=(-1)^h\frac{a_m^{(k)}}{m^k}\qquad (b)$$

این مساله را دربرابرخود مطرح می‌کنیم که: بااستفادهٔ ازاین دستورها، برآوردی برای باقی‌ماندهٔ رشتهٔ فوریه تابع‌هایی که تا مرتبهٔ kام مشتق‌پذیرند و مشتق kام آن‌ها با این‌یاآن شرط‌سازگارند، معین‌کنیم. درآغاز بندقبل، مسألهٔ یکنواختی تقارب رشتهٔ فوریه، یعنی یکنواختی میل باقی‌ماندهٔ آن به‌سمت صفررا، مورد مطالعه قراردادیم؛ دراین‌جا، بـا شرط‌های سنگین‌تری، سعی می‌کنیم میل باقی‌ماندهٔ آن را به سمت صفر، سریع‌ترکنیم و، دررابطه با سرشت دیفرانسیلی تابع، مرتبهٔ کوچکی این باقی‌مانده را به‌دست‌آوریم.

۷۰۵. برآورد مجموع جزئی، درحالت تابع کران‌دار. ابتدا مجموع جزئی $s_n(x)$ ازرشتهٔ فوریه را، وهمراه باآن، مجموع جزئی $\tilde{s}_n(x)$ ازرشتهٔ مزدوج آن را، تنهابافرض کران‌داربودن تابع $f(x)$، ارزیابی می‌کنیم:

$$|f(x)|\leqslant M$$

برای M، مثلاً می‌توان، مرز بالا ودقیق $|f(x)|$ را درنظرگرفت.

بنابررابطهٔ معلوم [۶۸۱، (۴) را ببینید]:

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

ازاین‌جا، به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$|s_n(x)| \leqslant \frac{۲M}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)t\right|}{۲\sin\frac{۱}{۲}t}dt < M\int_{۰}^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)t\right|}{t}dt^{*} =$$

$$= M\int_{۰}^{(n+\frac{۱}{۲})\pi}\frac{|\sin u|}{u}du < M\int_{۰}^{۱}du + M\int_{۱}^{(n+\frac{۱}{۲})\pi}\frac{du}{u} =$$

$$= M\left[۱+\ln\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\pi\right] < M(\ln n + ۱ + \ln ۲\pi)$$

اگر A را، مقدار ثابت به‌قدر کافی بزرگ درنظر بگیریم**، آن‌وقت (به‌ازای $n \geqslant ۲$)، آخرین عبارت داخل پرانتز، از $A\ln n$ کوچکتر می‌شود، به‌نحوی که سرانجام به‌دست می‌آید:

$$|s_n(x)| \leqslant AM\ln n \quad (n \geqslant ۲) \qquad (۲)$$

برای رشتهٔ مزدوج، به‌خاطر می‌آوریم که [۶۹۶، (۲۰)]

$$\tilde{s}_n(x) = -\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}[f(x+t)-f(x-t)]\frac{\cos\frac{۱}{۲}t - \cos\left(n+\frac{۱}{۲}\right)t}{۲\sin\frac{۱}{۲}t}dt$$

بنابراین

$$|\tilde{s}_n(x)| \leqslant \frac{۲M}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\frac{\left|\cos\frac{۱}{۲}t - \cos\left(n+\frac{۱}{۲}\right)t\right|}{۲\sin\frac{۱}{۲}t}dt =$$

$$= \frac{۴M}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\frac{\left|\sin\frac{n}{۲}t\cdot\sin\frac{n+۱}{۲}t\right|}{۲\sin\frac{۱}{۲}t}dt < \frac{۴M}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\frac{\left|\sin\frac{n+۱}{۲}t\right|}{۲\sin\frac{۱}{۲}t}dt$$

---

*) پاورقی صفحهٔ **۲۴۱۵** را ببینید.

**) مثلا می‌توان انتخاب کرد

$$A = ۲ + \frac{۱+\ln\pi}{\ln ۲}$$

ولی البته این، بهترین مقدار ممکن، برای ثابت A، نیست.

که اگر، مثل حالت قبل، استدلال کنیم، به‌ارزیابی مشابهی می‌رسیم:

$$|\tilde{s}_n(x)| \leqslant AM\ln n \quad (n \geqslant 2) \qquad (3)$$

که در آن، A ثابت جدیدی است و، در حالت کلی، با قبلی فرق دارد، ولی شبیه آن، مستقل از انتخاب تابع $f(x)$ است. البته، می‌توان مقدار ثابتی، بزرگتر از هـردو، در نظر گرفت و در هر دو حالت از آن استفاده کرد.

تفاضل $R_n(x)=f(x)-s_n(x)$ (ایـن ، باقی‌ماندهٔ رشتهٔ فوریه، تنهـا در حالتی است که به‌سمت تابع f میل می‌کند)، شبیه (۲) ارزیابی می‌شود:

$$|R_n(x)| \leqslant AM\ln n \quad (n \geqslant 2)$$

درواقع

$$|R_n(x)| \leqslant |f(x)| + |s_n(x)| \leqslant M + AM\ln n$$

تنها این می‌ماند که ثابت A را بزرگ کنیم تا به‌نابرابری مطلوب برسیم.

خواننده نباید از این مطلب تعجب کند کـه، مقدار واقع در سمت راست نابرابری، همراه با n، تا بی‌نهایت ترقی می‌کند. می‌دانیم که، برای برخی تابع‌های کران‌دار $f(x)$ (و حتی پیوسته؛ **۷۰۳** را ببینید)، مقدار $R_n(x)$ می‌تواند به‌طـور نامتناهی ترقی کند، و نابرابری ما، باید همهٔ تابع‌های انتگرال‌پذیر کران‌دار را در بر بگیرد.

۷۰۶. ارزیابی باقی‌مانده، در حالت تابعی که مشتق kام آن، کران‌دار است. دوباره تابع $f(x)$ بـا دورهٔ تناوب 2π را، کـه تا خود مرتبهٔ kام، دارای مشتق است، در نظـر می‌گیریم، در ضمن این بار، مشتق مرتبهٔ kام را، کران‌دار

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant M_k$$

و انتگرال‌پذیر، به‌معنای ویژه، فرض می‌کنیم.

نتیجهٔ مهم زیر را، کـه به آکادمیسین س.ن. برن‌شتاین تعلـق دارد، ثابت می‌کنیم: با شرطهایی که در نظر گرفتیم، ثابت مطلق A وجود دارد، به‌نحوی که $(n \geqslant 2)$ داشته باشیم:

$$|R_n(x)| \leqslant AM_k \frac{\ln n}{n^k} \qquad (4)$$

برای اثبات، دو حالتی را کـه، در آن‌ها، k عددی زوج یا عددی فـرد باشد، از هم جدا می‌کنیم.

۱°. $k=2h$. عبارت مربوط به‌باقی‌ماندهٔ رشتهٔ فوریه ازتابع $f(x)$*

$$R_n=R_n(x)=\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m cosmx+b_m sinmx$$

به‌شرطی‌که ازدستورهای (۱a) استفاده‌کنیم، به‌این صورت درمی‌آید:

$$R_n=(-1)^h\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^k}(a_m^{(k)}cosmx+b_m^{(k)}sinmx)$$

در داخل پرانتز، mامین جملهٔ رشتهٔ فوریه ازتابع $f^{(k)}(x)$ قراردارد؛ اگرمجموع جزئی $\sigma_m=\sigma_m(x)$ این رشته را واردکنیم، می‌توان آن را به‌این‌صورت درآورد:

$$R_n=(-1)^h\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^k}(\sigma_m-\sigma_{m-1})$$

پرانتزها را باز و به‌نحو دیگری گروه‌بندی می‌کنیم [با ۳۸۳ مقایسه کنید]، به‌این رشته می‌رسیم:

$$(-1)^hR_n=-\frac{\sigma_n}{(n+1)^k}+\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^k}-\frac{1}{(m+1)^k}\right)\sigma_m \qquad (۵)$$

برای این تبدیل، یادآوری می‌کنیم که

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sigma_m}{m^k}=0$$

این‌حد، ازنابرابری زیربه‌دست می‌آید:

$$|\sigma_m|\leqslant AM_k\ln m \qquad (۶)$$

که ازنابرابری (۲)، وقتی برای تابع $f^{(k)}(x)$ به‌کاررود، به‌دست می‌آید. از (۵) و(۶) این ارزیابی حاصل می‌شود:

$$\frac{|R_n|}{M_k}\leqslant\frac{A\ln n}{(n+1)^k}+A\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^k}-\frac{1}{(m+1)^k}\right)\ln m$$

مجموع اخیررا، دوباره، تبدیل می‌کنیم [با ۳۷۱ مقایسه کنید]:

$$\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^k}+\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^k}[\ln(m+1)-\ln m]$$

که اگر از نابرابری‌های زیراستفاده‌کنیم:

---

*) با شرط‌های مفروض، رشتهٔ فوریه درهمه‌جا، به‌سمت تابع f میل می‌کند [۶۸۴].

$$\ln(m+1)-\ln m=\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)<\frac{1}{m},$$

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^{k+1}}<\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n^k}$$

[۳۷۳، a) را ببینید]، آن‌وقت برای آن، به‌ترتیب، این ارزیابی‌ها به‌دست می‌آید:

$$\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^k}+\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)^k}<\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^k}+$$

$$+\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^{k+1}}<\frac{\ln n}{n^k}+\frac{1}{n^{k+1}}+\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n^k}<\frac{\ln n+2}{n^k}$$

واگر به $|R_n|$ برگردیم، به‌این ارزیابی می‌رسیم:

$$|R_n|<M_k\cdot\frac{2A\ln n+2A}{n^k}\quad(n\geqslant 2)$$

و روشن است که اگر A را، به‌صورت مناسبی عوض کنیم، به‌همان (۴) می‌رسیم.

۲°. $k=2h+1$. با تکیه بر (1b)، R_n را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$R_n=(-1)^h\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^k}(a_m^{(k)}\sin mx-b_m^{(k)}\cos mx)$$

عبارت داخل پرانتزهمان mامین جملهٔ مزدوج رشتهٔ فوریه ازتابع $f^{(k)}(x)$ است[۶۷۰]، وچون برای مجموع جزئی آن، $\tilde{\sigma}_m=\tilde{\sigma}_m(x)$، داریم:

$$|\tilde{\sigma}_m|\leqslant AM_k\ln m$$

[(۳) را ببینید]، بنابراین، ادامهٔ استدلال، هیچ فرقی با حالت قبل ندارد.

۷۰۷. حالتی‌که تابع، دارای مشتق kام با تغییرمحدود باشد. ابتدا تابع $f(x)$را با دورهٔ تناوب 2π درنظرمی‌گیریم‌که دربازهٔ $[-\pi,\pi]$ تغییری محـدود داشته باشد. با عبور به‌انتگرال ستیل‌تیس وبا استفاده ازدستور انتگرال‌گیری جزء به‌جزء [۵۷۷]،ضریب a_n تابع $f(x)$ را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$a_n=\frac{1}{\pi}(s)\int_{-\pi}^{\pi}f(x)d\frac{\sin nx}{n}=$$

$$=f(x)\frac{\sin nx}{n\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}(s)\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,df(x)\qquad(۷)$$

جملهٔ بیرون انتگرال‌حذف می‌شود وارزیابی‌جملهٔ دوم، برای انتگرال ستیل‌تیس، صورتی عادی دارد [۵۸۲، ۲°] وبه‌دست می‌آید:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, df(x)\right| \leqslant \max|\sin nx| \cdot \bigvee_{-\pi}^{\pi} f(x)$$

به‌این‌ترتیب، سرانجام، خواهیم داشت:

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{\pi} V \cdot \frac{1}{n}$$

به‌شرطی‌که تغییرکامل تابع $f(x)$ دربازهٔ $[-\pi, \pi]$ را، V بنامیم. ضریب b_n را هم، به‌همین‌ترتیب می‌توان ارزیابی کرد.

اگردوکمیت متغیر α و β، که مثلاً به‌یک متغیر مستقل بستگی دارند، دارای این ویژگی باشندکه، نسبت آن‌ها، محدود بماند:

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \leqslant M \quad (M = \text{const.})$$

آن‌وقت، این حقیقت را، این‌طور می‌نویسند:

$$\beta = O(\alpha)^*$$

بااستفاده ازاین نماد، می‌توانیم ویژگی ضریب‌های فوریه a_n و b_n ازتابع با تغییرمحدود را (که اثبات کرده‌ایم)، این‌طور بنویسیم:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right),\ b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

اکنون فرض کنید، برای تابع $f(x)$ با دورهٔ تناوب 2π ، مشتق kام $f^{(k)}(x)$ وجود داشته باشد $(k \geqslant 1)$، به‌نحوی که، این مشتق، دربازهٔ $[-\pi, \pi]$ تغییری محدود داشته باشد، دراین صورت، برای ضریب‌های فوریهٔ تابع $f(x)$ داریم:

$$|a_n|,\ |b_n| \leqslant \frac{V_k}{\pi} \cdot \frac{1}{n^{k+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

که درآن، V_k، تغییرکامل تابع $f^{(k)}(x)$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ است.

این، بلافاصله وازمقایسهٔ آن‌چه هم‌اکنون ثابت کردیم، با دستورهای (1a) و(1b)

---

*) این نشانه‌گذاری را با نماد $o(\alpha)$ که در شمارهٔ ۶۰ با آن آشنا شدیم، مقایسه کنید.

شمارهٔ ۷۰۴ نتیجه می‌شود.

به‌این ترتیب، این‌بار

$$a_n=O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),\quad b_n=O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) \tag{۸}$$

بااطلاع ازمرتبهٔ ضریب‌های‌فوریه، به‌سادگی می‌توانیم باقی‌ماندهٔ رشتهٔ فوریه راارزیابی کنیم: با همان شرطها، برای باقی‌ماندهٔ $R_n(x)$ رشتهٔ فوریه ازتابع $f(x)$، این‌نابرابری را داریم:

$$|R_n(x)|<\frac{V_k}{n^k}$$

درواقع

$$|R_n(x)|\leqslant\sum_{m=n+1}^{\infty}(|a_m|+|b_m|)\leqslant\frac{2V_k}{\pi}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^{k+1}}<\frac{2V_k}{k\pi}\cdot\frac{1}{n^k}<\frac{V_k}{n^k}$$

بنابراین، با اندکی محدودیت بیشترکه (نسبت به‌شمارهٔ قبل) برای مشتق kام تابع درنظرگرفتیم، توانستیم‌ارزیابی‌باقی‌ماندهٔ R_n رابهترکنیم: درصورت‌کسر، $\ln n$حذف‌شد.

یادداشت. یکباردیگرتأکید می‌کنیم که، دراستدلال‌های دوشمارهٔ اخیر، نقش‌اصلی به عهدهٔ متناوب‌بودن تابع $f(x)$ و مشتق‌های آن است. اگرتابع اصلی، تنها دربازهٔ $[-\pi,\pi]$ داده شده باشد، آن‌وقت باید این شرطها را هم مطالعه‌کرد:

$$f(-\pi)=f(\pi),\ f'(-\pi)=f'(\pi),\ \ldots,\ f^{(k)}(-\pi)=f^{(k)}(\pi)$$

که در آن‌ها، مشتق‌های یک‌سوئی درنظرگرفته شده است. تنها در این صورت است‌که، پیوستگی و وجود مشتق‌های متوالی برای ادامهٔ تابع، به‌صورتی متناوب تأمین می‌شود و، همراه با آن، درستی ارزیابی‌های بالاهم، به‌قوت خود باقی می‌مانند.

۷۰۸. تأثیر ناپیوستگی تابع ومشتق‌های آن، برمرتبهٔ کوچکی ضریب‌های فوریه. دیدیم، اگرتابع دارای یک‌رشته مشتق‌های پیوسته باشد، آن‌وقت، ضریب‌های فوریه به‌سرعت نزول می‌کنند و، درنتیجه، رشتهٔ فوریه، به‌سرعت به‌تقارب خود نزدیک می‌شود.

ولی، ضمن عمل، اغلب با حالت‌هایی روبه‌رو می‌شویم که برای بسط تابع به رشتهٔ فوریه درمحدودهٔ از $-\pi$ تا π، مثل این است‌که باچند تابع «به‌هم‌چسبیده» سروکارداریم که، هرکدام، درحوزهٔ تعریف‌خود، مشتق‌هایی دارند. به‌این‌ترتیب، درنقطه‌های «اتصال»، چه برای‌خود تابع وچه برای مشتق‌های‌آن، جهش‌هایی ایجاد می‌شود. این ناپیوستگی‌ها،

مرتبهٔ کوچکی ضریب‌های فوریه را پایین می‌آورند که، همراه با آن، مرتبهٔ کوچکی باقی‌ماندهٔ رشته هم پایین می‌آید. در این‌جا، به‌بررسی تفصیلی همین مسأله پرداخته‌ایم.

۱°. فرض کنید، تابع $f(x)$، در بازهٔ $(\pi-, \pi)$، به‌جز در «نقطه‌های اتصال»

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \qquad (۹)$$

پیوسته باشد و در نقطه‌های (۹) دارای ناپیوستگی نوع اول باشد، یعنی در این نقطه‌ها، جهش‌های

$$\delta_\mu^{(0)} = f(\xi_\mu + 0) - f(\xi_\mu - 0) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

را تحمل کند. به‌این نقطه‌ها، باید نقطهٔ $\xi_0 = -\pi$ را هم اضافه کرد، به‌شرطی که تفاضل

$$\delta_0^{(0)} = f(-\pi + 0) - f(\pi - 0)$$

مخالف صفر باشد، زیرا، ضمن ادامهٔ تناوب تابع، در این نقطه، ناپیوستگی ظاهر می‌شود.

سپس فرض می‌کنیم در همه‌جا، به‌جز در نقطه‌های مذکور، مشتق محدود $f'(x)$، و مثلاً انتگرال‌پذیر مطلق در بازهٔ $[-\pi, \pi]$، وجود داشته باشد. برای بیان ضریب a_n از تابع $f(x)$، دوباره، به‌انتگرال ستیلتس متوسل می‌شویم و جزء به‌جزء انتگرال می‌گیریم [برابری (۷) را ببینید]. اگر در انتگرال اخیر، جمله‌های نظیر جهش‌های تابع $f(x)$ را جدا کنیم [۵۷۹، (۱۵)]، به‌دست می‌آید:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\sum_{\mu=1}^{m}\delta_\mu^{(0)}\sin n\xi_\mu - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx$$

ویا به‌طور خلاصه

$$a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{b_n'}{n} \qquad (۱۰)$$

که در آن، فرض کرده‌ایم:

$$A_n = -\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m}\delta_\mu^{(0)}\sin n\xi_\mu \qquad (۱۱)$$

و b_n'، مثل قبل، عبارت است از ضریب فوریه برای تابع $f'(x)$. به‌همین ترتیب، می‌توان به‌دست آورد:

$$b_n=\frac{B_n}{n}+\frac{a'_n}{n} \qquad (۱۲)$$

$$B_n=\frac{۱}{\pi}\sum_{\mu=۰}^{m}\delta_\mu^{(۰)}\cos n\xi_\mu \qquad (۱۳)$$

و a'_n عبارت است ازضریب فوریه برای تابع $f'(x)$.

اکنون، این شرطرا برمشتق $f'(x)$ تحمیل می‌کنیم که، دربازهٔ $[\pi,-\pi]$، تغییری محدود داشته باشد. چون بااین فرض، ضریب‌های فوریهٔ آن ازمرتبهٔ $O\left(\frac{۱}{n}\right)$هستند[۷۰۷] بنابراین دستورهای (۱۰) و (۱۲) را می‌توان این‌طور نوشت:

$$a_n=\frac{A_n}{n}+O\left(\frac{۱}{n^۲}\right) \qquad (۱۴)$$

$$b_n=\frac{B_n}{n}+O\left(\frac{۱}{n^۲}\right) \qquad (۱۵)$$

این دستورها به‌روشنی نشان می‌دهند که چگونه، وجود نقطه‌های ناپیوستگی در تابع، با این که درهمهٔ نقطه‌های دیگر آن مشتق وجود دارد، مرتبهٔ کوچکی ضریب‌های فوریه، یکباره پایین می‌آید.

حالا فرض کنید، برعکس، ضریب‌های فوریهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت (۱۴) و (۱۵) باشند؛ درضمن، مقدارهای A_n و B_n بادستورهای (۱۱) و (۱۳) معین‌شوند که، درآن‌ها، $\{\delta_\mu^{(۰)}\}$ انتخاب مفروضی شامل $m+۱$ عدد باشد. در این صورت، تابع $f(x)$ باید در نقطه‌های (۹) ناپیوستگی نوع اول و، درآن‌ها، جهش‌هایی برابر $\delta_\mu^{(۰)}(\mu=۱,۲,\dots,m)$ داشته باشد؛ درضمن، برای این تابع، حدهای $f(-\pi+۰)$ و $f(\pi-۰)$ وجود دارد* که تفاضل آن‌ها، برابر $\delta_۰^{(۰)}$ است. دربقیهٔ نقطه‌ها، تابع $f(x)$ پیوسته است.

برای این که دراین‌مورد قانع شویم، تابع کمکی $f(x)$ را، مثلاً* ازتابع‌های‌خطی در $(\xi_\mu,\xi_{\mu+۱})$ طوری تشکیل می‌دهیم که، درهمان نقطه‌ها، همان جهش‌ها را داشته‌باشد.

---

*) هم دراین‌جا وهم بعدازاین، درنظرمی‌گیریم که

$$f(\xi_\mu)=\frac{۱}{۲}[f(\xi_\mu+۰)+f(\xi_\mu-۰)]$$

وهمچنین $$f(-\pi)=f(\pi)=\frac{۱}{۲}[f(-\pi+۰)+f(\pi-۰)]$$

به‌نحوی که همهٔ نقطه‌های ناپیوستگی، منظم باشند [۶۸۴ را ببینید].

برای ضریب‌های فوریهٔ آن، شبیه (۱۴) و (۱۵) خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{A_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ b_n=\frac{B_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

که‌در آن‌ها، A_n و B_n، همان‌مقدارهای‌قبلی‌اند. در این‌صورت، برای تفاضل $f(x)-\bar{f}(x)$، بسط زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n cosnx+\beta_n sinnx$$

که در آن: α_n، $\beta_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$، یعنی

$$|\alpha_n|,\ |\beta_n|\leqslant\frac{K}{n^2}\quad(K=\text{const.})$$

این رشته، که به‌وسیلهٔ رشتهٔ $2K\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ محدود می‌شود، به‌طور یکنواخت در همه‌جا متقارب است. ازاین‌جا روشن می‌شود که، تفاضل $f(x)-\bar{f}(x)$، تابعی است پیوسته با دورهٔ تناوب 2π و، بنابراین، تابع $f(x)$، درهمان نقطه‌های تابع $\bar{f}(x)$، همان جهش‌ها را دارد.

۲°. اکنون فرض می‌کنیم، مشتق اول $f'(x)$، دارای مقدارهای حدی

$$f'(-\pi+0),\ f'(\xi\pm 0),\ f'(\pi-0)$$

باشد و، به‌جز آن، درهمه‌جا (به‌استثنای «نقطه‌های جهش») مشتق دوم $f''(x)$ وجود داشته باشد و، این مشتق دوم، درهمان بازهٔ $[-\pi,\pi]$ دارای تغییری محدود باشد.

با استفاده از آن‌چه ثابت کردیم، می‌توان حکم کرد که

$$a'_n=\frac{A'_n}{n}-\frac{b''_n}{n}=\frac{A'_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$b'_n=\frac{B'_n}{n}+\frac{a''_n}{n}=\frac{B'_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

که در آن‌ها، برای A'_n و B'_n، شبیه (۱۱) و (۱۳) داریم:

$$A'_n=-\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m}\delta_\mu^{(1)}sinn\xi_\mu \qquad (۱۶)$$

$$B'_n=\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=0}^{m}\delta_\mu^{(1)}\cos n\xi_\mu \qquad (۱۷)$$

$(n=۱،۲،۳، \dots)$، که در آن‌ها

$$\delta_\mu^{(1)}=f'(\xi_\mu+0)-f'(\xi_\mu-0) \quad (\mu=۱،۲، \dots، m)$$

$$\delta_0^{(1)}=f'(-\pi+0)-f'(\pi-0)$$

اگر مقدارهای a'_n و b'_n را در دستورهای (۱۰) و (۱۲) قرار دهیم، سرانجام برای این حالت به‌دست می‌آید:

$$a_n=\frac{A_n}{n}-\frac{B'_n}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (۱۸)$$

$$b_n=\frac{B_n}{n}+\frac{A'_n}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (۱۹)$$

در این جا هم می‌توان، به‌مفهومی، عکس این حکم را ثابت کرد. فرض کنید، ضریب‌های فوریهٔ تابع $f(x)$، به‌صورت (۱۸) و (۱۹) باشند؛ در ضمن، مقدارهای A_n، B_n، A'_n و B'_n با دستورهای (۱۱)، (۱۳)، (۱۶) و (۱۷)، برای انتخاب مفروضی از عددهای $\{\delta_\mu^{(0)}\}$، $\{\delta_\mu^{(1)}\}$، معین شوند. در این صورت، برای تابع $f(x)$ می‌توان گفت که، همه‌جا پیوسته است و همه‌جا در $(\pi،-\pi)$ مشتق‌های پیوسته‌ای دارد، به‌جز نقطه‌های ξ_μ، که در آن‌جا، تابع و مشتق آن، جهش‌هایی برابر $\delta_\mu^{(0)}$ و $\delta_\mu^{(1)}$ را تحمل می‌کند؛ علاوه بر این

$$f(-\pi+0)-f(\pi-0)=\delta_0^{(0)}$$

$$f'(-\pi+0)-f'(\pi-0)=\delta_0^{(1)}$$

اثبات را می‌توان، مثل حالت قبل، با ساختن تابع کمکی $\bar{f}(x)$ انجام داد. در این جا، $\bar{f}(x)$ را می‌توان از تابع‌های درجه دوم تشکیل داد، به‌نحوی که خود تابع و مشتق آن، همان جهش‌ها را در نقطه‌های موردنظر داشته باشند. به‌سادگی روشن می‌شود که تفاضل $f(x)-\bar{f}(x)$ به‌رشتهٔ فوریه با ضریب‌های از مرتبهٔ $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ بسط داده می‌شود. در این صورت، نه‌تنها این رشته، بلکه رشته‌ای هم که از مشتق‌گیری جمله به‌جملهٔ آن به‌دست می‌آید، با ضریب‌های از مرتبهٔ $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$، به‌طور یکنواخت متقارب می‌شوند و، در نتیجه، تفاضل $f(x)-\bar{f}(x)$ متناوب خواهد شد (با دورهٔ تناوب 2π) و همراه با مشتق خود، پیوسته است. از همین‌جا، درستی حکم مطلوب، ثابت می‌شود.

۳°. در حالت کلی، فرض کنید f، f'، ...، $f^{(k-1)}$ در $(\pi،-\pi)$ پیوسته باشند،

به‌جز در نقطه‌های ξ_μ $(\mu = 0, 1, \dots, m)$ که در آن‌ها، همهٔ این تابع‌ها جهش‌هایی، به‌ترتیب، برابر با

$$\delta_\mu^{(0)}, \delta_\mu^{(1)}, \dots, \delta_\mu^{(k-1)} \quad (\mu = 0, 1, \dots, m)$$

دارند. علاوه براین، فرض می‌کنیم، همه‌جا (به‌جز در «نقطه‌های جهش») مشتق $f^{(k)}$ وجود داشته باشد و در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ دارای تغییری محدود باشد. این نمادها را وارد می‌کنیم:

$$A_n^{(i)} = -\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m} \delta_\mu^{(i)} \sin n\xi_\mu, \quad B_n^{(i)} = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=0}^{m}{}' \delta_\mu^{(i)} \cos n\xi_\mu$$

$(i = 0, 1, \dots, k-1$ و $n = 1, 2, 3, \dots)$. در این صورت (به‌ترتیب، در حالت زوج بودن و فرد بودن k) داریم:

$$a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{B_n'}{n^2} - \frac{A_n''}{n^3} + \frac{B_n'''}{n^4} + \dots \begin{cases} +(-1)^{\frac{k-1}{2}} \dfrac{A_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right), \\ +(-1)^{\frac{k}{2}} \dfrac{B_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right), \end{cases} \tag{۲۰}$$

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{A_n'}{n^2} - \frac{B_n''}{n^3} - \frac{A_n'''}{n^4} + \dots \begin{cases} +(-1)^{\frac{k-1}{2}} \dfrac{B_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right), \\ +(-1)^{\frac{k}{2}} \dfrac{A_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right) \end{cases} \tag{۲۱}$$

واگر، برعکس، این دستورها معلوم باشند، می‌توان، مثل قبل، دربارهٔ نقطه‌های جهش و مقدار جهش خود تابع و $(k-1)$ مشتق آن، نتیجه گرفت.

۷۰۹. حالتی که تابع، در بازهٔ $[0, \pi]$ داده شده باشد. می‌دانیم، اگر تابع $f(x)$ تنها از 0 تا π داده شده باشد، آن‌وقت با رعایت شرط‌هایی، می‌توان آن را، در این بازه، به‌رشته‌ای برحسب کسینوس‌ها

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi) \tag{۲۲}$$

ویا به‌رشته‌ای برحسب سینوس‌ها

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (0 < x < \pi) \tag{۲۳}$$

بسط داد [۶۸۹]. اغلب، در عمل، به‌چنین بسط‌هایی برمی‌خوریم. نتیجه‌گیری‌های شمارهٔ

قبل، برای این حالت هم درست‌اند، به‌شرطی که فرض کنیم، تابع $f(x)$، در بازهٔ $[-\pi, 0]$ ادامه یافته است: (a) به‌صورت زوج، برای به‌دست آوردن رشتهٔ کسینوس‌ها و یا (b) به‌صورت فرد، برای به‌دست آوردن رشتهٔ برحسب سینوس‌ها.

نقطه‌هایی از بازهٔ $(0, \pi)$ را که، در آن‌ها، تابع $f(x)$ و مشتق‌های آن تا مشتق مرتبهٔ $(k-1)$ام دارای جهش است، این نقطه‌ها می‌گیریم:

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_m < \pi$$

و خود مقدار جهش‌ها را، مثل قبل، به‌این ترتیب، نشان می‌دهیم:

$$\delta_\mu^{(0)}, \delta_\mu^{(1)}, \ldots, \delta_\mu^{(k-1)} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

در حالت ادامهٔ تابع به‌صورت زوج، جهش‌های نقطه‌های ξ_μ، در نقطه‌های $\xi_\mu -$ هم به‌وجود می‌آیند، منتهی با علامت مخالف؛ ولی ضمن ادامهٔ تابع به‌صورت فرد، جهش‌های مربوط به نقطه‌های $\xi_\mu -$، با حفظ علامت‌ها ایجاد می‌شوند. سپس، برای تابع زوج

$$f(+0) - f(-0) = 0, \quad f(-\pi+0) - f(\pi-0) = 0$$

درحالی که برای تابع فرد، جهش‌های

$$f(+0) - f(-0) = 2f(+0),$$

$$f(-\pi+0) - f(\pi-0) = -2f(\pi-0)$$

درحالت کلی، مخالف صفرند. سرانجام، به‌این نکته هم توجه کنیم که، ضمن مشتق‌گیری، تابع زوج به‌تابع فرد، و تابع فرد به‌تابع زوج تبدیل می‌شود. اگر همهٔ این‌ها را درنظر بگیریم، آن‌وقت برای ضریب‌های a_n و b_n از بسط تابع برحسب کسینوس‌ها یا سینوس‌ها، به‌ترتیب، به‌همان دستورهای (۲۰) و (۲۱) می‌رسیم، منتهی با این مقدارها برای $A_n^{(i)}$ و $B_n^{(i)}$:

$$\left.\begin{aligned} A_n^{(i)} &= -\frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{m} \delta_\mu^{(i)} \sin n\xi_\mu \\ B_n^{(i)} &= \frac{2}{\pi}\left\{ \sum_{\mu=1}^{m} \delta_\mu^{(i)} \cos n\xi_\mu + f^{(i)}(+0) - \cos n\pi \cdot f^{(i)}(\pi-0) \right. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

در ارتباط با این دستورها، یادداشت مهم زیر لازم به‌نظر می‌رسد. فرض کنید، تابع $f(x)$، همراه با مشتق‌های خود تا مرتبهٔ $(k-1)$ام، در بازهٔ $[0, \pi]$، پیوسته باشد؛ به‌جز این، فرض کنید، مشتق kام هم وجود دارد و در این بازه دارای تغییری محدود است.

دست‌کم درحالت کلی، نمی‌توان دربارهٔ ضریب‌های a_n و b_n ازبسط (۲۲) و (۲۳)، حکم کرد که آن‌ها، از مرتبهٔ $O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$ هستند [بـا ۷۰۷ ودستور (۸) مقایسه‌کنید]. درواقع، اگرچه در ایـن حالت همهٔ مجموع‌های $A_n^{(i)}$ برابر صفرند، ولی ایـن مطلب را، دربارهٔ مجموع‌های

$$B_n^{(i)}=\frac{۲}{\pi}\{f^{(i)}(۰)-cosn\pi.f^{(i)}(\pi)\}$$

نمی‌توان گفت. ادامهٔ تابع به‌صورت فـرد، مصنوعاً، درنقطهٔ $x=۰$، ناپیوستگی به‌وجود می‌آورد، یـا تناوبی بودن خود تابع ومشتق‌های مـرتبهٔ زوج را به‌هم می‌ریزد؛ و ادامهٔ به‌صورت زوج، موجب همین وضع برای مشتق‌های ردیف فرد می‌شود.

بنابراین، اگربخواهیم تابع $f(x)$ رادربازهٔ $[۰,\pi]$ به‌رشته‌ای‌که به‌سرعت‌متقارب باشد، با استفاده‌کامل ازویژگی‌های دیفرانسیلی تابع، بسط دهیم، بهتراست آن رادربازهٔ $[۰,-\pi]$، به‌کمك چندجمله‌ای $r(x)$ ازدرجهٔ $(۲k-۱)$، کـه با شرط‌های زیرتعـریف می‌شود، ادامه دهیم:

$$r(۰)=f(۰),\ r'(۰)=f'(۰),\ \ldots,\ r^{(k-۱)}(۰)=f^{(k-۱)}(۰),$$

$$r(-\pi)=f(\pi),\ r'(-\pi)=f'(\pi),\ \ldots,\ r^{(k-۱)}(-\pi)=f^{(k-۱)}(\pi)$$

[این چندجمله‌ای را می‌توان، مثلاً، با روشی‌که درشمارهٔ ۲۵۷ دیده‌ایم، پیداکرد.] به‌این طریق، ویژگی‌های دیفرانسیلی تابع، درتمامی بازهٔ $[\pi,-\pi]$ حفظ می‌شود.

فرض‌کنید، برای $۰\leqslant x\leqslant\pi$، مثلاً، $f(x)=x-\frac{\pi}{۲}$. برای این‌که بسط تابع را با ضریب‌هایی از مرتبهٔ $O\left(\frac{۱}{n^{۴}}\right)$ به‌دست‌آوریم، تابع‌را به‌کمك‌چندجمله‌ای‌زیر ادامه‌می‌دهیم:

$$r(x)=x-\frac{\pi}{۲}+x^{۲}\left[-\frac{۱۲}{\pi^{۴}}x^{۲}-\frac{۳۰}{\pi^{۳}}x-\frac{۲۰}{\pi^{۲}}\right]=$$

$$=-\frac{۱۲}{\pi^{۴}}x^{۵}-\frac{۳۰}{\pi^{۳}}x^{۴}-\frac{۲۰}{\pi^{۲}}x^{۳}+x-\frac{\pi}{۲}$$

اگربرای تابعی‌که، به‌این ترتیب، ادامه یافته است، رشتهٔ فوریهٔ معمولی را تشکیل دهیم، آن‌وقت، برای تابع $f(x)=x-\frac{\pi}{۲}$، دربازهٔ $[۰,\pi]$، بسطی‌که به‌سرعت متقارب‌می‌شود،

به‌دست می‌آید:

$$\frac{۲۴۰}{\pi^۳}\sum_{\nu=۱}^{\infty}\left[\frac{۱}{(۲\nu-۱)^۴}-\frac{۱۲}{\pi^۲(۲\nu-۱)^۶}\right]\cos(۲\nu-۱)x+$$

$$+\frac{۱۴۴۰}{\pi^۴}\sum_{\nu=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲\nu)^۵}\sin ۲\nu x$$

روشی که در این بسط مورد استفاده قرار گرفت، از آ. س. مالی‌یف است.

۷۱۰. روش جداکردن ویژگی‌ها. فرض کنیم، تابع $f(x)$ در بازهٔ $[۰, \pi]$، به‌رشتهٔ (۲۲) برحسب کسینوس‌ها، یا به‌رشتهٔ (۲۳) برحسب سینوس‌های زاویه‌هایی ازمضرب‌های x*، داده شده باشد؛ در ضمن، ضریب‌های این بسطها به‌صورت (۲۰) یا (۲۱) باشند که در آن‌ها، $A_n^{(i)}$ و $B_n^{(i)}$ با دستورهای (۲۴) معین می‌شوند. تقارب این رشته‌ها، با دشواری روبه‌رو می‌شود وعلت آن، ناپیوستگی خود تابع و مشتق‌های آن است. آکادمیسین آ. ن. کریلوف، برای این‌حالت، روش خاص جدا کردن ویژگی‌ها را پیشنهاد کرده است که، به‌کمك آن، تقارب رشته‌ها، با موقعیت بهتری مواجه می‌شوند.

درواقع، ماهیت این روش، در شرحی که قبلاً داده‌ایم، نهفته است. این روش، عبارت‌است ازچنان‌تابع کمکی $f^*(x)$ (به‌صورت قطعه‌به‌قطعه چندجمله‌ای) با بسط مثلثاتی معلوم، به‌نحوی‌که همهٔ ویژگی‌های تابع مفروض $f(x)$ را، که ازبسط آن روشن است، درخود جذب کرده باشد. اگر این تابع کمکی را ازتابع $f(x)$ و، متناظر باآن، بسط‌تابع کمکی را ازبسط تابع مفروض کم کنیم، درواقع، بخشی ازبسط مفروض راکه بدمتقارب می‌شود، ازآن جداکرده‌ایم، به‌نحوی‌که رشتهٔ باقی‌مانده، به‌سرعت متقارب می‌شود.

با همهٔ این‌ها، اگربتوانیم بخشی راکه بد متقارب می‌شود (بااستفاده ازبسط‌هایی که برای ما معلوم است) به‌طور مستقیم جمع کنیم، نتیجهٔ لازم، ساده‌تر به‌دست می‌آید.

۱°. فرض کنید رشتهٔ (۲۲) برحسب کسینوس‌ها داده شده باشد ودرضمن

$$a_n=\frac{A_n}{n}+O\left(\frac{۱}{n^۲}\right) \text{ و } A_n=-\frac{۲}{\pi}\sum_{\mu=۱}^{m}c_\mu \sin n\xi_\mu \qquad (۲۵)$$

---

*) اغلب درعمل باموردهایی برخورد می‌کنیم که باید، بسط برحسب کسینوس‌ها یا سینوس‌ها را دربازهٔ $[۰, l]$ و نسبت به‌زاویه‌هایی از مضرب‌های $\frac{\pi x}{l}$ انجام داد. این‌گونه بسط‌ها را، می‌توان، از بسطی که‌درمتن مورد بررسی قرار گرفته است، با تبدیل x به $\frac{\pi x}{l}$ به‌دست‌آورد.

نقطه‌های $\pi>\xi_m>\dots>\xi_2>\xi_1>0$ و، همچنین عددهای $\{c_\mu\}$، داده شده‌اند. مجموع زیررا، به‌طور مستقیم، معین می‌کنیم:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n}\cos nx$$

تبدیل‌های ساده، ما را به‌این نتیجه می‌رساند:

$$g(x=\sum_{\mu=1}^{m}\frac{c_\mu}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-\xi_\mu)}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+\xi_\mu)}{n}\right]=\sum_{\mu=1}^{m}\frac{c_\mu}{\pi}\varphi_\mu(x)$$

درضمن، مجموع

$$\varphi_\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-\xi_\mu)}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+\xi_\mu)}{n}$$

به‌سادگی محاسبه می‌شود، به‌شرطی‌که بسط آشنای زیررا به‌یاد بیاوریم [۶۹۰، ۲)]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n}$$

که برای $2\pi>z>0$، مجموعی برابر $\frac{\pi-z}{2}$ و برای $0>z>-2\pi$، مجموعی برابر $-\frac{\pi+z}{2}$ دارد. بنابراین

$$\varphi_\mu(x)=\begin{cases}-\frac{\pi+x-\xi_\mu}{2}-\frac{\pi-x-\xi_\mu}{2}=-\pi+\xi_\mu & (x<\xi_\mu)\\ \frac{\pi-x+\xi_\mu}{2}-\frac{\pi-x-\xi_\mu}{2}=\xi_\mu & (x>\xi_\mu)\end{cases}$$

از آن‌جا $g(x)\equiv\text{const.}=\gamma_\mu$، برای هر بازه‌ای از $(\xi_\mu,\xi_{\mu+1})(\mu=0,1,2,\dots,m)$* و در نقطه‌های $\xi_\mu(\mu=1,2,\dots,m)$، جهش‌هایی برابر c_μ تحمل می‌کند. بنابراین داریم: $\gamma_\mu-\gamma_{\mu-1}=c_\mu$ و از آن‌جا

$$\gamma_\mu=\gamma_0+\sum_{\lambda=1}^{\mu}c_\lambda \qquad (۲۶)$$

علاوه براین، چون $\varphi_\mu(\xi_\mu+0)=-\pi$، بنابراین

*) برای سادگی کار، فرض می‌کنیم: $\xi_0=0$ و $\xi_{m+1}=\pi$.

$$\gamma_0 = g(0) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{c_\mu}{\pi}(-\pi+\xi) = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \xi_\eta - \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \qquad (۲۷)$$

به‌این ترتیب، تابع $g(x)$، کاملاً معین می‌شود.

مثلاً، فرض کنید، این بسط را داشته باشیم:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n} \cos nx$$

در این‌جا

$$A_n = -\frac{2}{\pi} c_1 \sin n\frac{\pi}{2}$$

در ضمن $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ و $\xi_1 = \frac{\pi}{2}$. در این‌صورت

$$\gamma_0 = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

ویا به‌طور مستقیم

$$\gamma_0 = g(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu-1} = \frac{\pi}{4}$$

سپس

$$\gamma_1 = \gamma_0 + c_1 = -\frac{\pi}{4}$$

وسرانجام، روشن می‌شود که تابع $g(x)$، به‌ازای $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$، برابر $\frac{\pi}{4}$ و، به‌ازای $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$، برابر $-\frac{\pi}{4}$ است.

۲°. اکنون رشتهٔ (۲۳)، برحسب سینوس‌ها را درنظرمی گیریم، درضمن

$$b_n = \frac{B_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

که درآن: $$B_n = \frac{2}{\pi}\left\{\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \cos n\xi_\mu + c_0 - c_{m+1}\cos n\pi\right\} \qquad (۲۸)$$

می‌خواهیم، مجموع رشتهٔ زیررا، به‌طور مستقیم، به‌دست آوریم:

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n}\sin nx$$

داریم:

$$h(x)=\sum_{\mu=1}^{m}\frac{c_\mu}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+\xi_\mu)}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-\xi_\mu)}{n}\right]+$$

$$+\frac{2c_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{c_{m+1}}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+\pi)}{n}+\frac{\sin n(x-\pi)}{n}\right]=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{m}\frac{c_\mu}{\pi}\varphi_\mu(x)+\frac{c_0}{\pi}(\pi-x)-\frac{c_{m+1}}{\pi}\varphi(x)$$

درضمن، برای همهٔ مقدارهای x:

$$\varphi(x)=\frac{\pi-(x+\pi)}{2}-\frac{\pi+(x-\pi)}{2}=-x,$$

$$\varphi_\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-(x+\xi_\mu)}{2}-\dfrac{\pi+(x-\xi_\mu)}{2}=-x & (x<\xi_\mu)\\ \dfrac{\pi-(x+\xi_\mu)}{2}+\dfrac{\pi-(x-\xi_\mu)}{2}=\pi-x & (x>\xi_\mu)\end{cases}$$

روشن است که

$$h(+0)=c_0,\ h(\pi-0)=c_{m+1};$$

$$h(\xi_\mu+0)-h(\xi_\mu-0)=c_\mu \quad (\mu=1,2,\dots,m)$$

درضمن، درهمه‌جا (به‌استثنای نقطه‌های ناپیوستگی)، مشتق $h'(x)=\text{const.}=\gamma$ وجود دارد، که در آن

$$\gamma=\frac{1}{\pi}\left(c_{m+1}-c_0-\sum_{\mu=1}^{m}c_\mu\right) \qquad (۲۹)$$

تابع $h(x)$ در درون هریك از بازه‌های $(\xi_\mu,\xi_{\mu+1})$، یك تابع خطی با ضریب γ برای x است:

$$h(x)=\gamma x+\delta_\mu \quad (x_\mu<x<x_{\mu+1})$$
$$(\mu=0,1,\dots,m)$$

درضمن

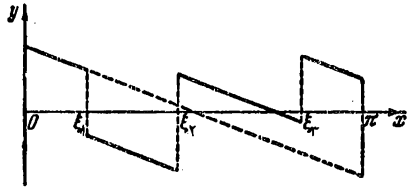
$$\delta_0 = c_0,\ \delta_1 = c_0 + c_1,\ \ldots,\ \delta_m = c_0 + c_1 + \cdots + c_m \qquad (۳۰)$$

نمودار تابع $h(x)$ را می‌توان به‌سادگی رسم کرد (شکل ۱۳۶). روشن است، خط راستی که نقطه‌های

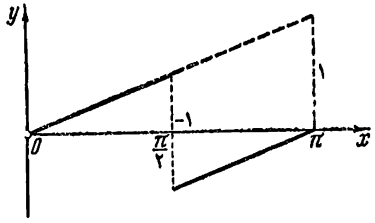
$$(0, c_0),\ \left(\pi, c_{m+1} - \sum_1^m c_\mu\right)$$

را به‌هم وصل می‌کند، ضریب زاویه‌ای برابر γ دارد. بقیهٔ ساختمان، ازروی شکل روشن است.

$c_0 = ۲,\ c_1 = -۲,\ c_2 = ۳,\ c_3 = ۲,\ c_4 = ۱$



شکل ۱۳۶



شکل ۱۳۷

مثلاً، فرض کنید:

$$h(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}\sin n\pi$$

به‌نحوی که $B_n = -\frac{2}{\pi}\cos n\frac{\pi}{2}$، $c_0 = c_2 = 0$، $c_1 = -1$ و $\xi_1 = \frac{\pi}{2}$. دراین‌جا

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x & \left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{\pi}x - 1 = \frac{1}{\pi}(x-\pi) & \left(\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi\right) \end{cases}$$

ازاین نتیجه‌ها استفاده می‌کنیم تا تقارب رشتهٔ زیر بهتر شود:

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}\cos n\frac{\pi}{2}\sin nx \qquad (۳۱)$$

ازآن‌جا که داریم:

$$\frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n^2-1)}$$

بنابراین، دراین‌حالت، خواهیم داشت:

$$b_n=-\frac{2}{\pi}\frac{cosn\frac{\pi}{2}}{n}-\frac{2}{\pi}cosn\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n(n^2-1)}$$

اگر تابع $h(x)$ را، که هم‌اکنون پیدا کردیم، از تابع $f(x)$ کم کنیم، آن‌وقت، برای تفاضل $f(x)-h(x)$، این بسط به‌دست می‌آید:

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosn\frac{\pi}{2}}{n(n^2-1)}sinnx$$

که ضریب‌های آن، از مرتبهٔ $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ هستند.

۳°. به‌رشتهٔ (۲۲) برحسب کسینوس‌ها برمی‌گردیم وفرض می‌کنیم:

$$a_n=\frac{A_n}{n}-\frac{B'_n}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

که در آن، A_n همان دستور (۲۵) است و B'_n از (۲۸) و با تبدیل ثابت‌های c_0، c_1، ...، c_{m+1} به‌ثابت‌های دیگر c'_0، c'_1، ...، c'_{m+1} به‌دست می‌آید. ازآن‌جاکه می‌توانیم، بخشی‌از رشتهٔ مثلثاتی را، که به‌جمله‌های درجهٔ اول مربوط می‌شوند، جدا کنیم [۱° را ببینید]، بنابراین، به‌جمله‌های درجهٔ دوم می‌پردازیم.

فرض کنید (برای سادگی‌کار، به‌جای B'_n از نماد B_n استفاده می‌کنیم):

$$g_1(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n^2}cosnx$$

روشن است که $g_1(x)$، تابع پیوسته‌ای از x است. اگر ازاین رشته، جمله‌به‌جمله، مشتق بگیریم، به‌رشتهٔ جدیدی می‌رسیم:

$$g'_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n}sinnx$$

که مجموع آن را، هم‌اکنون، به‌دست آوردیم [۲°]. ازآن‌جاکه رشتهٔ اخیر، درهر بخش

بسته‌ای‌ازبازهٔ $[\pi\ ,\circ]$، که نه‌شامل دوانتهای این‌بازه باشد ونه‌شامل نقطه‌های ناپیوستگی*، به‌طور یکنواخت متقارب است، بنابراین مجموع آن (به‌استثنای ایـن نقطه‌ها)، درواقع، همان مشتق تابع $g_1(x)$ است. به‌این‌ترتیب، با توجه به ۲°

$$g_1'(x)=\gamma x+\delta_\mu \quad (\xi_\mu<x<\xi_{\mu+1})$$
$$(\mu=\circ,1,\ldots,m)$$

که درآن، γ و δ_μ با دستورهای (۲۹) و (۳۰) به‌دست می‌آیند. باتوجـه به‌پیوستگی، ازآن انتگرال می‌گیریم:

$$g_1(x)=\frac{1}{2}\gamma x^2+\delta_\mu x+\varepsilon_\mu \quad (\xi_\mu\leqslant x\leqslant\xi_{\mu+1})$$
$$(\mu=\circ.1,\ldots,m)$$

درنقطه‌های تقسیم $\xi_{\mu+1}$، مقدارتابع $g_1(x)$، به‌طور هم‌زمان، بـا دودستور معین می‌شود، به‌نحوی که

$$\frac{1}{2}\gamma\xi_{\mu+1}^2+\delta_\mu\xi_{\mu+1}+\varepsilon_\mu=\frac{1}{2}\gamma\xi_{\mu+1}^2+\delta_{\mu+1}\xi_{\mu+1}+\varepsilon_{\mu+1}$$

ازآن‌جا، اگر به‌یاد بیاوریم که $\delta_{\mu+1}=\delta_\mu+c_{\mu+1}$:

$$\varepsilon_{\mu+1}=\varepsilon_\mu-c_{\mu+1}\xi_{\mu+1}$$

اگر $\varepsilon_\circ$ معلـوم باشد، آن‌وقت با ایـن دستور می‌توان پشت‌سرهم ε_1، ...، ε_m را به‌دست آورد. واما $\varepsilon_\circ$ را می‌توان از برابری زیرپیداکرد:

$$\varepsilon_\circ=g_1(\circ)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n^2}$$

مجموع این رشته را، به‌صورت نهائی هم می‌توان به‌دست آورد، به‌شرطی‌که عبارت B_n را به‌یاد آوریم وازبسط آشنای زیرهم [۶۹۰، ۹)] استفادکنیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12} \qquad (\circ\leqslant x\leqslant 2\pi)$$

مثلاً، اگرداشته باشیم:

$$g_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\frac{\pi}{3}}{n^2}\cos nx$$

---

*) پیوستگی، فاشی از ویژگی‌هـای آشنای رشتهٔ $\sum_1^\infty\frac{\sin nz}{n}$ است.

آن‌وقت، داریم:

$$B_n=-1+cosn\frac{\pi}{3}\ ,\ c_0=-\frac{\pi}{2}\ ,\ c_1=\frac{\pi}{2}\ ,\ c_2=0\ ,\ \xi_1=\frac{\pi}{3}\ ,$$

$$\gamma=0,\quad \delta_0=-\frac{\pi}{2},\quad \delta_1=0$$

و برای پیداکردن $\varepsilon_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosn\frac{\pi}{3}}{n^2}$، در بسط مذکور در بالا، ابتدا $x=0$ و سپس $x=\frac{\pi}{3}$ قرار می‌دهیم؛ درنتیجه، به‌دست می‌آید $\varepsilon_0=\frac{5\pi^2}{36}$. در این صورت:

$$\varepsilon_1=\varepsilon_0-c_1\xi_1=-\frac{\pi^2}{36}$$

و سرانجام

$$g_1(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}x+\frac{5\pi^2}{36} & \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}\right)\\ -\frac{\pi^2}{36} & \left(\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\pi\right)\end{cases}$$

۴°. اکنون در رشتهٔ (۲۳) برحسب سینوس‌ها، فرض می‌کنیم:

$$b_n=\frac{B_n}{n}+\frac{A'_n}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

که در آن B_n، مثل قبل، بادستور (۲۸) بیان می‌شود و A'_n، شبیه (۲۵)، با تبدیل c به c'، ساخته می‌شود. در این‌جا هم، کافی است، به‌جمله‌های درجهٔ دوم بپردازیم.

این رشته را هم درنظر می‌گیریم (دوباره A_n به‌جای A'_n):

$$h_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n^2}sinnx$$

که تابعی است پیوسته. مشتق می‌گیریم:

$$h'_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n}cosnx=g(x)$$

[۱° را ببینید]. مثل قبل، به‌سادگی قانع می‌شویم که (به‌جز در دوانتهای بازه ونقطهٔ ξ_μ)، واقعاً هم $g(x)$ مشتق $h_1(x)$ است. با توجه به ۱°

$$h_1'(x)=\gamma_\mu \quad [\xi_\mu<x<\xi_{\mu+1}\ (\mu=0,1,\dots,m)]$$

که در آن، γ_μ با دستورهای (۲۶) و (۲۷) معین می‌شود. ازاین‌جا

$$h_1(x)=\gamma_\mu x+\delta_\mu \quad (\xi_\mu\leqslant x\leqslant\xi_{\mu+1})$$

درضمن $\delta_0=0$ [زیرا $h_1(0)=0$] و بقیهٔ δ_μها پشت‌سرهم، ازشرط پیوستگی تابع $h_1(x)$ درنقطه‌های $\xi_{\mu+1}$ به‌دست می‌آیند:

$$\gamma_\mu\xi_{\mu+1}+\delta_\mu=\gamma_{\mu+1}\xi_{\mu+1}+\delta_{\mu+1} \quad (\mu=0,1,\dots,m-1)$$

که از آن‌جا، به‌دست می‌آید:

$$\delta_{\mu+1}=\delta_\mu-c_{\mu+1}\xi_{\mu+1}$$

مثلاً، فرض کنید، این رشته داده شده باشد:

$$h_1(x)=\sin x-\frac{1}{9}\sin 3x+\frac{1}{25}\sin 5x-\dots$$

که آن را به‌صورت زیرهم، می‌توان نشان داد:

$$h_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^2}\sin nx$$

دراین‌جا: $\xi_1=\frac{\pi}{2}$، $c_1=-\frac{\pi}{2}$، $\gamma_0=\frac{\pi}{4}$، $\gamma_1=-\frac{\pi}{4}$، $\delta_0=0$ و $\delta_1=\frac{\pi^2}{4}$ [با مثال ۱° مقایسه کنید]، به‌نحوی که

$$h_1(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}x & \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\\ -\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi}{4}(\pi-x) & \left(\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\right)\end{cases}$$

۵°. با روش مشابهی، می‌توان بخشی ازرشتهٔ مثلثاتی راکه به‌جمله‌های از درجهٔ بالاتر مربوط‌اند، دربسط ضریب‌ها، جمع کرد. به‌جای این‌که طرحی کلی بدهیم، عملی‌تر است که درهرمجموع مشخص مفروض، آن‌چه را، دربالا، ضمن بررسی رشته‌ها درشکل کلی خود، آوردیم، درنظر بگیرید.

برای مثال، به‌رشته (۳۱) برمی‌گردیم و، دراین‌جا، فرض می‌کنیم:

$$\frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^3(n^2-1)}$$

دراین‌صورت، b_n، چنین می‌شود:

$$b_n = -\frac{۲}{\pi}\cos n\frac{\pi}{۲}\cdot\frac{۱}{n} - \frac{۲}{\pi}\cos n\frac{\pi}{۲}\cdot\frac{۱}{n^۳} - \frac{۲}{\pi}\cos n\frac{\pi}{۲}\cdot\frac{۱}{n^۳(n^۲-۱)}$$

تابع $f(x)$ هم، متناظر با آن، به‌سه‌جمله تقسیم می‌شود. اولین آن‌ها، $h(x)$، تابعی است که در ۲° محاسبه کرده‌ایم. جملهٔ دوم را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$g(x) = -\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{۲}}{n^۳}\sin nx$$

دو بار مشتق می گیریم، به‌دست می آید:

$$g'(x) = -\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{۲}}{n^۲}\cos nx\ ;\ g''(x) = \frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{۲}}{n}\sin nx$$

تابع اخیر، تنها درعلامت، با $h(x)$ فرق دارد:

$$g''(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{\pi}x & \left(۰ \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{۲}\right) \\ -\frac{۱}{\pi}(x-\pi) & \left(\frac{\pi}{۲} \leqslant x \leqslant \pi\right) \end{cases}$$

ازآن‌جا، با انتگرال گیری، به‌دست می‌آید:

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{۲\pi}x^۲ + \gamma_۰ & \left(۰ \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{۲}\right) \\ -\frac{۱}{۲\pi}(x-\pi)^۲ + \gamma_۱ & \left(\frac{\pi}{۲} \leqslant x \leqslant \pi\right) \end{cases}$$

دومقدار حاصل را، برای $g'\left(\frac{\pi}{۲}\right)$ برابر قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید: $\gamma_۱ = \gamma_۰$. مقدار $\gamma_۰$ هم، به‌طور مستقیم و با قرار دادن $x = ۰$ دربسط $g'(x)$ به‌دست می‌آید: $\gamma_۰ = \frac{\pi}{۲۴}$.

اگر دوباره انتگرال بگیریم و به‌حساب آوریم که $g(۰) = g(۲\pi) = ۰$، نتیجه می‌شود:

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{۶\pi}x^۳ + \gamma_۰ x & \left(۰ \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{۲}\right) \\ -\frac{۱}{۶\pi}(x-\pi)^۳ + \gamma_۰(x-\pi) & \left(\frac{\pi}{۲} \leqslant x \leqslant \pi\right)^* \end{cases}$$

به‌این ترتیب، تابع $g(x)$ به‌طورکامل معین می‌شود و، سرانجام، داریم:

*) اگر دو مقدار حاصل را، برابر قرار دهیم، دوباره به‌دست می‌آید، $\gamma_۰ = \frac{\pi}{۲۴}$.

$$f(x)=h(x)+g(x)+\varphi(x)$$

که در آن، اگرچه $\varphi(x)$ به صورت نهائی خود معلوم نیست، ولی بسط آن را در اختیار داریم:

$$\varphi(x)=-\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{۲}}{n^{۳}(n^{۲}-۱)}\sin\pi x$$

که ضریب‌های آن ازمرتبهٔ $O\left(\frac{۱}{n^{۵}}\right)$ است و به سرعت نزول می‌کند.

§۶. انتگرال فوریه

۷۱۱. انتگرال فوریه، به عنوان حالت حدی رشتهٔ فوریه. در این جا می‌خواهیم به نکته‌هایی بپردازیم که فوریه را، گرچه دور از دقت‌کامل، به دستور انتگرالی‌خودش رسانید*.

اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ متناهی $[-l, l]$ مفروض باشد، آن وقت با شرط‌های معینی‌که در این جا مورد نظر ما نیست، می‌توان‌آن را به صورت یك رشتهٔ مثلثاتی، دراین بازه، نشان داد:

$$f(x)=\frac{a_{۰}}{۲}+\sum_{m=۰}^{\infty}a_m\cos\frac{m\pi x}{l}+b_m\sin\frac{m\pi x}{l}$$

که در آن، داریم:

$$a_m=\frac{۱}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{m\pi u}{l}du,\quad b_m=\frac{۱}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\sin\frac{m\pi u}{l}du$$
$$(m=۰,۱,۲,\ldots)\qquad(m=۱,۲,\ldots)$$

[۶۸۸ را ببینید]. اگر به جای a_m و b_m، مقدارشان را قرار دهیم، می‌توان رشته را به‌این صورت نوشت:

$$f(x)=\frac{۱}{۲l}\int_{-l}^{l}f(u)du+\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۱}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{m\pi}{l}(u-x)dx \qquad (۱)$$

---

*) کوشی هم، بدون این‌که در این مورد با فوریه ارتباطی داشته باشد، این دستور را به‌دست آورده بود.

اکنون فرض کنید، تابع $f(x)$، در تمامی بازهٔ نامتناهی $(-\infty, +\infty)$ تعریف شده باشد. در این حالت، x هرچه باشد، مقدار متناظر $f(x)$، به ازای هر $l > |x|$، با بسط (۱) بیان می‌شود. اگر در این جا، برای $l \to +\infty$، به حد عبور کنیم، کوشش می‌کنیم «شکل حدی» این بسط را به دست آوریم.

در مورد جملهٔ اول سمت راست (۱)، طبیعی است قبول کنیم که به سمت صفر میل میل می‌کند*. با برگشت به رشتهٔ نامتناهی، می‌توانیم ضریب‌های $\frac{m\pi}{l}$ در زیر علامت کسینوس را، همچون مقدارهای جدا ازهم

$$z_1 = \frac{\pi}{l},\quad z_2 = \frac{2\pi}{l},\ \ldots,\ z_m = \frac{m\pi}{l},\ \ldots$$

از یك متغیر z، که به طور پیوسته از ۰ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، در نظر بگیریم؛ درضمن، روشن است که نمو

$$\Delta z_m = z_{m+1} - z_m = \frac{\pi}{l}$$

به ازای $l \to +\infty$، به سمت صفرمیل می‌کند. با این علامت‌گذاری‌ها، رشتهٔ ما، به‌این صورت نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \Delta z_{m-1} \int_{-l}^{l} f(u)\cos z_m(u-x)\,du$$

این رشته، مجموع انتگرالی را، برای تابع

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(u-x)\,du$$

از z و در بازهٔ $[+\infty, 0]$، به‌یاد می‌آورد. اگر به‌ازای $l \to +\infty$، به حد عبور کنیم، به‌جای مجموع، به انتگرال می‌رسیم؛ از همین راه، دستور انتگرال فوریه را هم به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)\,du$$

---

*) مثلاً، با فرض متقارب بودن انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du$، این مطلب ثابت می‌شود.

این دستور را می‌توان، با بازکردن عبارت کسینوس تفاضل، به‌این صورت نوشت:

$$f(x)=\int_0^{\infty}[a(z)\cos zx+b(z)\sin zx]dz$$

که در آن: $a(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos zu\,du$ و $b(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin zu\,du$.

در این‌جا، شباهت با بسط مثلثاتی آشکار است؛ تنها تفاوت در این‌است که مثلاً m، که در رشته، عددهای طبیعی را می‌پذیرد، در این‌جا با پارامتر z، که به‌طور پیوسته تغییر می‌کند، عوض شده است و رشتهٔ نامتناهی، به انتگرال تبدیل شده است. ضریب‌های $a(z)$ و $b(z)$ هم، بنا به‌ساختمان خود، ضریب‌های فوریه را به خاطر می‌آورند.

البته، همهٔ این‌ها، ماهیتی آگاهی‌دهنده دارند و هنوز باید دربارهٔ شرط‌های واقعی درستی دستور فوریه، به بررسی خود ادامه دهیم. ولی، با آوردن استدلال‌های دقیق، در ضمن، مرحلهٔ اصلی بحث خود را دربارهٔ رشته‌های فوریه، دنبال خواهیم کرد.

۷۱۲. ملاحظه‌های مقدماتی. اکنون فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$، در بازهٔ نامتناهی $(-\infty, +\infty)$، به طور مطلق انتگرال‌پذیر باشد. در این بازه، انتگرال

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^{A}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x_0)du$$

را در نظر می‌گیریم که، در آن، A عدد مثبت محدود دلخواهی است و x_0، مقدار ثابت دلخواهی از x. این انتگرال، به مجموع جزئی رشتهٔ فوریه شباهت دارد: و از آن، انتگرال فوریه

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x_0)du \qquad (۲)$$

در حد و به ازای $A\to+\infty$، به دست می‌آید.

از آن جا که تابع $f(x)$، به ازای هر مقدار محدود $B>0$، در بازهٔ $[-B, B]$ به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر است، بنابراین بنا به‌قضیه IV* در شمارهٔ ۴۹۷، داریم:

$$\int_0^{A}dz\int_{-B}^{B}f(u)\cos z(u-x_0)du=\int_{-B}^{B}f(u)du\int_0^{A}\cos z(u-x_0)dz=$$

$$=\int_{-B}^{B}f(u)\frac{\cos z(u-x_0)}{u-x_0}du \qquad (۳)$$

ولی انتگرال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x_0)\,du \qquad (۴)$$

بنا به فرض، با انتگرال متقارب $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|\,du$ محدود می‌شود؛ بنابراین، نسبت به z (چه به ازای $u=+\infty$ و چه به‌ازای $u=-\infty$)، برای هر بازه‌ای از مقدارهای آن، به طور یکنواخت، متقارب می‌شود. به‌این‌ترتیب، انتگرال $\int_{-B}^{B} f(u)\cos z(u-x_0)\,du$، به ازای $B\longrightarrow+\infty$، به سمت حد (۴) خود، به طور یکنواخت میل می‌کند. در نتیجه، اگر در برابری (۳)، به ازای $B\longrightarrow+\infty$، به سمت حد عبور کنیم، در انتگرال سمت چپ، می‌توان عبور حدی را زیر علامت انتگرال انجام داد [قضیهٔ I، شمارهٔ ۴۹۳]*. در این صورت، برای $J(A)$، عبارتی به صورت انتگرال به دست می‌آید:

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0}\,dn$$

که انتگرال دیریکله [۶۸۱] را به خاطر می‌آورد و، در واقع هم، همان نقش را به عهده دارد. با عمل‌های مقدماتی، به‌این صورت منجر می‌شود:

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin At}{t}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}\,dt \qquad (۵)$$

برای ادامهٔ بحث، به‌گزارهٔ زیر، که پیش قضیهٔ اساسی شمارهٔ ۶۸۱ را تکمیل می‌کند، نیاز داریم:

اگر تابع $g(t)$، در بازهٔ نامتناهی $[a,+\infty]$، به طور مطلق انتگرال‌پذیر باشد، آن وقت

$$\lim_{p\longrightarrow+\infty}\int_{a}^{+\infty} g(t)\sin pt\,dt=0$$

---

*) با قضیهٔ IV شمارهٔ ۵۰۸ مقایسه کنید که، در آن جا، تابع زیر انتگرال را، پیوسته فرض کرده بودیم؛ ولی در این‌جا، چنین فرضی را نداشتیم.

و شبیه آن

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^{+\infty} g(t)\cos pt\,dt = 0$$

اثبات کاملاً شبیه اثبات خود پیش قضیهٔ شمارهٔ **۶۸۱** انجام می‌گیرد (برای حالتی که تابع $f(x)$ دارای نقطهٔ خاص است).

۷۱۳. معیارهای کافی. مقدار انتگرال (۲) را S_0 می‌گیریم و دوطرف برابری

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin At}{t}\,dt \qquad (A>0)$$

را در S_0 ضرب و، سپس، نتیجهٔ حاصل را از برابری (۵) کم می‌کنیم. به دست می‌آید:

$$J(A)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(t)\frac{\sin At}{t}\,dt \qquad (۶)$$

به شرطی‌که، شبیه شمارهٔ **۶۸۳**، برای سادگی کار، فرض کنیم:

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0$$

در این‌جاهم، به حالت‌هایی اکتفا می‌کنیم که: (a) تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 پیوسته باشد، یا (b) در این نقطه، از هر دو طرف، دارای ناپیوستگی نوع اول باشد. در ضمن، فرض می‌کنیم:

در حالت (a): $S_0=f(x_0)$،

در حالت (b): $S_0=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

اکنون، با این پیش‌فرض‌ها داریم

معیار دینی. انتگرال فوریهٔ تابع $f(x)$، در نقطهٔ x_0 متقارب است و مقدار S_0 را می‌پذیرد، به شرطی‌که به‌ازای یک $h>0$، انتگرال زیر متقارب باشد:

$$\int_0^h\frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt$$

انتگرال (۶) را، به‌صورت مجموع این انتگرال‌ها می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}=\frac{1}{\pi}\int_0^{h}+\frac{1}{\pi}\int_h^{\infty}$$

انتگرال اول، به ازای $A \to +\infty$، بـه سمت صفر میل می‌کند (با توجه به پیش قضیهٔ اساسی شمارهٔ **۶۸۲**). درمورد انتگرال دوم، ابتدا به‌جای $\varphi(t)$ مقدارش را قرار می‌دهیم و، سپس، آن را به نوبهٔ خود، به دو انتگرال تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{\pi}\int_h^{\infty} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t} \sin At\, dt - \frac{2}{\pi} S_0 \int_h^{\infty} \frac{\sin At}{t}\, dt$$

از آن‌جاکه، بنابرفرض، تابع f انتگرال‌پذیر مطلق است، تابع

$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}$$

هم انتگرال‌پذیر مطلق خواهد بـود و، در این صورت، جملهٔ اول، بـه ازای $A \to \infty$، به سمت صفر میل می‌کند (با توجه به اضافه‌ای که برپیش قضیهٔ اصلی، در انتهـای شمارهٔ **۷۱۲** آوردیم). سرانجام، بنابرتعریف انتگرال ناویژه، انتگرال زیرهم، به‌سمت صفر میل می‌کند:

$$\int_h^{\infty} \frac{\sin At}{t}\, dt = \int_{Ah}^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz$$

از این‌جا، شبیه شمارهٔ **۶۸۴**، می‌توان بـه معیارهـای خاص ساده‌تری دست یافت. به عنوان نمونه، یادآور می‌شویم که، برای تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0، وجود مشتق متناهی یا دست‌کم، وجود مشتق‌های یک‌سوئی متناهی، کافی است.

درمورد انتگرال فوریه، معیار دیگری را هم می‌آوریم.

معیار دیریکله ـ ژردان. انتگرال فوریه از تابع $f(x)$، در نقطهٔ x_0 متقارب است و مقدار S_0 را قبول می‌کند، به شرطی که، تابع $f(x)$، در بازه‌ای مثل $[x_0-h, x_0+h]$ به مرکز این نقطه، دارای تغییری محدود باشد.

اگر انتگرال

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}\, dt$$

را به‌صورت مجموع دو انتگرال بنویسیم:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{h} + \frac{1}{\pi}\int_h^{\infty}$$

آن‌وقت، دومین انتگرال، همان‌طور که هم‌اکنون ثابت کردیم، به‌ازای $A \to \infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند و انتگرال اول به سمت

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]=S_0$$

میل می‌کند (این بار، بنا بر پیش‌قضیهٔ شمارهٔ ۶۸۵). درواقع، تابع $f(x_0+t)+f(x_0-t)$، برای مقدارهای t از بازهٔ $[h\ ,0]$* دارای تغییری محدود است و، بنابراین، به صورت تفاضل دو تابع صعودی درمی‌آید که، دربارهٔ هرکدام از آن‌ها به‌طور جداگانه، می‌توان از پیش قضیه استفاده کرد.

۷۱۴. تغییر شکل پیش فرض اصلی. تا این‌جا، اساس استدلال‌های ما، بر پیش‌فرضی بود که در آغاز شمارهٔ **۷۱۲** کردیم و، بنابر آن، تابع $f(x)$ در سراسر بازهٔ نامتناهی از $-\infty$ تا $+\infty$، انتگرال‌پذیر مطلق بود. سپس، با درنظرگرفتن شرط‌های مختلف اضافی درمورد رفتار تابع درهمسایگی مستقیم نقطهٔ مورد علاقهٔ ما، یعنی x_0، توانستیم معیارهای کافی، برای نمایش تابع درنقطهٔ x_0، به وسیلهٔ انتگرال فوریه به‌دست آوریم.

درعمل، این پیش‌فرض اساسی، موجب محدودیت‌هایی می‌شود و ما، دراین‌جا، تنها این فرض را نگه می‌داریم که

۱°. تابع $f(x)$، درهربازهٔ متناهی، انتگرال‌پذیر مطلق است؛

۲°. برای $|x|\geqslant H$، تابع $f(x)$ یکنواست° و درضمن

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \qquad (7)$$

به یاد بیاوریم که در استدلال‌های شمارهٔ **۷۱۲**، نقش اصلی به‌عهدهٔ یکنواخت‌بودن تقارب انتگرال (۴)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x_0)\,du$$

نسبت به z و به‌ازای $u=+\infty$ و $u=-\infty$ بود. چون برای $z\geqslant a>0$ داریم:

$$\left|\int_H^u \cos z(u-x_0)\,du\right|\leqslant\frac{2}{z}\leqslant\frac{2}{a}$$

بنابراین، بنا به معیار ۲° در شمارهٔ **۵۱۵**، در این‌جا هم می‌توانیم دربارهٔ تقارب یکنواخت

---

*) دقیق‌تر، $f(x)$ برای $x\geqslant H$ و برای $x\leqslant -H$، به‌طور جداگانه، یکنواست.

این انتگرال نسبت به z، نتیجه‌گیری کنیم، ولی همان‌طور که خواهیم دید، این‌بار، تنها برای مقدارهای $z \geqslant a$، که در آن، a، عدد مثبت دلخواه، ولی تثبیت شده‌ای است. و این، ما را وا می‌دارد که، به‌جای $J(A)$، انتگرال

$$J(A, a)=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{A} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x_0)\, du \qquad (A>a>0)$$

را مورد بررسی قرار دهیم که، انتگرال فوریه، از آن و با عبور حدی دوگانه، به ازای $A \to +\infty$ و $a \to 0$، به دست می‌آید. برای انتگرال $J(A, a)$ هم، کاملاً شبیه شمارهٔ ۷۱۳، می‌توان این عبارت را به دست آورد:

$$J(A, a)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}\, dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin at}{t}\, dt \qquad (۸)$$

به نحوی که

$$J(A, a)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\varphi(t)\frac{\sin At}{t}\, dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin at}{t}\, dt \qquad (۹)$$

قبل از همه ثابت می‌کنیم که

$$\lim_{a\to 0}\int_{0}^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin at}{t}\, dt=0 \qquad (۱۰)$$

انتگرال را به این صورت می‌نویسیم:

$$\int_{0}^{\Delta}+\int_{\Delta}^{\infty}$$

که در آن، Δ را، در همهٔ حالت‌ها، آن قدر بزرگ می‌گیریم که داشته باشیم: $x_0-\Delta<-H$ و $x_0+\Delta>H$. روشن است که

$$\left|\int_{0}^{\Delta}\right| \leqslant a\int_{0}^{\Delta}[|f(x_0+t)+f(x_0-t)|]\,dt$$

به نحوی که، به‌ازای $a \to 0$ و به ازای هرمقدار دلخواه Δ، این انتگرال به سمت صفر میل می‌کند.

به انتگرال دوم می‌پردازیم. بنابرقضیهٔ دوم مربوط به مقدارهای متوسط [۴۸۷] و با توجه به (۷) داریم:

$$\int_{\Delta}^{\infty} f(x_0\pm t)\frac{\sin at}{t}\,dt = f(x_0\pm\Delta)\int_{\Delta}^{\Delta'}\frac{\sin at}{t}\,dt =$$

$$= f(x_0\pm\Delta)\int_{a\Delta}^{a\Delta'}\frac{\sin z}{z}\,dz \qquad (\Delta'>\Delta)$$

چون عامل دوم، مقداری کران‌دار است (تاکنون، بارها با آن برخورد داشته‌ایم) و عامل دوم را، بنابر (۷)، می‌توان به حساب Δ، به دلخواه کوچك گرفت. بنابراین، تمام عبارت‌هم می‌تواند به دلخواه کوچك باشد. به این ترتیب، رابطهٔ (۱۰) ثابت می‌شود و رفتار عبارت‌های (۸) و (۹)، مثل قبل، تنها به‌انتگرالی مربوط می‌شودکه شامل A است.

برابری حدی زیر را، دربالا، ثابت‌کردیم (با تکیه برانتگرال‌پذیری مطلق تابع f دربازهٔ نامتناهی):

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{h}^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}\,dt = 0$$

(h، عدد مثبت تثبیت شده‌ای است). همین مطلب را، با استفاده از پیش‌فرض جدیدهم، می‌توان ثابت‌کرد. درواقع، با درنظرگرفتن $\Delta>h$، داریم:

$$\int_{h}^{\infty} = \int_{h}^{\Delta} + \int_{\Delta}^{\infty}$$

انتگرال دوم سمت راست برابری را، می‌توان همچون انتگرال مشابه خود، که شامل پارامتر a باشد، تعبیرکرد؛ انتگرال اول‌هم، با توجه به پیش قضیهٔ شمارهٔ ۶۸۲، به سمت صفر میل می‌کند.

به‌این ترتیب روشن می‌شودکه معیارهای دینی و دیریکله ـ ژردان [۷۱۳]، به‌ازای پیش‌فرض‌های تازه دربارهٔ تابع $f(x)$، به‌قوت خود باقی می‌مانند.

از همهٔ آن‌چه گفته شد، به خصوص، به این شرط برای کاربردپذیری دستور فوریه می‌رسیم: اگر تابع $f(x)$ درتمامی بازهٔ نامتناهی $[+\infty, -\infty]$، تغییری محدود داشته باشد و، علاوه براین، برابری حدی (۷) برقرار باشد، آن وقت، انتگرال فوریه در هر نقطهٔ x_0، متقارب است و مقدار S_0 را می‌پذیرد.

درواقع، بـا این پیش‌فرض‌ها، می‌توان تابع $f(x)$ را به صورت تفاضل دو تابع صعودی کران‌دار $f_1(x)$ و $f_2(x)$ نشان داد که، هم به‌ازای $x \to +\infty$ و هم به‌ازای $x \to -\infty$ [با توجه به (۷)]، حدهایی برابر دارند:

$$f_1(+\infty)=f_2(+\infty)=c', \qquad f_1(-\infty)=f_2(-\infty)=c''$$

اکنون، درنظر می‌گیریم:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases} f_1(x)-c' & (x\geqslant 0)\\ f_1(x)-c'' & (x<0)\end{cases}, \qquad \varphi_2(x)=\begin{cases} f_2(x)-c' & (x\geqslant 0)\\ f_2(x)-c'' & (x<0)\end{cases}$$

دراین صورت، مثل قبل

$$f(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$$

ولی این‌بار

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varphi_1(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\varphi_2(x)=0$$

به‌نحوی‌که، برای‌هریك از تابع‌های φ_1 و φ_2، شرط‌های ۱) و ۲) برقرارند؛ علاوه‌بر آن، درهرنقطهٔ آن، معیار دیریکله ـ ژردان قابل کاربرد است.

۷۱۵. صورت‌های مختلف دستور فوریه. با فرض برقراری شرط‌هـای کافی برای استفاده از دستور فوریه، برای سادگی کار، فرض را براین می‌گیریم که، در نقطهٔ مورد‌نظر x، تابع $f(x)$ پیوسته باشد و یـا، اگر ناپیوسته است، با شرط زیر سازگار باشد:

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

یعنی، تابع، درنقطهٔ مورد بررسی، منظم باشد [۶۸۴]. دراین‌صورت، درهرحالتی، داریم:

$$f(x)\doteq\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)\,du \qquad (۱۱)$$

با توجه به‌این‌کـه، انتگرال درونی، نسبت به z، تابعی زوج است، این دستور را می‌توان این‌طور نوشت:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)\,du \qquad (۱۲)$$

سپس، به سادگی ثابت می‌شود که، با توجه به پیش‌فرض‌های کلی نسبت به تابع $f(x)$ که در شمارهٔ **۷۱۲** [یا شمارهٔ **۷۱۴**] داشتیم، انتگرال زیرهم وجود دارد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin z(u-x)du$$

این انتگرال هم، تابعی پیوسته نسبت به z* و، البته، فرد است. اگرچه نمی‌توان، برای این تابع، وجود انتگرال ناسره‌ای از $-\infty$ تا $+\infty$ را تضمین کرد، ولی قطعاً، به مفهوم مقدار اصلی، وجود دارد [**۴۸۴**] و در ضمن

$$\text{مقدار اصلی}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin z(u-x)du=0$$

اگر این برابری را در $\frac{i}{2\pi}$ ضرب و نتیجه را به (۱۲) اضافه کنیم، به این رابطه می‌رسیم:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{iz(u-x)}du \qquad (۱۳)$$

که در آن، انتگرال بیرونی، به‌مفهوم مقدار اصلی، فهمیده می‌شود. کوشی، برای نخستین‌بار، دستور را به این صورت نوشت.

به دستور (۱۱) برمی‌گردیم و آن را به این صورت می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos zx\,dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos zu\,du+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin zx\,dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin zu\,du$$

اگر $f(u)$ تابعی زوج باشد، آن وقت

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos zu\,du=2\int_{0}^{\infty}f(u)\cos zu\,du;\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin zu\,du=0$$

و به دستور ساده‌ای می‌رسیم که تنها شامل کسینوس‌هاست:

---

*) اگر پیش‌فرض‌های شمارهٔ **۷۱۴** را در نظر گرفته باشیم، آن وقت تنها $z=0$ ممکن است استثنا باشد.

$$f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\cos zx\,dz\int_{۰}^{\infty}f(u)\cos zu\,du \qquad (۱۴)$$

به همین ترتیب، در حالت فرد بودن تابع $f(x)$، به دستوری می‌رسیم که تنها شامل سینوس‌هاست:

$$f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\sin zx\,dx\int_{۰}^{\infty}f(u)\sin zu\,du \qquad (۱۵)$$

اکنون فرض کنید، تابع $f(x)$، تنها در بازهٔ $(+\infty\ ،\ ۰]$ داده شده باشد، ولی دو باره، با شرط‌هایی که برای بازهٔ $(+\infty\ ،\ -\infty)$ داشتیم، سازگار باشد. در این صورت، اگر تابع $f(x)$ را، در بازهٔ $(۰\ ،\ -\infty)$ و به‌کمک برابری $(x>۰)$

$$f(-x)=f(x)\quad\text{یا}\quad f(-x)=-f(x)$$

گسترش دهیم، آن وقت، در حالت اول به یك تابع زوج و در حالت دوم به یك تابع فرد در بازهٔ $(+\infty\ ،\ -\infty)$ می‌رسیم. به این ترتیب، برای مقدارهای مثبت x (با رعایت شرط‌های کافی متناظر)، می‌توانیم هم از دستور (۱۴) و هم از دستور (۱۵) استفاده کنیم.

اگر تابع $f(x)$ را، در نقطهٔ $x=۰$، پیوسته فرض کنیم، آن وقت، دستور (۱۴) را در این نقطه هم می‌توان به‌کار برد، زیرا ادامهٔ تابع به‌صورت زوج، بازهم پیوستگی خود را حفظ می‌کند. ولی دستور (۱۵) را، در حالت کلی، نمی‌توان در مورد نقطهٔ $x=۰$ به‌کار برد: این دستور، تنها وقتی مقدار $f(۰)$ را می‌دهد که، این مقدار، برابر صفر باشد.

این ملاحظه‌ها، کاملاً با آن‌چه در شمارهٔ **۶۸۹** دربارهٔ رشته‌های فوریه گفته‌ایم، شبیه است.

۷۱۶. تبدیل فوریه. فرض می‌کنیم دستور فوریهٔ (۱۲) برای همهٔ مقدارهای x در بازهٔ $(+\infty\ ،\ -\infty)$، و احتمالاً به استثنای تعداد محدودی از نقطه‌ها، برقرار باشد، این دستور را، می‌توان به عنوان انطباق دو دستور در نظر گرفت:

$$F(z)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{izu}du;\ f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(z)e^{-ixz}dz^{*} \qquad (۱۶)$$

دستور $F(z)$ را، در مقایسه با دستور اول تابع $f(x)$، تبدیل فوریه آن گویند. به‌نوبهٔ خود،

---

*) به شرط برقرار بودن پیش‌فرض‌های مربوط به $f(x)$، که در بارهٔ آن‌ها در بالا صحبت کردیم، انتگرال آخری، به مقدار اصلی خواهد بود.

بنا به دستور دوم، تابع $f(x)$ را، تبدیل فوریهٔ (معکوس) برای تابع $F(x)$ گویند (که تنها در علامت i اختلاف دارد). توجه کنیم که تابع F، در حالت کلی و حتی وقتی که f حقیقی باشد، یك تابع مختلط است؛ در ضمن، در این جا، تابع اصلی f را هم، می‌توان مختلط فرض کرد.

برابری

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(z)e^{-ixz}dz$$

را، که در آن تابع $f(x)$ مفروض است، می‌توان به عنوان معادلهٔ انتگرالی نسبت به تابع مجهول $F(z)$، که در زیر علامت انتگرال قرار دارد، در نظر گرفت. حل معادله را با این دستور می‌توان انجام داد:

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{izu}du$$

و طبیعی است که، نقش این دو برابری را، می‌توان باهم عوض کرد.

اکنون به دستور (۱۴) برمی‌گردیم؛ اگر این دستور برای همهٔ مقدارهای مثبت x، با همان استثناهای فوق، برقرار باشد، آن وقت، می‌توان آن را به صورت انطباق دو دستور ــ و این بار حقیقی و کاملاً متقارن ــ در نظر گرفت:

$$\left.\begin{aligned}F_c(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(u)\cos zu\,du\\ f(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_c(z)\cos xz\,dz\end{aligned}\right\}\qquad(۱۷)$$

به همین ترتیب، دستور (۱۵) را هم، می‌توان به دو دستور تجزیه کرد:

$$\left.\begin{aligned}F_s(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(u)\sin zu\,du\\ f(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_s(z)\sin xz\,dz\end{aligned}\right\}\qquad(۱۸)$$

تابع‌های $F_c(z)$ و $F_s(z)$ را، به ترتیب، تبدیل کسینوس یا تبدیل سینوس فوریه، برای

تابع $f(x)$ گویند. همان طورکه می‌بینیم، تابع f برحسب F_c (یا F_s) درست به همان ترتیبی به دست می‌آید که تابع F_c (یا F_s) برحسب f. به زبان دیگر، تابع‌های f و F_c (F_s)، به‌طور متقابل، تبدیل‌های کسینوس (سینوس) هستند. کوشی، جفت تابع‌های f و F_c یا f و F_s را، به ترتیب، تابع‌های مزدوج نوع اول و نوع دوم نامید. در این جا هم هریك از برابری‌های (۱۷) [یا(۱۸)] را می‌توان همچون معادلهٔ انتگرالی در نظر گرفت که، در آن، تابع بیرون انتگرال مفروض، و تابع زیر علامت انتگرال مورد جست و جو است؛ حل هر معادله، به وسیلهٔ برابری دیگر داده می‌شود.

مقایسهٔ تابع‌های F، F_c و F_s را می‌توان به‌این ترتیب انجام داد: اگر تابع $f(x)$ زوج باشد، داریم:

$$F(z)=F_c(z)$$

(تابع $F_c(z)$، روی مقدارهای $z<0$، به صورت زوج گسترش می‌یابد) و درحالت فرد بودن $f(x)$

$$F(z)=iF_s(z)$$

(تابع $F_s(z)$، روی مقدارهای $z<0$، به صورت فرد گسترش می‌یابد). در حالت کلی، تابع $f(x)$، به‌مجموع دو تابع، یکی زوج دیگری فرد، تجزیه می‌شود

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad و \quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

و در این صورت

$$F(z)=G_c(z)+iH_s(z)^*$$

در رابطه با این موقعیت، کافی است تنها به مثال‌های مربوط بـه تبدیل کسینوس و تبدیل سینوس بپردازیم.

۱) تابع $f(x)=e^{-ax}$ را در نظر می‌گیریم $a>0$، $(x\geqslant 0)$؛ در این صورت، تبدیل کسینوس آن، تابع

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-az}\cos zx\,dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2}$$

---

*) $G_c(z)$ به معنای تبدیل کسینوس برای تابع $g(x)$، و $H_s(z)$، تبدیل سینوس برای تابع $h(x)$ است.

و تبدیل سینوس آن، تابع

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty} e^{-az}\sin zx\,dz=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\,\frac{x}{a^۲+x^۲}$$

خواهد شد. چون تابع e^{-ax} در بازهٔ $[۰\,,+\infty]$، انتگرال‌پذیر است، بنابراین رابطه‌های متقابل هم برقرارند:

$$\frac{۲a}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{\cos zx}{a^۲+z^۲}dz=e^{-ax}\quad(x\geqslant ۰)$$

$$\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{z\sin zx}{a^۲+z^۲}dz=e^{-ax}\quad(x>۰)$$

و یا

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\cos xz}{a^۲+z^۲}dz=\frac{\pi}{۲a}e^{-ax},\qquad \int_{۰}^{\infty}\frac{z\sin xz}{a^۲+z^۲}dz=\frac{\pi}{۲}e^{-ax}$$

و ما، در این انتگرال‌ها، انتگرال‌های لاپلاس را به یاد می‌آوریم [۵۲۴، ۴°].

به این ترتیب، در قیافهٔ جفت تابع‌های

$$e^{-ax},\quad\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\,\frac{a}{a^۲+x^۲}\quad\text{و}\quad e^{-ax},\quad\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\,\frac{x}{a^۲+x^۲}$$

نمونه‌ای از تابع‌های مزدوج نوع اول و نوع دوم را (بنا به نام گذاری کوشی) می‌بینیم. اگرهم، انتگرال‌های لاپلاس را نمی‌شناختیم، از این جـا، راهی برای محاسبهٔ آن‌ها پیدا می‌کردیم.

۲) اکنون تابعی را در نظر می‌گیریم که با برابری‌های زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases}۱ & (۰\leqslant x<a)\\ \frac{۱}{۲} & (x=a\,,\,a>۰)\\ ۰ & (x>a)\end{cases}$$

در این حالت داریم:

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{a}\cos zx\,dz=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{\sin ax}{x}$$

اگر بخواهیم در این مثال، دستور فوریه را به‌کار بریم و تبدیل کسینوس را برای تابع حاصل پیدا کنیم، آن وقت، به «عامل ناپیوسته» دیریکله می‌رسیم [۴۹۷، ۹]:

$$\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin az}{z}\cos zx\,dz$$

که در واقع هم، مقدار آن با تابع اصلی $f(x)$ تطبیق می‌کند. به همین ترتیب

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{a}\sin zx\,dz=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{۱-\cos ax}{x}$$

و غیره. دربارهٔ تبدیل فوریه، مثال‌های زیادی را در شمارهٔ **۷۱۸** خواهید دید.

۷۱۷. برخی ویژگی‌های تبدیل فوریه. مطالعهٔ ویژگی‌های تبدیل فوریهٔ $F(x)$ از تابع $f(x)$، با آغاز از پیش‌فرض‌هایی برای تابع $f(x)$، می‌تواند برای ما جالب باشد.

قبل از همه، اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[-\infty, +\infty]$ انتگرال‌پذیر مطلق باشد، آن وقت تابع

$$F(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{ixu}du \qquad (۱۹)$$

در تمامی این بازه پیوسته است و، به ازای $x\to\pm\infty$، به سمت صفر میل می‌کند.

پیوستگی ازاین‌جا نتیجه می‌شود که، این انتگرال، به ازای $u=\pm\infty$، نسبت به x به‌طور یکنواخت متقارب است، زیرا به وسیلهٔ انتگرال متقارب زیر، که شامل پارامتر x نیست، محدود می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|du$$

اثبات کاملاً شبیه اثبات قضیهٔ ۱ شمارهٔ **۵۱۸** و قضیهٔ ۲ شمارهٔ **۵۲۰** با تکیه بر قضیهٔ ۱* شمارهٔ **۵۱۰** (به‌جای قضیهٔ ۱ شمارهٔ **۵۰۶**) انجام می‌شود. اما دربارهٔ رفتار تابع F در بی‌نهایت، می‌توان بر اساس نتیجه‌گیری نهائی شمارهٔ **۷۱۲**، به نتیجه رسید.

اکنون فرض می‌کنیم، $x^n f(x)$ هم در بازهٔ $[-\infty, +\infty]$، انتگرال‌پذیر مطلق باشد (n، عددی طبیعی است). در این صورت، تابع $F(x)$، دارای n مشتق متوالی است:

$$F'(x),\ F''(x),\ \ldots,\ F^{(n)}(x)$$

که همهٔ آن‌ها، به ازای $x \longrightarrow \pm\infty$، به سمت صفر میل می‌کنند.

اگر از انتگرال (۱۹)، پشت سرهم، نسبت به پارامتر x در زیر علامت انتگرال مشتق بگیریم، به دست می‌آید:

$$F^{(k)}(x)=\frac{i^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)u^k e^{ixu}du \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

این انتگرال، با توجه به متقارب‌بودن انتگرال

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)u^k|du$$

نسبت به x، به طور یکنواخت متقارب است و، بنابراین، می‌توان از قاعدهٔ لایب‌نیتس در مورد آن استفاده کرد. اثبات را می‌توان کاملاً شبیه اثبات قضیهٔ ۳ شمارهٔ **۵۲۰**، با تکیه بر قضیهٔ ۳ شمارهٔ **۵۱۰** (به‌جای قضیهٔ ۳ شمارهٔ **۵۰۷**) انجام داد. رفتار مشتق‌ها، در بی‌نهایت، به‌کمک یادداشت نهائی شمارهٔ **۷۱۲** روشن می‌شود.

به‌این‌ترتیب، ویژگی‌های دیفرانسیلی تابع $F(x)$، در اساس خود، با رفتار تابع $f(x)$ در بی‌نهایت، مشخص می‌شود. برعکس، به‌کمک ویژگی‌های دیفرانسیلی تابع $f(x)$ می‌توان، تا حدی، دربارهٔ رفتار تابع $F(x)$ در بی‌نهایت، داوری کرد. مثلاً، اگر تابع $f(x)$ و مشتق‌های متوالی آن تا مرتبهٔ $(n-1)$ام، به‌ازای $x \longrightarrow \pm\infty$، به سمت صفر میل کنند، ولی مشتق مرتبهٔ nام $f^{(n)}(x)$، دربازهٔ $[-\infty, +\infty]$، انتگرال‌پذیر مطلق باشد، آن وقت

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n F(x)=0$$

این حکم، نتیجهٔ مستقیم بیان خود $F(x)$ است:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{x}\right)^n\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(u)e^{ixu}\,du$$

که از انتگرال‌گیری پی درپی جزء به‌جزء به‌دست می‌آید.

۷۱۸. مثال‌ها و اضافه‌ها. ۱) ثابت کنید، تبدیل کسینوس تابع $e^{-\frac{1}{2}x^2}$، برخود تابع منطبق است.

اثبات، با دستور شمارهٔ ۵۱۹، ۶) (a) به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty} e^{-\frac{۱}{۲}z^۲}\cos zx\,dz=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{۲}}e^{-\frac{۱}{۲}x^۲}=e^{-\frac{۱}{۲}x^۲}$$

اگر از این برابری، نسبت به x، مشتق بگیریم، به این نتیجه می‌رسیم که تبدیل سینوسی تابع $x.e^{-\frac{۱}{۲}x^۲}$، برخودش منطبق است.

۲) این دستورها را ثابت کنید:

$$\text{(a)}\quad \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin^۲ z}{z^۲}\cos ۲zx\,dz=\begin{cases}۱-x & (۰\leqslant x\leqslant ۱)\\ ۰ & (x\geqslant ۱)\end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\ln\frac{\sqrt{۱+z^۲}}{z}\cos xz\,dz=\frac{۱-e^{-x}}{x}\quad (x\geqslant ۰)$$

راهنمایی. تبدیل کسینوسی تابع‌هایی راکه درسمت راست برابری‌ها قرار دارند، نسبت به x، پیدا کنید و از مزدوج بودن دو تابع استفاده کنید (شرط‌های کاربردپذیری دستور فوریه، برقرارند).

۳) معادلهٔ انتگرالی

$$\int_{۰}^{\infty} g(z)\sin zx\,dz=f(x)$$

را، درحالت‌های زیر، حل کنید:

$$\text{(a)}\quad f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}\sin x & (۰\leqslant x\leqslant \pi)\\ ۰ & (x\geqslant \pi)\end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}\cos x & (۰\leqslant x\leqslant \pi)\\ -\frac{\pi}{۴} & (x=\pi)\\ ۰ & (x>\pi)\end{cases}$$

راهنمایی. تبدیل سینوسی را، برای تابع $\sqrt{\frac{۲}{\pi}}f(x)$ پیدا کنید.

پاسخ: (a) $\frac{\sin \pi x}{1-x^2}$؛ (b) $\frac{x \sin \pi x}{1-x^2}$.

۴) ثابت کنید، تابع $\frac{1}{\sqrt{x}}$، با تبدیل کسینوسی و سینوسی خودش، یکی است.

به‌عنوان نمونه، داریم:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sin xz}{\sqrt{z}} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad [۵۲۲, ۵^\circ]$$

۵) از تبدیل سینوسی تابع زیر، برای به دست‌آوردن یك انتگرال جدید استفاده کنید:

$$\frac{1}{e^{2\pi x}+1}$$

با توجه به دستور شمارهٔ ۵۱۹، ۸) (b)، تبدیل مزبور، به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \right)$$

و چون، شرط‌های کاربرد دستور فوریه، برای تابع اصلی برقرار است، بنابراین تابع اصلی، به نوبهٔ خود، تبدیل سینوسی همین تابعی است که به دست آوردیم. اگر مقدار انتگرال

$$\int_0^\infty \frac{\sin xz}{z} dz = \frac{\pi}{2} \quad (x>0)$$

را درنظر داشته باشیم، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin xz}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} dz = \frac{\pi}{2} \frac{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}$$

و یا، با تبدیل‌های دیگر، سرانجام

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin \pi x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{a}{2} \qquad (a>0)$$

۶) ثابت کنید، تبدیل سینوسی تابع زیر، برخودش منطبق است:

$$\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}x}-1}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}$$

راهنمایی. از دستور شمارهٔ ۵۱۹، ۸) (a) استفاده کنید.

۷) دستور (۱۴) فوریه را، برای تابع‌های $\cos\frac{1}{2}x^2$ و $\sin\frac{1}{2}x^2$ مورد تحقیق قرار دهید (این دو تابع، با شرطهایی که، برای درآوردن دستور فوریه درنظر گرفته بودیم، سازگار نیستند).

داریم:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos\frac{1}{2}z^2\cos xz\,dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{2}z^2-xz\right)dz+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{2}z^2+xz\right)dz\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(\frac{1}{2}z^2-xz\right)dz$$

و یا با فرض $z=x+u$ و با به حساب آوردن مقدارهای انتگرالهای فوریه [۵، ۵۲۲]:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\frac{1}{2}(u^2-x^2)\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\cos\frac{1}{2}x^2\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\frac{1}{2}u^2du+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{1}{2}x^2\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\frac{1}{2}u^2\,du\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{1}{2}x^2+\sin\frac{1}{2}x^2\right)$$

و به همین ترتیب

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin\frac{1}{2}z^2\cos xz\,dz=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{1}{2}x^2-\sin\frac{1}{2}x^2\right)$$

اکنون، به‌طور مستقیم هم روشن است که تبدیل کسینوسی تابع‌های حاصل، همان تابع‌های اصلی است و این، هم‌ارز با درستی دستور فوریه است.

۸) تحقیق کنید: (a) دستور (۱۴) فوریه را برای تابع

$$f(x)=\mathrm{ci}x=-\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}\,dt \qquad \text{(کسینوس انتگرالی)}$$

(b) دستور (۱۵) را برای تابع

$$g(x)=\mathrm{si}\,x=-\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad \text{(سینوس انتگرالی)}$$

شرط‌های کاربردپذیری دستورها، رعایت نشده است.

(a) حل. با توجه به دستور شمارهٔ ۴۹۷، ۱۹) (a):

$$F_c(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos xu\,du\int_u^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt=\begin{cases}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{x} & (x>1)\\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} & (x=1)\\ 0 & (x<1)\end{cases}$$

و سپس

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(z)\cos xz\,dz=-\int_1^\infty \frac{\cos xz}{z}\,dz=-\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt=\mathrm{ci}\,x$$

(b) راهنمایی. از ۴۹۷، ۱۹) (b) استفاده کنید.

۹) هردو دستور (۱۴) و (۱۵) فوریه را برای تابع $\frac{1}{x^s}$ آزمایش کنید ($0<s<1$).

با توجه به ۵۳۹، ۳)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\cos zx}{x^s}\,dz=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{x^{s-1}}{\Gamma(t)\cos\frac{\pi s}{2}}$$

سپس

$$\frac{1}{\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}\int_0^\infty \frac{\cos zx}{z^{1-s}}\,dz=\frac{1}{\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^{-s}}{\Gamma(1-s)\cos\frac{\pi(1-s)}{2}}$$

و این، برابر $\frac{1}{x^s}$ است (به‌شرطی که دستور تکمیلی تابع Γ را به‌حساب آوریم: ۵۳۱، ۵°).

به همین ترتیب، می‌توان دستور (۱۵) را هم، مورد آزمایش قرار داد.

۱۰) دستور (۱۴) فوریه را، برای تابع، بسل با اندیس صفر، $J_0(x)$، موردتحقیق قرار دهید.

در ۵۲۴، ۵) داشتیم:

$$\int_0^\infty J_0(z)\cos zx\,dz=\begin{cases}0 & (x>1)\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (x<1)\end{cases}$$

بنابراین

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\,du\int_0^\infty J_0(z)\cos zu\,dz=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\cos ux}{\sqrt{1-u^2}}du=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\varphi)d\varphi$$

که در واقع، برابر $J_0(x)$ است [با ۶۹۵ مقایسه کنید].

۱۱) تابع $f(x)$ را (به‌ازای... ،۲ ،۱ ،۰ $=n$)، که با برابری‌های زیر تعریف‌شده است، بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} & (0\leqslant x<1)\\ 0 & (x>1)\end{cases}$$

تبدیل کسینوسی آن، چنین است:

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1(1-z^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos zx\,dz$$

و یا اگر کسینوس را به رشته، بسط دهیم و جمله به جمله انتگرال بگیریم:

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}\int_0^1 z^{2\nu}(1-z^2)^{n-\frac{1}{2}}dz$$

ولی، با توجه به ۵۳۴, ۱):

$$\int_0^1 z^{2\nu}(1-z^2)^{n-\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+n+1)}=\frac{(2\nu-1)!!(2n-1)!!}{2^{\nu+n+1}(\nu+n)!}\pi$$

بنابراین، اگر بسط تابع بسل با اندیس n را به یاد بیاوریم [۳۹۵، ۱۴)]، سرانجام

به دست می‌آید:

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2n-1)!!\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!(\nu+n)!}\frac{x^{2\nu}}{2^{n+2\nu}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n-1)!!}{x^n}J_n(x)$$

چون درمورد تابع اصلی، شرط‌های کاربرد دستور فوریه برقرارند، بنابراین، تبدیل کسینوسی برای تابع $F_c(x)$، باید منجر به تابع اصلی بشود. و این، ما را به انتگرال جالب زیر می‌رساند:

$$\int_0^{\infty}\frac{J_n(z)}{z^n}\cos zx\,dz=\begin{cases}\dfrac{1}{(2n-1)!!}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} & (0\leqslant x<1)\\ 0 & (x>1)\end{cases}$$

به ازای $n=0$، دستوری آشنا به دست می‌آید [۵۲۴، ۵)].

۱۲) در عبارت لگاریتم انتگرالی

$$\operatorname{li} z=\int_0^{z}\frac{dt}{\ln t}\quad(0<z<1)$$

فرض می‌کنیم $z=e^{-x}$ و $t=e^{-u}$؛ به دست می‌آید:

$$\operatorname{li} e^{-x}=-\int_x^{\infty}\frac{du}{ue^u}$$

ازآن جا که داریم:

$$\int_x^{\infty}\frac{du}{ue^u}<e^{-x}(x>1)\quad\text{و}\quad\int_x^{1}\frac{du}{ue^u}<|\ln x|\quad(0<x<1)$$

بنابراین $|\operatorname{li} e^{-x}|$ از ۰ تا $+\infty$ قابل انتگرال‌گیری است و ازدو رابطهٔ (۱۴) و (۱۵) فوریه، می‌توان استفاده کرد. تبدیل کسینوسی $\operatorname{li} e^{-x}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\operatorname{li} e^{-z}\cos zx\,dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos zx\,dz\int_z^{\infty}\frac{du}{ue^u}$$

که با انتگرال‌گیری جزء به جزء، به این صورت درمی‌آید:

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x}\int_0^{\infty}e^{-z}\frac{\sin zx}{z}dz=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{arc}tg\,x}{x}$$

[۵۲۲، ۲°]. ازآن جا، برعکس

$$\int_0^\infty \frac{\text{arc tg } z}{z} \cos zx\, dz = -\frac{\pi}{2} \text{li } e^{-x} \quad (x>0)$$

مقدار انتگرال جدیدی را پیدا کردیم.

به همین ترتیب، با استفاده از تبدیل سینوسی، انتگرال دیگری به دست می‌آید*:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+z^2)}{z} \sin zx\, dx = -\pi \text{li } e^{-x} \quad (x>0)$$

۱۳) ثابت کنید که در دستور فوریه

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du$$

با رعایت یکی از شرط‌های کافی، می‌توان انتگرال درونی را با انتگرال روی هر بازهٔ محدود عوض کرد:

$$\int_b^b f(u) \cos z(u-x) du$$

تنها با این شرط که x بین a و b واقع باشد.

راهنمائی. به جای $f(u)$، تابع جدیدی را در نظر بگیرید که، برای $a<u<b$ برابر $f(u)$ و برای سایر مقدارهای u، برابر صفر باشد.

۱۴) فرض کنید، تابع $f(x)$، در بازهٔ $(0, +\infty)$، به‌مفهوم وسیع خود، یکنوا و نزولی باشد و، به ازای $x \to +\infty$، به سمت صفر میل کند؛ فرض کنید که این تابع، در همسایگی نقطهٔ $x=0$، انتگرال‌پذیر باشد**. ثابت کنید، در این صورت، تبدیل سینوسی

---

*) انتگرال بینابینی

$$\int_0^\infty e^{-z} \frac{\cos xz - 1}{z} dz$$

به سادگی و با مشتق‌گیری نسبت به پارامتر x، محاسبه می‌شود.

**) درحالتی که تابع $f(x)$، در نقطهٔ $x=0$، به‌سمت بی‌نهایت میل کند، می‌توان انتگرال‌پذیری را به معنای ناویژهٔ خود گرفت.

$F_s(x)$ آن، برای $x>0$، تابعی غیرمنفی است.

با توجه به شرطهای مسأله، قبل از همه، وجود انتگرال زیر نتیجه می‌شود:

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(z)\sin xz\,dz$$

[۴۷۶، ۴۸۲]، که آن را می‌توان به صورت رشتهٔ زیر نوشت:

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{n\pi}{x}}^{\frac{(n+1)\pi}{x}} f(z)\sin xz\,dz$$

که جمله‌های آن، یک‌درمیان، مثبت و منفی و، ازلحاظ قدرمطلق، نزولی هستند (رشته‌ای از نوع لایب‌نیتسی: ۳۸۱). از این‌جا، نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید.

۱۵) $f(x)$ را تابع نزولی یکنوا و کران‌دار در بازهٔ $[0, +\infty]$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم، به ازای $x\to+\infty$، به سمت صفر میل کند. علاوه بر آن، فرض می‌کنیم، به ازای $x>0$، مشتق $f'(x)$ برای آن، منفی و صعودی یکنوا (به معنای وسیع خود) وجود داشته باشد. ثابت کنید، در این صورت، تبدیل کسینوسی $F_c(x)$، تابعی است غیرمنفی و در بازهٔ $[0, +\infty]$ انتگرال‌پذیر.

با شرط $0<a<A<+\infty$، داریم:

$$\int_a^A |f'(x)|dx=-\int_a^A f'(x)dx=f(a)-(A)$$

به نحوی که، با توجه به کران‌دار بودن تابع $f(x)$، مشتق $f'(x)$ در بازهٔ $[0, +\infty]$ انتگرال‌پذیر است. از این جا، در ضمن، نتیجه می‌شود:

$$f'(x)\to 0 \quad (x\to+\infty \text{ به ازای})$$

اگر از انتگرال‌گیری جزء به‌جزء استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(z)\cos xz\,dz=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{x}\int_0^{\infty} f'(z)\sin x\,z\,dz$$

که اگردرمورد انتگرال اخیر، ازاثبات (۱۴) استفاده کنیم، معلوم می‌شود که $F_c(x)\geqslant 0$.

چون در بارهٔ $f(x)$، شرطهای کاربرد دستور فوریه برقرار است، بنابراین به ازای $x=0$ به دست می‌آید:

$$f(+0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dz\int_0^\infty f(u)\cos zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(z)\,dz$$

که به معنای انتگرال‌پذیری تابع $F(z)$، F است.

یادداشت. تأکید می‌کنیم که، هیچ‌کدام از این دو قضیه، برای تبدیل نوع دیگر، درست نیست. برای تابع $f(x)$، که در مثال ۲) شمارهٔ **۷۱۶** داشتیم، تبدیل کسینوسی متناظر آن

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin ax}{x}$$

علامت عوض می‌کند. اگر هم فرض کنیم $f(x)=e^{-ax}$ [(مثال ۱) در همان شماره]، آن وقت، تبدیل سینوسی

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{x}{a^2+x^2}$$

با آن‌که برای $x>0$، علامت خود را حفظ می‌کند، ولی در بازهٔ $[0,+\infty]$، انتگرال‌پذیر نیست.

۷۱۹. حالت تابع‌های با دو متغیر. دستور فوریه را می‌توان برای تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$، که شامل چندمتغیر است، تعمیم داد. در این جا، به تابع با دو متغیر $f(x_1, x_2)$ می‌پردازیم و فرض می‌کنیم که، این تابع، در تمامی صفحهٔ $(-\infty,+\infty;-\infty,+\infty)$ معین و، درعین‌حال، نسبت به‌هریك‌از دومتغیر به‌طور جداگانه، مشتق‌پذیر باشد.

سپس، فرض می‌کنیم، برای هر مقدار ثابت x_2، تابع $f(x_1, x_2)$، نسبت به x_1 و در بازهٔ $[+\infty,-\infty]$، انتگرال‌پذیر مطلق و، به همین ترتیب، برای هر مقدار ثابت x_1، نسبت به x_2 ودرهمان بازه، انتگرال‌پذیر مطلق باشد. اگر، با تثبیت x_2، دستور (۱۱) فوریه* را برای تابع با یك متغیر $f(x_1, x_2)$ به‌کار بریم، به دست می‌آید:

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dz_1\int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, x_2)\cos z_1(u_1-x_1)\,du_1$$

به همین ترتیب، تابع $f(u_1, x_2)$ از متغیر x_2 را، با تثبیت u_1، می‌توان به نوبهٔ خود،

*) شرط‌های کاربرد این دستور، با توجه به پیش‌فرض‌ها، در این جا رعایت شده است. روشن است که، این پیش‌فرض‌ها را، تغییر شکل هم می‌توان داد.

این طور نشان داد:

$$f(u_1, x_2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2)\cos z_2(u_2-x_2)du_2$$

و در نتیجه، به‌دستور موردنظر می‌رسیم:

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z_1(u_1-x_1)du_1 \int_0^{\infty} dz_2 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2)\cos z_2(u_2-x_2)du_2=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_0^{\infty} dz_2 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2)\cos z_1(u_1-x_1)\cos z_2(u_2-x_2)du_2$$

شبیه **۷۱۵**، در این‌جا هم می‌توان به‌دستوری رسید که شامل تابع نمائی باشد:

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2)e^{i[z_1(u_1-x_1)+z_2(u_2-x_2)]}du_2 \qquad (۲۰)$$

تنها با این شرط که انتگرال‌های نسبت به z_1 و نسبت به z_2 را، به‌مفهوم مقدار اصلی بگیریم.

اگر تابع $f(x_1, x_2)$، هم نسبت به x_1 و هم نسبت به x_2، تابعی زوج باشد، آن وقت، تمامی بازهٔ انتگرال‌گیری را می‌توان منجر به بازهٔ $[0, +\infty]$ کرد و تنها کسینوس‌ها را نگه داشت:

$$f(x_1, x_2)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty} \cos z_1x_1 dz_1 \int_0^{\infty} \cos z_1u_1 du_1 \int_0^{\infty} z_2x_2 dz_2 \times$$

$$\times \int_0^{\infty} f(u_1, u_2)\cos z_2u_2 du_2 \qquad (۲۱)$$

در حالت فرد بودن، همه جا، به جای کسینوس‌ها، باید سینوس‌ها را قرار داد.

هر دو دستور، برای حالتی هم که تابع $f(x_1, x_2)$، تنها در ربع اول $[0, +\infty; 0, +\infty]$ داده شده باشد برقرارند، زیرا آن را می‌توان در تمامی صفحه، به‌صورت زوج یا فرد، ادامه داد (برای دستور شامل سینوس‌ها، نقطه‌های واقع برمحورها،

استثنا هستند).

در همهٔ این دستورها، ردیف انتگرال‌گیری را باید به همان صورتی که نوشته‌ایم، در نظر گرفت (مگر تنها با جابه‌جائی اندیس‌های ۱ و ۲). اگر بتوانیم دلیلی برای جابه‌جائی دو انتگرال بینابینی پیدا کنیم، آن وقت، دستورها تقارن خاصی پیدا می‌کنند. در این حالت، دستور (۲۰)، با دو دستور زیر هم‌ارز می‌شود:

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) e^{i(z_1 u_1 + z_2 u_2)} du_2,$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F(z_1, z_2) e^{-i(z_1 x_1 + z_2 x_2)} dz_2$$

تابع $F(z_1, z_2)$ را، تبدیل فوریه از انتگرال $f(x_1, x_2)$ گویند.

به همین ترتیب، دستور (۲۱) هم به دو دستور تجزیه می‌شود که، این بار، شکل‌های کاملاً یکسانی دارند:

$$F_c(z_1, z_2) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} du_1 \int_{0}^{\infty} f(u_1, u_2) \cos z_1 u_1 \cos z_2 u_2 du_2,$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} dz_1 \int_{0}^{\infty} F_c(z_1, z_2) \cos z_1 x_1 \cos z_2 x_2 dz_2$$

در این جا، $F_c(z_1, z_2)$، تبدیل کسینوسی تابع $f(x_1, x_2)$ است و، روشن است که $f(x_1, x_2)$ هم، تبدیل کسینوسی تابع $F_c(z_1, z_2)$ می‌شود.

همهٔ این بحث‌ها را، در مورد تبدیل سینوسی هم می‌توان انجام داد که، به علت شباهت آن با بحث فوق، آن را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

§۷. ضمیمه (کاربردها)

۷۲۰. انحراف خروج ازمرکز سیاره، نسبت به انحراف متوسط آن. بسط تابع به رشتهٔ فوریه، منجر به‌نمایش تحلیلی مناسبی از تابع می‌شود که، اغلب، برای منظورهای محاسبه‌ای، سودمند است. نمونهٔ مهمی از این گونه را که، در این‌جا، آورده‌ایم، از اخترشناسی نظری برداشته‌ایم.

قبل ازاین‌هم، با معادلهٔ کپلر سروکار داشته‌ایم:

$$E = M + \varepsilon \sin E \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

که انحرف خروج ازمرکز E سیاره را با انحراف متوسط M آن، مربوط می‌کند [۸۳؛ ۴۵۲، ۲)]. طبق این معادله، E تابعی است یك ارزشی و مشتق‌پذیر نسبت به M، که، درضمن، تابعی فرد است. روشن است که، با افزایش M به اندازهٔ 2π، مقدار Eهم به اندازهٔ 2π اضافه می‌شود. درنتیجه، $\sin E$ تابعی است متناوب از M، با دورهٔ تناوب 2π و به رشته‌ای برحسب سینوس‌های کمان‌هایی (که مضربی از M هستند) بسط داده می‌شود:

$$\sin E = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nM$$

تنها این می‌ماند که ضریب‌های b_n را معین کنیم.

بنا به‌دستور (۲۱) شمارهٔ ۶۸۹ داریم:

$$\frac{\pi}{2} b_n = \int_0^{\pi} \sin E \sin nM \, dM =$$

$$= -\sin E \cdot \frac{\cos nM}{n}\Big|_{M=0}^{M=\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nM \frac{d \sin E}{dM} dM$$

جملهٔ بیرون انتگرال، به سمت صفر میل می‌کند، زیرا به ازای $M = 0$ (یا $M = \pi$)، خواهیم داشت $E = 0$ (یا π). با عوض‌کردن متغیر M به متغیر E، در انتگرال آخری، که برای آن بازهٔ تغییر فرق نمی‌کند، و با به حساب‌آوردن خود معادلهٔ کپلر، به دست می‌آید:

$$\frac{\pi}{2} b_n = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nM \cos E \, dE = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos(nE - n\varepsilon \sin E) \cos E \, dE =$$

$$= \frac{1}{2n}\left[\int_0^{\pi} \cos((n+1)E - n\varepsilon \sin E) dE + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi} \cos((n-1)E - n\varepsilon \sin E) \, dE \right]$$

با توجه به‌دستور انتگرالی آشنا، که تابع $J_m(x)$ بسل را بیان می‌کند.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nE - x\sin E)\,dE = J_n(x)$$

[مثلاً، شمارهٔ ۶۹۵ را ببینید]. بنابراین

$$b_n = \frac{1}{n}[J_{n+1}(n\varepsilon) + J_{n-1}(n\varepsilon)]$$

از طرف دیگر، این اتحاد، به‌سادگی ثابت می‌شود:

$$\frac{x}{2n}[J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)] = J_n(x)$$

بنابراین

$$b_n = \frac{2}{n\varepsilon} J_n(n\varepsilon)$$

به‌نحوی که

$$\sin E = \frac{2}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon)\sin nM$$

و سرانجام

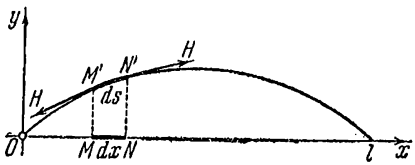
$$E = M + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon)\sin nM$$

این بیان، از انحراف خروج ازمرکز E، برحسب انحراف متوسط M، درمکانیك سماوی نقش مهمی به عهده دارد. قبلاً هم، بسط مقدار E را، برحسب توان‌های خروج ازمرکز ε با ضریب‌هایی که به M بستگی داشتند، پیدا کرده بودیم [۴۵۲، ۲)]. ولی، آن بسط، تنها بـرای مقدارهـای ... $\varepsilon < 0/6627$ مناسب بود و، مثلاً، بـرای مدارهـای ستاره‌های دنباله‌دار با خروج از مرکز بزرگ، قابل استفاده نبود؛ دستوری که در این‌جا پیدا کردیم، این کمبود را جبران می‌کند.

۷۲۱. مسألهٔ نوسان تارها. کاربرد رشتهٔ فوریه و انتگـرال فوریه، به خصوص در فیزیك ریاضی، اهمیت بسیار دارد. برای ذکر نمونه‌هایی ازاین کاربرد، ازمسألهٔ کلاسیك نوسان تارها آغاز می‌کنیم که، در طرح مسألهٔ مربوط به امکان‌های بسط مثلثاتی تابع‌هـا، نقش مهمی به عهده دارد.

منظور ما از تار، نخ آزاد، خمش‌پذیر و بی‌وزن است. فرض کنید، دو انتهـای این

تار، به طول l، در نقطه‌های $x=0$ و $x=l$ از محور Ox محکم شده باشد و تحت تأثیر کشش H، درطول این محور، در ترازمندی قرار گیرد (شکل ۱۳۸). فرض کنید، در لحظهٔ $t=0$، این تار از حالت تعادل بیرون رود و، نقطه‌های آن، سرعت‌هایی در امتداد قائم به‌دست آورند. در این‌صورت، نقطه‌های تار، آغاز به‌نوسان درصفحهٔ قائم می‌کنند*. اگر نوسان هرنقطهٔ M به‌طول x از تار را، دقیقاً قائم بگیریم، آن وقت، انحراف y آن، درلحظهٔ زمانی $t\geqslant 0$، ازموضع تعادل، تابعی‌از دو متغیر x و t خواهد بود:



شکل۱۳۸

$$y=y(x,t)$$

و مسألهٔ ما، تعیین همین تابع است.

در این‌جا، به بررسی نوسان‌های کوچك تار اکتفا می‌کنیم، به‌نحوی‌که مقدارهای y و $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ کوچك باشند (یعنی، سیم، از وضع تعادل خود اندکی دور شود)؛ وطبیعی است که، در این حالت، حق داریم ازمجذور این مقدارهای کوچك صرف‌نظر کنیم.

جزء $ds=M'N'$ از سیم را، در لحظهٔ زمانی t درنظر می‌گیریم (شکل ۱۳۸)؛ بنابرآن‌چه گفته شد، طول آن را می‌توان برابر با طول اولیهٔ آن $dx=MN$ درلحظهٔ نخست به‌حساب آورد، زیرا

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,dx=dx$$

چون ازتغییرطول چشم‌پوشی می‌کنیم،می‌توانیم کشش سیم‌را هم، بی‌تغییر به‌حساب آوریم.

برجزء جدا شدهٔ تار، درنقطهٔ M'، کشش H، در جهت چپ نسبت به مماس دراین نقطه، و درنقطهٔ N' هم، همین‌کشش، منتهی درجهت راست نسبت به مماس، اثر می‌کند. اگر زاویهٔ میل مماس‌ها را، به‌ترتیب، α و $\bar{\alpha}$ بنامیم، آن وقت، مجموع مؤلفه‌های قائم این نیروها (و فقط لازم است، همان‌ها را درنظر بگیریم): چنین خواهد بود:

$$H(\sin\bar{\alpha}-\sin\alpha)=H\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{N'}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M'}\right]=H\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$$

---

*) شکل ۱۳۸ را، قائم فرض می‌کنیم (همین صفحه).

در این‌جا، دوباره، از حق‌کنار گذاشتن مجذور مقدارهای کوچك، استفاده کردیم؛ مثلاً، فرض کردیم

$$\sin\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \doteq tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

و سپس، نمو تابع $\frac{\partial y}{\partial x}$ را، با دیفرانسیل آن، عوض کردیم.

اگر چگالی «خطی» سیم را ρ بنامیم، آن‌وقت، جرم این جزء، برابر می‌شود با

$$\rho ds = \rho dx$$

در این صورت، بنا به‌قانون نیوتونی حرکت، حاصل‌ضرب ρdx (جرم جزء) در شتاب $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ باید برابر با نیروئی باشدکه براین جزء اثر می‌کند، یعنی

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

بالاخره، اگر $\frac{H}{\rho} = a^2$ بگیریم، به معادلهٔ دیفرانسیلی با مشتق‌های نسبی می‌رسیم

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (۲)$$

که پدیدهٔ موردنظر ما را، شرح می‌دهد.

به‌جز این معادله، تابع مجهول $y = y(x, t)$، باید با یك رشته ازشرطها، و قبل از همه، با به‌اصطلاح شرطهای جدی (یا شرطهای مرزی) سازگار باشد:

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0 \qquad (۳)$$

که معرف واقعیت استواری دو انتهای تار هستند. در ضمن، اگر تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$* $(0 \leqslant x \leqslant l)$، معرف انحراف و سرعت نقطهٔ سیم در لحظهٔ $t = 0$ باشند، باید این شرطهای اولیه هم، برقرار باشند:

$$y(x, 0) = f(x), \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x) \qquad (۴)$$

---

*) هر دو تابع، به‌ازای $x = 0$ یا $x = l$، باید برابر صفر باشند.

به این ترتیب، مسألهٔ ما، منجر به جست و جوی تابعی مثل $y(x, t)$ می‌شود که درمعادلهٔ (۲) صدق کند و با شرط‌های (۳) و (۴) سازگار باشد.

با دنبال کردن روش فوریه، بدجست‌وجوی جواب‌های خاص معادلهٔ (۲) می‌رویم، که باشرط‌های جدی (۲) سازگار ولی باجواب‌های صفر، مخالف باشند (فعلاً، شرط‌های اولیه را کنار می‌گذاریم). این جواب‌های خاص را، به صورت ضرب دو تابعی پیدا می‌کنیم که یکی‌ازآن‌ها تنها به x و دیگری تنها به t بستگی داشته باشد.

$$y = X(x) \cdot T(t)$$

دراین حالت، معادلهٔ (۲)، به این صورت درمی‌آید:

$$XT'' = a^2 X'' T$$

که در آن، علامت «″»، به معنای مشتق نسبت به متغیری است که تابع به آن وابسته است، یا

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X} \qquad (۵)$$

از آن‌جاکه سمت چپ این برابری به x وسمت راست آن به t بستگی ندارند، بنابراین، مقدار مشترك آن‌ها، نه به x بستگی خواهد داشت و نه به t و، درنتیجه، منجر به مقدار ثابتی‌می‌شودکه‌آن‌را به‌صورت $-a^2\lambda^2$ — درنظرمی‌گیریم (به‌ازای $\lambda > 0$). دراین‌صورت، معادلهٔ (۵)، به دو معادله تجزیه می‌شود:

$$T'' + a^2\lambda^2 T = 0, \quad X'' + \lambda^2 X = 0 \qquad (۶)$$

و جواب‌های آن («انتگرال‌های کلی»)، به این صورت درمی‌آیند:

$$T = A \cos a\lambda t + B \sin a\lambda t$$

$$X = C \cos\lambda x + D \sin\lambda x$$

برای این‌که شرط‌های (۳) در تابع $y = XT$ صدق کنند، باید این شرط‌ها، با معادلهٔ X سازگار باشند. با قراردادن $x = 0$، بلافاصله به دست می‌آید: $C = 0$؛ با فرض $x = l$ و توجه به‌این‌که، D مخالف صفر است، به شرط $\sin\lambda l = 0$ می‌رسیم، که از آن‌جا به دست می‌آید: $\lambda l = n\pi$ (برای عددهای طبیعی n). بنابراین، λ می‌تواند یکی از مقدارهای زیر باشد:

$$\lambda_1=\frac{\pi}{l},\quad \lambda_2=2\frac{\pi}{l},\ \ldots,\ \lambda_n=n\frac{\pi}{l},\ \ldots \tag{۷}$$

اگر به‌ازای $\lambda=\lambda_n$ فرض کنیم:

$$AD=a_n,\quad BD=b_n$$

آن وقت، به‌این دنباله از جواب‌های خاص می‌رسیم:

$$y_n=(a_n cos a\lambda_n t+b_n sin a\lambda_n t)sin\lambda_n x \qquad (n=1,2,3,\ \ldots)$$

به‌سادگی دیده می‌شود که، شرط‌های مورد نظر، درمجموع این جواب‌ها نیز، به هر تعداد دلخواه که انتخاب شوند، صدق می‌کنند. این مطلب، ما را به‌این فکر وا می‌دارد که رشته‌ای نامتناهی را شامل همهٔ این جواب‌ها درنظر بگیریم وفرض کنیم:

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos a\lambda_n t+b_n sin a\lambda_n t)sin\lambda_n x \tag{۸}$$

می‌بینیم که این رشته متقارب است و، مجموع آن، در معادلهٔ (۲) صدق می‌کند؛ برقراری شرط‌های (۳)، روشن است. اکنون تنها باید به‌شرط‌های اولیهٔ (۴) بپردازیم وضریب‌های a_n و b_n را طوری پیدا کنیم که، مجموع این رشته، با شرط‌های (۴) سازگار باشد. فرض می‌کنیم، که برای رشتهٔ (۸)، بتوان جمله به جمله نسبت به t، مشتق گرفت، به‌نحوی که

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n a\lambda_n sin a\lambda_n t+b_n a\lambda_n cos a\lambda_n t)sin\lambda_n x \tag{۹}$$

اگر در (۸) و (۹) فرض کنیم $t=0$، به دست می‌آید:

$$\sum_{1}^{\infty}a_n sin\lambda_n x=f(x),\qquad \sum_{1}^{\infty}a\lambda_n b_n sin\lambda_n x=g(x) \tag{۱۰}$$

از این‌جا، اگر تابع‌های f و g با شرط‌های بسط به رشتهٔ فوریه سازگار باشند، به‌کمك دستور (۲۵) شمارهٔ ۶۸۹ می‌توان، سرانجام، ضریب‌های مجهول را پیدا کرد:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\lambda_n x\,dx,\quad b_n=\frac{2}{a\lambda_n l}\int_0^l g(x)sin\lambda_n x\,dx \tag{۱۱}$$

---

*) اگرمقدار ثابت‌رابطهٔ (۵)را، به‌صورت $a^2\lambda^2$ می‌گرفتیم، آن‌وقت‌شرط‌های حدی می‌توانستند تنها وقتی در تابع X صدق‌کنند، که این تابع، متحد با صفر باشد.

به این ترتیب، دست‌کم به طور نظری، توانستیم جواب کامل مسأله را بـه صورت رشتهٔ (۸)، با ضریب‌هایی که به‌کمك دستورهای (۱۱) محاسبه می‌شوند، پیدا کنیم.

ولی هنوز این پرسش به‌جای خود باقی است که: آیا به‌واقع، جواب همین است؟ برای این‌که به‌این پرسش پاسخ بدهیم، شرط‌هایی برای تابع‌های f و g قایل می‌شویم: فرض می‌کنیم تابع g مشتق‌پذیر و تابع f دوبار مشتق‌پذیر باشد؛ درضمن، مشتق‌های f'' و g' را، در بازهٔ $[0, l]$، با تغییری محدود درنظر می‌گیریم. در این صورت، این ارزیابی‌ها را خواهیم داشت:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \qquad \lambda_n b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)^*$$

هر دو بسط (۱۰) به‌واقع، در تمامی بازهٔ $[0, l]$ برقرارند؛ بسط (۸) هم متقارب است، و درضمن، تابعی که به‌وسیلهٔ آن معین می‌شود، هم با شرط‌های حدی و هم با شرط‌های اولیه سازگار است (اکنون، مشتق‌گیری جمله به جمله نسبت به t، با توجه به تقارب یکنواخت رشتهٔ (۹)، درست از آب درمی‌آید). اندکی دشوارتر، به‌این هم اطمینان پیدا می‌کنیم که، این تابع، درمعادلهٔ دیفرانسیلی هم صدق می‌کند**.

توجه کنیم، رشته‌هـای (۱۰) در بیرون مرزهای بازهٔ $[0, l]$ هم متقارب‌اند؛ اگـر مجموع آن‌ها را، مثل قبل، $f(x)$ و $g(x)$ بنامیم، به‌گسترش این تابع‌ها برهمهٔ بازهٔ نامتناهی $(-\infty, +\infty)$ می‌رسیم. به‌نحوی که ویژگی‌های دیفرانسیلی آن‌ها، به جز در نقطه‌های به‌صورت kl (k، عددی درست است)، به‌قوت خود باقی می‌مانند. رشتهٔ برای $g(x)$ را، که درهر بازهٔ متناهی به‌طور یکنواخت متقارب است، می‌توان جمله به جمله انتگرال گیری کرد، به‌نحوی که

$$-\sum_{1}^{\infty} b_n \cos \lambda_n x = \frac{1}{a} g_1(x)$$

که در آن، $g_1(x)$، یکی از تابع اولیه‌های تابع $g(x)$ است. اگـر پرانتزها را در (۸)

---

*) این، ازدستورهای کلی (۲۱) شمارهٔ **۷۰۸** ویادداشت شمارهٔ **۷۰۹** نتیجه می‌شود. تغییر بازهٔ $[0, \pi]$ به بازهٔ $[0, l]$ چندان مهم نیست. درضمن، شرط‌های طبیعی

$$f(0) = f(l) = 0, \quad g(0) = g(l) = 0$$

مربوط به استواری دو انتهای سیم، صفربودن مقداری را ایجاب می‌کند کـه، در آن‌جا، با B_n نشان داده بودیم.

**) این اثبات‌را، بامشتق‌گیری جمله‌به‌جمله، به‌شرطی می‌شد به‌انجام رسانید که محدودیت‌های سنگینی بر تابع‌های f و g تحمیل کنیم، تا مرتبهٔ کوچکی ضریب‌های a_n و b_n بالا برود.

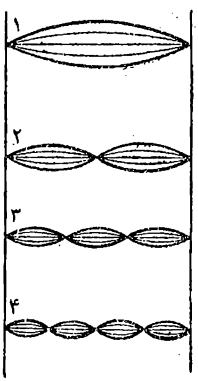
بازکنیم، این عبارت را می‌توان چنین نوشت:

$$y=\frac{1}{2}\left\{\sum_{1}^{\infty} a_n \sin\lambda_n(x+at)+\sum_{1}^{\infty} a_n \sin\lambda_n(x-at)-\right.$$

$$\left.-\sum_{1}^{\infty} b_n \cos\lambda_n(x+at)+\sum_{1}^{\infty} b_n \cos\lambda_n(x-at)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{f(x+at)+f(x-at)+\frac{1}{a}g_1(x+at)-\frac{1}{a}g_1(x-at)\right\}$$

اکنون اگر دوبار، نسبت به t و نسبت به x، مشتق بگیریم، به برقراری معادلهٔ (۲) قانع می‌شویم.



شکل ۱۳۹

این مسأله را می‌توان به‌طور مستقیم هم عمل کرد و به‌شکل اخیر آن رسید، ولی حل مسأله به‌کمک رشتهٔ مثلثاتی (۸) برتری دارد، زیرا به‌کمک آن می‌توان مبانی اصلی و مهم فیزیکی پدیدهٔ مورد بررسی را، کشف کرد. اگر دو جملهٔ داخل پرانتز را، در (۸)، یکی کنیم، می‌توانیم بسط را به این صورت بنویسیم:

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x\sin\left(\frac{n\pi a}{l}t+\alpha_n\right)$$

می‌بینیم که، نوسان کامل سیم، از رشته نوسان‌های جداگانه‌ای تشکیل می‌شود:

$$y_n=A_n \sin\frac{n\pi}{l}x\sin\left(\frac{n\pi a}{l}t+\alpha_n\right)$$

نقطه‌هایی که در این نوسان‌های مقدماتی شرکت دارند، همگی با یك بسامد و یا (اگر مناسب‌تر به‌نظر برسد) با یك دورهٔ تناوب نوسان می‌کنند که، درواقع، پاسخ‌گوی آهنگ ارتفاع معینی است. دامنهٔ نوسان هر نقطه، بستگی به موضع آن دارد و برابر است با

$$A_n\left|\sin\frac{n\pi}{l}x\right|$$

تمامی سیم، به n بخش برابر تقسیم می‌شود، درضمن، نقطه‌های هر بخش، دارای یك فاز و نقطه‌های بخش‌های مجاور با فازهای مخالف مستقیم هستند. در شکل ۱۳۹، موضع‌های متوالی سیم، برای حالت‌های $n=1, 2, 3, 4$، نشان داده شده است، نقطه‌هایی که یك

بخش را از بخش مجاور خود جدا می‌کنند، در حالت سکون به‌سر می‌برند و، به همین مناسبت، آن‌ها را «گره» می‌نامند. نقطه‌های وسط بخش‌ها («شکم‌ها»)، حداکثر دامنه را دارند. این پدیده را، موج قائم می‌نامند و، به همین علت، خود روش فوریه را هم، معمولاً، «روش موج‌های قائم» می‌گویند.

آهنگ اصلی (درجهٔ اصلی صدا)، با مؤلفهٔ اول y_1 معین می‌شود که متناظر با بسامد $\omega_1=\frac{\pi a}{l}=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{H}{\rho}}$ و دورهٔ تناوب $T_1=2l\sqrt{\frac{\rho}{H}}$ است. بقیهٔ صداها همزمان با تارهای اصلی مفروض، «رنگ» صدای معینی و یا هارمونی آن را مشخص می‌کنند. اگر با انگشت به وسط سیم، فشار وارد آوریم، بلافاصله، هم صدای اصلی و هم صداهای فرعی فرد، که برای آن‌ها «شکم» درست شده بود، خاموش می‌شوند. صداهای فرعی زوج، که برای آن‌ها در وسط سیم «گره» ایجاد می‌شود، به‌جای خود باقی می‌مانند؛ که در بین آن‌ها، صدای فرعی دوم، نقش اصلی را به عهده دارد، که دورهٔ تناوبی برابر $T_2=\frac{1}{2}T_1$ دارد و، سیم، آغاز به دادن اکتاو آهنگ نخستین می‌کند. همهٔ این‌ها را می‌توان از جوابی که برای مسأله به‌دست آورده‌ایم، نتیجه گرفت.

۷۲۲. مسألهٔ مربوط به انتشار گرما در میلهٔ متناهی. میلهٔ همگن نازک به طول l را در نظر می‌گیریم که بین نقطه‌های $x=0$ و $x=l$ از محور x واقع شده است. مقطع میله به مساحت σ را، آن‌قدر کوچک می‌گیریم که بتوان، به همهٔ نقطه‌های آن در هر لحظه، یک درجهٔ حرارت را نسبت داد. سطح جانبی میله را، جدا از محیط دور و بر خود فرض می‌کنیم*. در لحظهٔ اولیهٔ $t=0$، توزیع درجهٔ حرارت u را در طول میله، با تابع $f(x)$ مشخص می‌کنیم $(0\leqslant x\leqslant l)$؛ که به جز آن، رژیم حرارتی حفظ شده در دو انتهای میله را، نشان می‌دهد. مسأله این است که، درجهٔ حرارت نقطه‌های میله را، به عنوان تابعی از طول نقطهٔ x و زمان t، معین کنیم:

$$u=u(x,t)$$

جزئی از میله را که بین مقطع‌های x و $x+dx$ قرار دارد، در نظر می‌گیریم. مقدار گرمائی که در فاصلهٔ زمانی بی‌نهایت کوچک dt، از مقطع سمت چپ، وارد جزء می‌شود، به این ترتیب، قابل بیان است [با ۶۶۶، ۲) مقایسه کنید]:

---

*) به‌جای میله، می‌توان جدار نامتناهی بین صفحه‌های $x=0$ و $x=l$ را در نظر گرفت و فرض کرد که، در هر صفحهٔ عمود بر محور x، یک نظام حرارتی حفظ می‌شود.

$$-k\sigma\frac{\partial u}{\partial x}dt$$

که در آن، k، عبارت است از «ضریب رسانائی گرمای درونی» در میله؛ علامت منفی به‌این معناست که، گرما، ازجای گرم‌تر، به‌جائی که کمتر گرم است، می‌رود. به همین ترتیب، در همین فاصلهٔ زمانی، از مقطع راست میله، به اندازهٔ

$$-k\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\right)dt$$

گرما، به بیرون می‌رود؛ اگر علامت را عوض کنیم، مقدار گرمائی را به دست می‌آوریم که، از طریق همین مقطع، از راست بـه چپ می‌رود، یعنی وارد جزء می‌شود. بـه این ترتیب، مقدار کل گرمایی که، در این فاصلهٔ زمانی، در جزء جدا شدهٔ میله انباشته می‌شود، چنین است:

$$k\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\,dt$$

این مقدار را به‌طریق دیگری هم، با آغاز از علت افزایش حرارت در $\frac{\partial u}{\partial x}dt$، می‌توان محاسبه کرد. اگر ظرفیت گرمائی و چگالی مادهٔ میله را، به ترتیب، c و ρ بنامیم، آن‌وقت، گرمای تلف شده، این‌طور بیان می‌شود:

$$c\rho\sigma dx.\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

اگر این دو عبارت را، بـرابـر قرار دهیم، به معادلهٔ دیفرانسیلی اصلی، برای رسانائی گرما می‌رسیم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (۱۲)$$

که، برای سادگی‌کار، در آن فرض کرده‌ایم: $a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}}$.

[این معادله را از معادلهٔ کلی

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u$$

هم می‌توان به دست آورد که، آن را، در شمارهٔ ۶۱۲، ۳° برای فضا به‌دست‌آورده بودیم، به شرطی که u را مستقل از y و z در نظر بگیریم.]

(a) ابتدا فرض می‌کنیم، در دو انتهای میله، درجهٔ حرارت ثابتی، و مثلاً° ۰، حفظ شود. این وضع، منجر به‌شرط‌های حدی زیر می‌شود:

$$u(0, t)=u(l, t)=0 \quad (t\geqslant 0)$$

قبلاً، شرط اولیه را یادآوری کرده بودیم:

$$u(x, 0)=f(x) \quad (0\leqslant x\leqslant l) \qquad (13)$$

در ضمن، با توجه به شرط‌های حدی، باید فرض کرد: $f(0)=f(l)=0$. برای جست‌وجوی تابع $u(x, t)$، که در معادلهٔ (۱۲) و همهٔ شرط‌های مورد نظر صدق کند، از روش فوریه استفاده می‌کنیم.

$u=XT$ می‌گیریم، به نحوی که معادله، به این صورت درمی‌آید:

$$XT'=a^2X''T \quad \text{یا} \quad \frac{T'}{T}=a^2\frac{X''}{X}$$

اگر مقدار ثابت این نسبت‌ها را برابر $-a^2\lambda^2$ بگیریم ($\lambda>0$)، آن وقت، به دو معادلهٔ می‌رسیم:

$$T'+a^2\lambda^2T=0 \Rightarrow T=Ce^{-a^2\lambda^2t} \qquad (14)$$

$$X''=\lambda^2X=0 \Rightarrow X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x \qquad (15)$$

برای این‌که تابع XT با شرط‌های حدی سازگار باشد، باید داشته باشیم:

$$A=0, \quad \lambda l=n\pi \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

به‌نحوی که λ می‌تواند همان مقدارهای (۷) را، مثل مسألهٔ قبل، بپذیرد*. با فرض $BC=b_n$، این رشته جواب‌های خاص، به دست می‌آید:

$$u_n=b_ne^{-a^2\lambda_n^2t}\sin\lambda_nx \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

و جواب کلی را به صورت رشتهٔ زیر انتخاب می‌کنیم:

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}b_ne^{-a^2\lambda_n^2t}\sin\lambda_nx \qquad (16)$$

---

*) زیرنویس صفحهٔ ۲۴۹۱ را ببینید.

اگر بخواهیم شرط اولیه صادق باشد، باید قرار دهیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

اگر تابع $f(x)$ پیوسته و دارای تغییر محدود باشد، آن وقت، برای تحقق این بسط، کافی است داشته باشیم:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

در این جا، اثبات این حقیقت که، جواب صوری (۱۶)، همان جواب واقعی است، دشوار نیست. وجود عامل

$$e^{-a^2\lambda_n^2 t} = e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}t}$$

امکان می‌دهد تا از رشتهٔ (۱۶)، جمله به جمله، نسبت به t و دو بار نسبت به x، مشتق بگیریم، زیرا رشته‌های حاصل نسبت به x $(0 \leqslant x \leqslant l)$ ونسبت به t $(t \geqslant a > 0)$ به‌طور یکنواخت، متقارب‌اند.

(b) اکنون فرض کنید، در انتهای $x = l$، درجهٔ حرارت ثابت u_0 حفظ شود، ولی انتهای دوم $x = 0$ عایق باشد، به نحوی که، از طریق آن، هیچ‌گونه حرکت حرارتی رخ ندهد. به این پیش‌فرض‌ها، شرط‌های حدی زیر متناظرند:

$$u(l, t) = u_0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \qquad (۱۷)$$

شرط اولیه، همان است که در حالت قبل داشتیم.

در ضمن، بهتر است به جای تابع u، تابع مجهول v را، با فرض $u = u_0 + v$، واردکنیم. روشن است که برای v، این معادله را داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

و شرط‌های حدی، به شرط‌های ساده‌تری تبدیل می‌شوند:

$$v(l, t) = 0, \quad \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0$$

و بالاخره، شرط اولیه، به این صورت درمی‌آید:

$$v(x, 0) = f(x) - u_0$$

طبق معمول $v = XT$ می‌گیریم، برای T و X، عبارت‌های قبلی (۱۴) و (۱۵) به‌دست می‌آید. از آن جا که

$$\frac{dX}{dx} = -\lambda A \sin\lambda x + \lambda B \cos\lambda x$$

بنابراین، با توجه به شرط حدی دوم، به دست می‌آید $B = 0$ و بنا بر شرط حدی اول: $\cos\lambda l = 0$، به نحوی که این بار، λ می‌تواند این مقدارها را قبول کند:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2l},\ \lambda_2 = 3\frac{\pi}{2l},\ \ldots,\ \lambda_n (2n-1)\frac{\pi}{2l},\ \ldots$$

سرانجام، به این جواب خاص می‌رسیم:

$$v_n = a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

که به‌کمک آن، جواب کلی هم به دست می‌آید:

$$v = \sum_1^\infty a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x$$

در این حالت، شرط اولیه، به بسط

$$\sum_1^\infty a_n \cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l} = f(x) - u_0$$

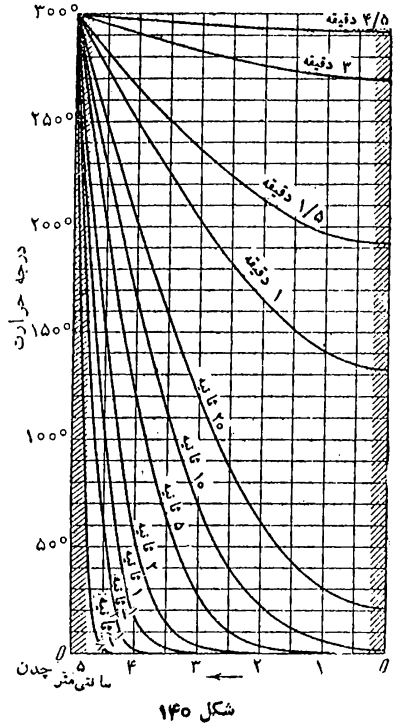
منجر می‌شود که استاندارد نیست [با مسألهٔ ۲۵) شمارهٔ ۶۹۰ مقایسه کنید]. با وجود این، به سادگی نشان داده می‌شود که، با رعایت خواست‌های معمولی نسبت به تابع $f(x)$، این بسط، در واقع، به ازای مقدار زیر برقرار است:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l}dx - \frac{4}{\pi}u_0 \cdot \frac{1}{2n-1}$$

به این ترتیب، سرانجام

$$u = u_0 + \sum_1^\infty a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x$$

به ازای ضریب‌هایی که هم اکنون یادکردیم؛ واقعی بودن این جواب را می‌توان شبیه



شکل ۱۴۰

حالت (a) مورد تحقیق قرار داد.

در حالت خاص $f(x)=0$، به این بسط می‌رسیم:

$$u=u_0-\frac{4u_0}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x$$

به‌کمك این‌دستور، می‌توان مقدارهای u را، برای مقدارهای مختلف t و x، به‌ازای $u_0=300$ و $a^2=0/139$*، محاسبه کردو، به کمك آن‌ها، نمودار شکل ۱۴۰ را، برای توزیع درجهٔ حرارت در میله، در لحظه‌های مختلف زمان، رسم کرد.

۷۲۳. حالت میلهٔ نامتناهی. اکنون، همین مسأله را دربارهٔ توزیع گرما، برای حالتی که میله از دو طرف، و مثلاً در طول محور x، نامتناهی باشد، حل می‌کنیم (به‌جای محور x، می‌توان تمام فضا را در نظر گرفت، تنها به شرطی که، در همهٔ نقطه‌های هر صفحهٔ عمود برمحور x، درجهٔ حرارت یکی باشد). معادلهٔ دیفرانسیلی تفاوتی نمی‌کند؛ شرط اولیهٔ

$$u(x,0)=f(x)$$

باید در این جا، در تمامی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ صدق کند و، طبیعی است که، هیچ‌گونه شرط حدی وجود ندارد.

مثل حالت‌های قبل، جواب خاص معادله، به این صورت درمی‌آید:

$$u=(a\cos\lambda x+b\sin\lambda x)e^{-a^2\lambda^2 t}$$

---

*) منظور، یك میلهٔ چدنی به طول ۵ سانتی‌متر است که دربارهٔ آن داریم:

$$\rho=0/0072 \text{ (کیلوگرم بر سانتی‌متر مکعب)},\quad c=0/13\frac{\text{cal.}}{\text{kg.C°}},$$

$$k=0/00013\frac{\text{cal}}{\text{cm.C°.sec}}$$

به نحوی که $a^2=0/139$.

ولی در این جا، دلیلی وجود ندارد که، از بین همهٔ مقدارهای مثبت λ، برخی را انتخاب کنیم. به این جهت، با در نظر گرفتن ثابت‌های a و b در بستگی با λ:

$$a=a(\lambda),\quad b=b(\lambda)$$

برای جواب کلی، به جای مجموع، به سراغ انتگرال می‌رویم:

$$u=\int_0^{\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda \qquad (۱۸)$$

برای این که، این جواب ــ که هنوز یك جواب صوری است ــ با شرط اولیه سازگار باشد، باید تابع‌های $a(\lambda)$ و $b(\lambda)$ را طوری اختیار کرد، که برای همهٔ xها، داشته باشیم:

$$\int_0^{\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda=f(x)$$

اکنون، فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$، با شرط کاربردپذیری دستور فوریه، که آن را به صورت زیر می‌نویسیم، سازگار باشد:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\cos\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\cos\lambda z\,dz+\sin\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\sin\lambda z dz\right\}d\lambda$$

از این جا روشن است که، تابع‌های $a(\lambda)$ و $b(\lambda)$ را، می‌توان با این رابطه‌ها معین کرد:

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\cos\lambda z\,dz,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\sin\lambda z\,dz$$

در چنین حالتی، جواب (۸) به این صورت درمی‌آید:

$$u=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\cos\lambda(z-x)dz$$

اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[-\infty,+\infty]$، انتگرال‌پذیر مطلق باشد، آن وقت [۵۲۱، قضیهٔ ۵]، می‌توان انتگرال‌گیری نسبت به λ و نسبت به z را جابه‌جا کرد:

$$u=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)dz\int_0^{\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(z-x)dz$$

انتگرال درونی را می‌توان، بلافاصله و بنابر ۶) (a) شمارهٔ ۵۱۹، محاسبه کرد؛ که چنین می‌شود:

$$\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}}$$

به این ترتیب، سرانجام، جواب مسأله به صورت انتگرال ساده‌ای درمی‌آید:

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}}dz \qquad (۱۹)$$

اگر از زیر علامت انتگرال، نسبت به t و نسبت به x (دو بار) مشتق بگیریم، به سادگی قانع می‌شویم که این، در واقع جواب است.

حالت «نیم‌نامتناهی»، یعنی حالتی را هم که میله از یك طرف، نامتناهی باشد و، مثلاً، در طول بخش مثبت محور x (و یا، اگر بخواهیم، نیم فضای $x\geqslant 0$) قرار گرفته باشد. فرض کنید، درانتهای $x=0$، درجهٔ حرارت ۰ حفظ شود. برای این حالت، می‌توان از همان جواب قبلی (۹) استفاده کرد، تنها به شرطی که تابع $f(x)$ را (که در این جا، تنها به ازای مقدارهای بین ۰ و $+\infty$ داده شده است). به مقدارهای منفی x طوری ادامه می‌دهیم که داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-\frac{z^2}{4a^2t}}dz=0$$

با توجه به زوج بودن نمای ضریب، روشن است که، کافی است، تابع $f(x)$ را به‌صورت فرد ادامه دهیم. در این صورت، جواب مسألهٔ جدید، این طور نوشته می‌شود:

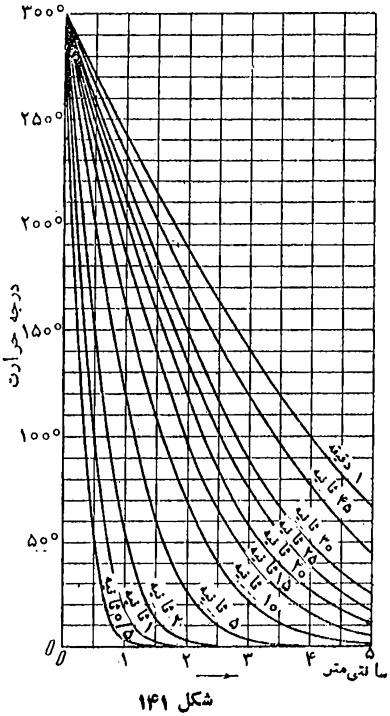
$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} f(z)\left[e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}}\right]dz$$

اگر بخواهیم، به‌ازای $x=0$، داشته باشیم: $u=u_0$، آن وقت، با واردکردن تابع مجهول $v=u-u_0$، به سادگی به دست می‌آید:

$$u=u_0+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}[f(z)-u_0]\cdot\left[e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}}\right]dz$$

در حالت خاصی که، در ضمن، $f(x)=0$، جواب به این صورت درمی‌آید:

$$u=u_0\left\{1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2}d\xi\right\}$$



شکل ۱۴۱

برای $u_0 = 300$ و $a^2 = 0/139$*، بنابراین دستور، به ازای مقدارهای مختلف x و t، می‌توان مقدارهای u را محاسبه و، به‌کمک آن‌ها، نمودار توزیع درجهٔ حرارت را در میله، در لحظه‌های زمانی مختلف، رسم کرد. جالب است، این نمودار را، که در شکل ۱۴۱ نشان داده شده است، با نمودار شکل ۱۴۰ مقایسه کنیم.

۷۲۴. تغییر شکل شرط‌های حدی. به مسألهٔ مربوط به توزیع گرما در میلهٔ متناهی، که در **۷۲۲** بررسی کردیم، برمی‌گردیم، ولی در این جا، شرط‌های حدی را تغییر شکل می‌دهیم. مثل قبل، فرض را بر این می‌گیریم که در انتهای $x = 0$، درجهٔ حرارت 0 حفظ شود، ولی در مورد انتهای $x = l$، فرض می‌کنیم، تشعشع آزاد در محیط فراگیرندهٔ درجهٔ حرارت 0، وجود داشته باشد. مقدار گرمایی که، در فاصلهٔ زمانی dt، به این انتها کشیده می‌شود، برابر است با [**۷۲۲** را ببینید]:

$$-k\sigma\frac{\partial u(l, t)}{\partial x}dt$$

و مقدار گرمایی که از آن منتشر می‌شود، بنا به قانون نیوتون [با **۳۵۹**، ۳) مقایسه کنید]، برابر است با

$$h\sigma u(l, t)dt$$

که در آن، h، «ضریب رسانائی بیرونی گرما» است. بنابراین، در انتهای $x = l$، باید این شرط برقرار باشد:

$$-k\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = hu(l, t)$$

اکنون، اگر جواب خاص ــ به صورت $u = XT$ را در نظر بگیریم، مثل شمارهٔ **۷۲۲**

---

*) که پاسخ‌گوی یک میلهٔ چدنی است؛ پاورقی صفحهٔ **۲۴۹۹** را ببینید.

به دست می‌آید:

$$T = Ce^{-a^2\lambda^2 t},$$

$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

شرط حدی در انتهای $x = 0$، می‌دهد $A = 0$؛ وشرط حدی در انتهای $x = l$، به این برابری منجر می‌شود:

$$-k\lambda\cos\lambda l = h\sin\lambda l \Rightarrow tg\lambda l = -\frac{k}{hl}\lambda l$$

به این ترتیب، برای λ، این رشته مقدارها به‌دست می‌آید:

$$\lambda_n = \frac{\xi_n}{l}$$

که در آن، ξ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$، به معنای ریشه‌های مثبت معادلهٔ غیرجبری

$$tg\xi = -\frac{k}{hl}\xi$$

است [۶۷۹، ۴) را ببینید]. جواب کلی، به‌این صورت درمی‌آید:

$$u = \sum_1^\infty b_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x$$

که شبیه (۱۶) است، ولی (و این، خیلی مهم است)، در این‌جا، عددهای λ_n، سرشت بسیار بغرنج‌تری دارند.

شرط اولیه، منجر به‌این بسط می‌شود:

$$\sum_1^\infty b_n \sin\frac{\xi_n x}{l} = f(x) \qquad (۲۰)$$

که آن را، می‌توان به عنوان تعمیم رشتهٔ فوریهٔ تابع $f(x)$ دربازهٔ $[0, l]$ دانست. با استفاده از تعامد تابع‌های $\sin\frac{\xi_n x}{l}$، [۶۷۹، ۴)]؛ ضریب b_n به صورت عادی، تعیین می‌شود:

$$b_n = \frac{\int_0^l f(x)\sin\frac{\xi_n x}{l}\,dx}{\int_0^l \sin^2\frac{\xi_n x}{l}\,dx}$$

ما به همین جواب صوری اکتفا می‌کنیم و به موضوع مربوط به شرطهایی که باید برای تابع $f(x)$ درنظر گرفت، تا برابری (۲۰) را تأمین کند، نمی‌پردازیم.

۷۲۵. انتشار گرما، در صفحهٔ دایره‌ای. همین مسألهٔ گرما را، برای حالت دیگری هم مورد بررسی قرار می‌دهیم، حالتی که با یك صفحهٔ دایره‌ای به شعاع R و مرکز واقع برمبداء مختصات سروکار داشته باشیم. فرض می‌کنیم، صفحه آن‌قدر نازك باشد، که در ارتفاع آن، درجهٔ حرارت تغییر نکند و دو رویهٔ بالایی و پایینی صفحه، عایق باشد. علاوه براین، تنها حالتی را درنظر می‌گیریم که در آن، درجهٔ حرارت u، تنها به شعاع حامل قطبی r (و نه به زاویهٔ قطبی θ) بستگی داشته باشد؛ برای این منظور، کافی است فرض کنیم که، داده‌های اولیه و حدی، با همین شرط سازگارند. [می‌توانستیم، به جای صفحه با رویه‌های عایق، استوانهٔ دواری را درنظر بگیریم که، از بالا و پایین، نامحدود باشد.]

معادلهٔ دیفرانسیلی کلی رسانائی گرما را درنظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u$$

[۶۷۲، ۳°]؛ با توجه به‌این‌که u به z بستگی‌ندارد، می‌توان آن را به‌این‌صورت نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

اگر در صفحهٔ xy، به مختصات قطبی برویم، باید عبارت داخل پرانتز را به این صورت بنویسیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

[۲۲۲، ۱) را ببینید]. سرانجام، با توجه به این‌که u به θ بستگی ندارد، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad (21)$$

فرض کنید، توزیع اولیهٔ درجهٔ حرارت، به این صورت باشد:

$$u(r,0)=\varphi(r) \qquad (0\leqslant r\leqslant R)$$

و شرط حدی، به این صورت منجر شود:

$$u(R,t)=0$$

حالا، به‌روش فوریه متوسل می‌شویم. جواب خاص معادلهٔ (۲۱) را به صورت

$$u=\mathbf{R}(r)\,\mathbf{T}(t)$$

جست وجو می‌کنیم؛ آن وقت، برای تعیین این تابع‌ها، به‌این معادله‌ها می‌رسیم:

$$\mathbf{T}'+a^{۲}\lambda^{۲}\mathbf{T}=۰ \quad \text{و} \quad \mathbf{R}''+\frac{۱}{r}\mathbf{R}'+\lambda^{۲}\mathbf{R}=۰$$

از معادلهٔ اول به دست می‌آید: $\mathbf{T}=Ce^{-a^{۲}\lambda^{۲}t}$. دومی هم، با فرض $r=\frac{۱}{\lambda}z$ و $\mathbf{R}\left(\frac{۱}{\lambda}z\right)=J(z)$، به معادلهٔ بسل منجر می‌شود:

$$J''+\frac{۱}{z}J'+J=۰$$

J را هم، با تابع بسل با اندیس صفر، متحد قرار می‌دهیم، یعنی فرض می‌کنیم $\mathbf{R}(r)=J_{۰}(\lambda r)$. شرط حدی می‌دهد:

$$J_{۰}(\lambda R)=۰$$

به‌یاد می‌آوریم [۶۷۹، ۶)] که، تابع $J_{۰}(x)$، مجموعه‌ای نامتناهی از ریشه‌های مثبت ξ_n دارد $(n=۱, ۲, ۳, \dots)$؛ بنابراین، برای λ، رشته مقدارهای زیر ممکن است:

$$\lambda_n=\frac{\xi_n}{R} \qquad (n=۱, ۲, ۳, \dots)$$

که متناظر با جواب‌های خاص

$$u_n=c_n e^{-a^{۲}\lambda_n^{۲}t}\,J_{۰}(\lambda_n r)$$

و از آن‌ها، طبق معمول، جواب کلی به دست می‌آید:

$$u=\sum_{۱}^{\infty} c_n e^{-a^{۲}\lambda_n^{۲}t}\,J_{۰}(\lambda_n r)$$

این می‌ماند که ضریب c_n را پیدا کنیم. شرط اولیه، که تاکنون از آن استفاده نکرده‌ایم، در این حالت می‌دهد:

$$\sum_{۱}^{\infty} c_n J_{۰}\left(\frac{\xi_n r}{R}\right)=\varphi(r) \qquad (۰\leqslant r\leqslant R)$$

در ۶۷۹، ۶) دیده‌ایم که، دستگاه تابع‌های $\{J_0(\xi_n x)\}$، به مفهوم عام خود، متعامد به «وزن» x در بازهٔ $[0, 1]$ است*؛ روشن است که دستگاه $\left\{J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right)\right\}$، در بازهٔ $[0, R]$، متعامد به «وزن» r است. اگر ضریب‌های این رشتهٔ تعمیم یافتهٔ فوریه را، به طریق عادی پیدا کنیم، به دست می‌آید:

$$c_n = \frac{\int_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right) dr}{\int_0^R r J_0^2\left(\frac{\xi_n r}{R}\right) dr}$$

در این‌جا هم، به‌جواب صوری حاصل، اکتفا می‌کنیم.

می‌بینید که، دو مثال اخیر، ازمحدودهٔ رشته‌های عادی فوریه بیرون‌اند. منظور ما از طرح آن‌ها، این بود که، برای خواننده، تصور درستی از کاربرد رشته‌های فوریه در «فیزیك ریاضی» به‌وجود آوریم. این رشته‌ها، در آن‌جا، نقش بزرگی به‌عهده دارند، ولی البته، نمی‌توانند همهٔ نیازهای فیزیك ریاضی را تا پایان، برآورند: کافی است اندکی تغییر در شرط‌ها به‌وجود آید تا نیاز به بسطی از نوع دیگر احساس شود. این موقعیت، به هیچ‌وجه از اهمیت رشته‌های فوریه و نظریهٔ مربوط به‌آن کم نمی‌کند، زیرا رشته‌های فوریه، ساده‌ترین و مهم‌ترین نمونهٔ «بسط متعامد» است؛ همهٔ بسط‌های مشابه دیگر، از روی نمونهٔ بسط فوریه ساخته شده‌اند و نظریهٔ آن‌ها، با نظریهٔ رشته‌های فوریه، رابطهٔ تنگاتنگی دارد.

۷۲۶. آنالیز همساز عملی. طرحی برای دوازده عرض. بسط تابع‌ها به‌رشتهٔ فوریه، یا آنالیز همساز، در بسیاری از موردهای عملی، مثل ماشین سازی، الکتروتکنیك و غیره، کاربرد دارد. ولی در این حالت‌ها، خیلی کم پیش می‌آید که دستورهای اولر ـ فوریه

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx^{**}, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx \\ (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad b &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

*) پاورقی مربوط به مثال ۶) شمارهٔ **۶۷۹** را ببینید.

**) در این‌جا، جملهٔ آزاد را در بسط مثلثاتی، با a_0 نشان داده‌ایم (و نه $\frac{a_0}{2}$).

برای محاسبهٔ ضریب‌های بسط، مورد استفاده قرار گیرند. موضوع این است که اغلب با تابع‌هایی درآنالیز همساز سروکار پیدا می‌کنیم که به وسیلهٔ جدول مقدارها و یا به‌وسیلهٔ نمودار داده شده‌اند. به این ترتیب، بیان تحلیلی تابع‌ها در دسترس نیست؛ بسیار پیش می‌آید که، توسل به‌آنالیز همساز، وسیله‌ای است تا بتوان بیان تحلیلی تابع را، دست‌کم به‌تقریب، به دست آورد. دراین گونه موردها، برای پیدا کردن ضریب‌های فوریه، باید به سراغ روش‌های تقریبی رفت. بدیهی است که، در عمل، تنها به چند جملهٔ اول بسط مثلثاتی نیاز داریم. ضریب‌های فوریه، دربیشتر موردها، به‌سرعت نزول می‌کنند و، همراه با آن‌ها، تأثیر همسازهای دور هم، پایین می‌آید.

اغلب، به‌کمک جدول یا از روی نمودار، با یك رشته عرض‌های هم فاصله، یعنی رشته مقدارهای تابع y، متناظر با مقدارهای هم فاصلهٔ آوند x، سروکار داریم. با این فرض‌ها، می‌توان به‌کمك روش‌هایی که در فصل نهم (§ ۵) دیده‌ایم، مقدارهای (۲۲) را به تقریب محاسبه کرد. ولی، این محاسبه‌ها، به‌اندازهٔ کافی طولانی‌اند؛ برای ساده‌ترکردن کار، روش‌های زیادی اندیشیده‌اند، که ما دراین‌جا، به‌یکی ازآن‌ها می‌پردازیم.

فرض کنید، بازهٔ بین ۰ و ۲π را به k بخش برابر تقسیم کرده و، این عرض‌ها را، دراختیار داشته باشیم:

$$y_۰, y_۱, y_۲, \cdots, y_{k-۱}, y_k = y_۰$$

که متناظر با این نقطه‌های تقسیم باشند:

$$۰, \frac{۲\pi}{k}, ۲\times\frac{۲\pi}{k}, \cdots, (k-۱)\frac{۲\pi}{k}, ۲\pi$$

دراین صورت، بنابرقاعدهٔ ذوزنقهٔ [۳۲۲] داریم (البته، به‌تقریب):

$$a_۰ = \frac{۱}{۲\pi}\times\frac{۲\pi}{k}\left[\frac{۱}{۲}y_۰ + y_۱ + y_۲ + \cdots + y_{k-۱} + \frac{۱}{۲}y_k\right]$$

با توجه به متناوب‌بودن تابع: $y_k = y_۰$ و مقدار $a_۰$ را می‌توان این‌طور نوشت:

$$ka_۰ = y_۰ + y_۱ + y_۲ + \cdots + y_{k-۱} \qquad (۲۳)$$

به همین ترتیب، اگر قاعدهٔ ذوزنقه را در مورد انتگرال دیگر (۲۲) به‌کار ببریم، به دست می‌آید:

$$a_m = \frac{۱}{\pi}\times\frac{۲\pi}{k}\left[y_۰ + y_۱\cos m\frac{۲\pi}{k} + y_۲\cos m\frac{۴\pi}{k} + \cdots + y_{k-۱}\cos m\frac{۲(k-۱)\pi}{k}\right]$$

و یا

$$\frac{k}{۲}a_m = y_۰ + y_۱ \cos m\frac{۲\pi}{k} + \cdots + y_{k-۱}\cos m\frac{۲(k-۱)\pi}{k} \qquad (۲۴)$$

و همچنین

$$\frac{k}{۲}b_m = y_۱ \sin m\frac{۲\pi}{k} + y_۲ \sin m\frac{۴\pi}{k} + \cdots + y_{k-۱}\sin m\frac{۲(k-۱)\pi}{k} \qquad (۲۵)$$

ابتدا $k = ۱۲$ می‌گیریم و از دوازده عرض آغاز می‌کنیم:

$$y_۰, y_۱, y_۲, \cdots, y_{۱۱}$$

که متناظرند با دوازده مقدار هم‌فاصلهٔ آوند:

$$۰, \frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۲\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۶}, \quad \pi, \frac{۷\pi}{۶}, \frac{۴\pi}{۳}, \frac{۳\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۳}, \frac{۱۱\pi}{۶}$$

و یا برحسب درجه

$$۰°, ۳۰°, ۶۰°, ۹۰°, ۱۲۰°, ۱۵۰°, ۱۸۰°, ۲۱۰°, ۲۴۰°, ۲۷۰°, ۳۰۰°, ۳۳۰°$$

همهٔ عامل‌هایی که باید این عرض‌ها را در آن‌ها ضرب کرد، منجر به‌این مقدارها می‌شوند:

$$\pm ۱, \quad \pm \sin ۳۰° = \pm ۰/۵, \quad \pm \sin ۶۰° = \pm ۰/۸۶۶$$

به سادگی قابل تحقیق است که

$$\left.\begin{aligned}
۱۲a_۰ &= y_۰ + y_۱ + y_۲ + \cdots + y_{۱۱} \\
۶a_۱ &= (y_۲ + y_{۱۰} - y_۴ - y_۸)\sin ۳۰° + \\
&\quad + (y_۱ + y_{۱۱} - y_۵ - y_۷)\sin ۶۰° + (y_۰ - y_۶) \\
۶a_۲ &= (y_۱ + y_۵ + y_۷ + y_{۱۱} - y_۲ - y_۴ - y_۸ - y_{۱۰}) \times \\
&\quad \times \sin ۳۰° + (y_۰ + y_۶ - y_۳ - y_۹) \\
۶a_۳ &= y_۰ + y_۴ + y_۸ - y_۲ - y_۶ - y_{۱۰} \\
۶b_۱ &= (y_۱ + y_۵ - y_۷ - y_{۱۱})\sin ۳۰° + \\
&\quad + (y_۲ + y_۴ - y_۸ - y_{۱۰})\sin ۶۰° + (y_۳ - y_۹) \\
۶b_۲ &= (y_۱ + y_۲ + y_۷ + y_۸ - y_۴ - y_۵ - y_{۱۰} - y_{۱۱})\sin ۶۰° \\
۶b_۳ &= y_۱ + y_۵ + y_۹ - y_۳ - y_۷ - y_{۱۱}
\end{aligned}\right\} \qquad (۲۶)$$

و غیره.

برای این‌که، عمل‌ها (و به خصوص، ضرب‌ها) به حداقل خود برسند، آن‌ها را بسا طرح معینی انجام می‌دهند که رونگه (G.Runge) پیشنهاد کرده است.

عرض‌ها را به ردیف زیر می‌نویسیم و دربارهٔ هر جفت عرضی که زیرهم نوشته‌ایم، عمل‌های جمع و تفریق را انجام می‌دهیم:

عرض‌ها

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
مجموع	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
تفاضل		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	

دوباره، این مجموع‌ها و تفاضل‌ها را، به همان ترتیب می‌نویسیم و عمل‌های جمع و تفریق را انجام می‌دهیم:

	مجموع‌ها		تفاضل‌ها	
	$u_0\ u_1\ u_2\ u_3$		$v_1\ v_2\ v_3$	
	$u_6\ u_5\ u_4$		$v_5\ v_4$	
مجموع	$s_0\ s_1\ s_2\ s_3$	مجموع	$\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$	
تفاضل	$d_0\ d_1\ d_2$	تفاضل	$\delta_1\ \delta_2$	

اکنون، بعد از آن‌که این مجموع‌ها و تفاضل‌ها را به‌دست آوردیم، به کمک رشته مقدارهای s، d، σ، δ می‌توانیم، به‌ترتیب زیر، ضریب‌های مجهول را به‌دست آوریم:

$$\left.\begin{aligned}
12a_0 &= s_0+s_1+s_2+s_3\\
6a_1 &= d_0+0/866d_1+0/5d_2\\
6a_2 &= (s_0-s_3)+0/5(s_1-s_2)\\
6a_3 &= d_0-d_2\\
6b_1 &= 0/5\sigma_1+0/866\sigma_2+\sigma_3\\
6b_2 &= 0/866(\delta_1+\delta_2)\\
6b_3 &= \sigma_1-\sigma_3
\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

و غیره.

به سادگی می‌توان قانع شد که، این دستورها، بادقت، متناظر با دستورهای (۲۶) هستند.

۷۲۷. مثال‌ها. ۱) درشکل ۱۴۲، دیاگرام نیروی مماسی (بر پیچ دوسر میل لنگ)، برای یك ماشین بخار داده شده است*. در ارتباط با مسألهٔ نوسان‌های پیچشی محور، جداکردن مؤلفه‌های همساز نیروی مماسی T، به‌عنوان تابعی از زاویهٔ φ دوران میل لنگ، برای ما جالب است. از روی نمودار، دوازده عرض هم فاصله را انتخاب می‌کنیم و، طبق طرحی که در بالا اشاره کردیم، به آنالیز همساز می‌پردازیم:

T	−۷۲۰۰	−۳۰۰	۷۰۰۰	۴۳۰۰	۰	−۵۲۰۰	−۷۴۰۰
		۲۵۰	۴۵۰۰	۷۶۰۰	۳۸۵۰	−۲۲۵۰	
u	−۷۲۰۰	−۵۰	۱۱۵۰۰	۱۱۹۰۰	۳۸۵۰	−۷۴۵۰	−۷۴۰۰
v		−۵۵۰	۲۵۰۰	−۳۳۰۰	−۳۸۵۰	−۲۹۵۰	

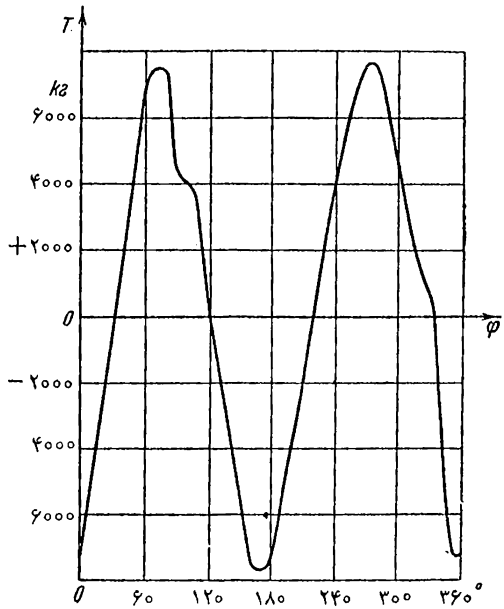
u	−۷۲۰۰	−۵۰	۱۱۵۰۰	۱۱۹۰۰
	−۷۴۰۰	−۷۴۵۰	۳۸۵۰	
s	−۱۴۶۰۰	−۷۵۰۰	۱۵۳۵۰	۱۱۹۰۰
d	۲۰۰	۷۴۰۰	۷۶۵۰	

v	−۵۵۰	۲۵۰۰	−۳۳۰۰
	−۲۹۵۰	−۲۳۵۰	
σ	−۳۵۰۰	−۱۳۵۰	−۳۳۰۰
δ	۲۴۰۰	۶۳۵۰	

اکنون، بنابر دستورهای (۲۷) داریم:

$$12a_0 = -14600 - 7500 + 15350 + 11900 =$$
$$= 5150; \qquad a_0 = 429;$$
$$6a_1 = 200 + 7400 \times 0{/}866 + 7650 \times 0{/}5 =$$
$$= 10433; \qquad a_1 = 1739;$$

*) دیاگرام‌های مشابهی هم، براساس دیاگرام‌های اندیکاتوری، برای نیروی ماند (اینرسی) ساخته شده است.



شکل ۱۴۲

$$6a_1=(-14600-11900)+$$

$$+(-7500-15350)\times 0/5=-37925;a \qquad a_1=-6321;$$

$$6a_3=2000-7650=-7450; \qquad a_3=-1242;$$

$$6b_1=-3500\times 0/5-1350\times 0/866-$$

$$-33000=-6219; \qquad b_1=-1037;$$

$$6b_2=(24000+6350)\times 0/866=75778; \qquad b_2=1263;$$

$$6b_3=-3500+33000=-2000; \qquad b_3=-33$$

به این ترتیب

$$T=429+1739\cos\varphi-1037\sin\varphi-6321\cos 2\varphi+1263\sin 2\varphi-$$

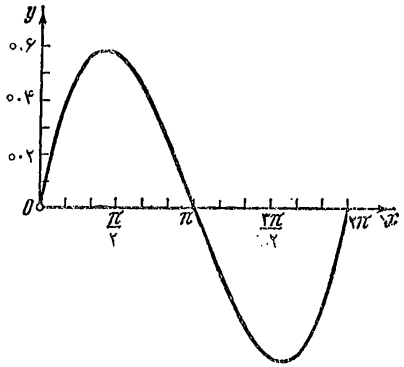
$$-1242\cos 3\varphi-33\sin 3\varphi+\dots=$$

$$=430+2020\sin(\varphi+121^\circ)+6440\sin(2\varphi+281^\circ)+$$

$$+1240\sin(3\varphi+268^\circ)+\dots$$

می‌بینیم، دراین‌جا، بیشترین تأثیر نیرو، مربوط به هارمونیك دوم است.

۲) برای‌این‌که متوجه شویم، ضریب‌های‌فوریه‌که ازطریق دوازده عرض هارمونیك آن به‌دست می‌آیند، تا چه حد دقیق‌اند، ازاین روش‌برای یك‌تابع تحلیلی مفروض‌استفاده می‌کنیم و نتیجه‌های حاصل را، با مقدارهای دقیق آن به مقایسه می‌گذاریم.



شکل ۱۴۳

ابتدا، تابع $f(x)$ را که در بازهٔ $[0, 2\pi]$، با رابطهٔ زیر داده شده است، در نظر می‌گیریم:

$$y = f(x) = \frac{1}{2\pi^2}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)$$

و برای بقیهٔ مقدارهای x، ازقانون تناوب استفاده می‌کنیم:

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

نمودار تابع، درشکل ۱۴۳ داده شده است. جدول را تشکیل می‌دهیم:

$x =$	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y =$	۰	۰/۲۰۰	۰/۵۸۲	۰/۵۸۹	۰/۴۶۵	۰/۲۵۵	۰	−۰/۲۵۵	−۰/۴۶۵	−۰/۵۸۹	−۰/۵۸۲	−۰/۲۰۰	۰

درضمن، به‌سادگی، می‌توان از اتحاد زیر استفاده کرد:

$$f(2\pi - x) = -f(x)$$

طبق طرح دونگه، برای این مقدارهای y، به دست می‌آید:

$$b_1 = ۰/۶۰۸,\quad b_2 = ۰/۰۷۶,\quad b_3 = ۰/۰۲۲$$

همهٔ عددهای u_i، وهمراه با آن‌ها، همهٔ ضریب‌های a_n، برابر صفر می‌شوند [۶۹۵، ۲۲)].

درعین حال (با انتگرال‌گیری جزء به جزء)، به‌کمك دستورهای (۲۲)، به طور مستقیم به‌دست می‌آید:

$$b_m = \frac{1}{2\pi^3}\int_0^{2\pi} (x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\sin mx\,dx = \frac{6}{m^3\pi^2}$$

به‌نحوی که

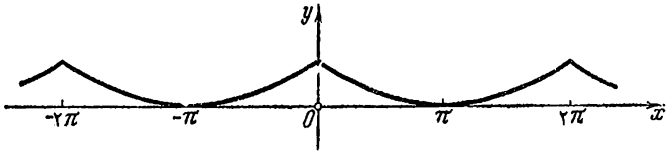
$$b_1=\frac{۶}{\pi^۲}=۰/۶۰۷۹;\quad b_۲=\frac{۳}{۴\pi^۲}=۰/۰۷۶۰;\quad b_۳=\frac{۲}{۹\pi^۲}=۰/۰۲۲۵$$

و می‌بینیم که، تطبیق مقدارها، تا چه حد عالی است.

۳) ولی همیشه، نتیجه‌ها، با این دقت به دست نمی‌آیند. به عنوان مثال دوم، تابع با دورهٔ تناوب ۲π را درنظر می‌گیریم که، دربازهٔ $[۰\ ،۲\pi]$، به‌این‌صورت داده شده باشد:

$$y=f(x)=\frac{۱}{\pi^۲}(x-\pi)^۲$$

که نمودار آن، درشکل ۱۴۴ داده شده است.



شکل ۱۴۴

با استفاده از اتحاد $f(۲\pi-x)=f(x)$، جدول را تشکیل می‌دهیم:

$x=$	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
$y=$	۱	۰/۶۹۴	۰/۴۴۴	۰/۲۵۰	۰/۱۱۱	۰/۰۲۸	۰	۰/۰۲۸	۰/۱۱۱	۰/۲۵۰	۰/۴۴۴	۰/۶۹۴	۱

دراین‌صورت، بنابرطرح رونگه:

$$a_۰=۰/۳۳۸;\ a_۱=۰/۴۱۴;\ a_۲=۰/۱۱۱;\ a_۳=۰/۰۵۶$$

در این حالت، عددهای v_i و ضریب‌های b_m برابر صفرند [۶۹۰، ۲۲)]. مقدارهای دقیق ضریب‌ها، چنین‌اند:

$$a_۰=\frac{۱}{۲\pi^۳}\int_۰^{۲\pi}(x-\pi)^۲dx\doteq\frac{۱}{۳}۰/۳۳۳$$

$$a_m=\frac{۱}{\pi^۳}\int_۰^{۲\pi}(x-\pi)^۲\cos mx\,dx=\frac{۴}{m^۲\pi^۲}\quad(m\geqslant۱)$$

و درحالت‌های خاص

$$a_۱=\frac{۴}{\pi^۲}\doteq۰/۴۰۵;\ a_۲=\frac{۱}{\pi^۲}\doteq۰/۱۰۱;\ a_۳=\frac{۴}{۹\pi^۲}\doteq۰/۰۴۵$$

به این ترتیب، با وجودی که برای دوضریب اول، خطای نسبی از ۱/۵ تا ۲ درصد تجاوز نمی‌کند، برای ضریب‌های بعدی، این خطای نسبی به ۱۰ درصد (a_7) و حتی ۲۰ درصد (a_3) می‌رسد. درشمارهٔ ۷۳۰، دوباره به مسألهٔ دقت دستورهای تقریبی برمی‌گردیم، ولی از هم‌اکنون روشن است که، برای افزایش این دقت، باید تعداد عرض‌های انتخابی را زیادتر کرد.

۷۲۸. طرح برای بیست و چهار عرض. اکنون، فرض می‌کنیم، بیست‌وچهار عرض را دراختیار داشته باشیم و یا، به‌کمك نمودار، به‌دست آورده باشیم:

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{23}$$

که متناظر با این مقدارهای آوند هستند:

$$0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \dots, \frac{23\pi}{12}$$

و یا برحسب درجه

$$0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, \dots, 345^\circ$$

این‌بار، همهٔ ضریب‌هایی که، برای محاسبهٔ تقریبی ضریب‌های فوریه، باید درعرض‌ها ضرب شوند، منجر می‌شوند به

$$\pm 1;\ \pm \sin 30^\circ;\ \pm \sin 45^\circ;\ \pm \sin 60^\circ;\ \pm \sin 75^\circ$$

بدون این‌که (به دلیل شباهت کامل با قبلی) به بحث تفضیلی بپردازیم، بلافاصله به‌طرح محاسبه می‌پردازیم که، بازهم، به‌وسیلهٔ دونگه پیشنهاد شده‌است. باتوجه به‌تجربه‌ای که خواننده به‌دست آورده است، این طرح، بدون هیچ توضیحی، برای او قابل فهم‌است.

عرض‌ها	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}
	y_{23}	y_{22}	y_{21}	y_{20}	y_{19}	y_{18}	y_{17}	y_{16}	y_{15}	y_{14}	y_{13}		
مجموع‌ها	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
تفاضل‌ها		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	

مجموع‌ها	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
	u_{12}	u_{11}	u_{10}	u_9	u_8	u_7	

تفاضل‌ها	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	
	v_{11}	v_{10}	v_9	v_8	v_7		

مجموع‌ها تفاضل‌ها	p_0	p_1	p_2	p_3	P_4	p_5	p_6
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	

مجموع‌ها تفاضل‌ها	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	

تفاضل‌ها			
	s_1	s_2	s_3
	s_5	s_4	
مجموع‌ها	m_1	m_2	m_3
تفاضل‌ها	n_1	n_2	

مجموع‌ها				
	p_0	p_1	p_2	p_3
	p_6	p_5	p_4	
مجموع‌ها	k_0	k_1	k_2	k_3
تفاضل‌ها	l_0	l_1	l_2	

یادآوری می‌کنیم که، انجام عمل‌های جمع و تفریق، با مقدارهای q و r، ضرورتی ندارد.

اکنون، با دراختیار داشتن مقدارهای k، l، m، n، q، r، ضریب‌های فوریه، به‌این ترتیب، بیان می‌شوند:

$$
\left.\begin{aligned}
&24a_0 = k_0 + k_1 + k_2 + k_3;\\
&12a_1 = [q_0 + 0/5q_4 + 0/61224(q_1 + q_5)] +\\
&\quad + [0/86600q_2 + 0/70710q_3 + 0/35536(q_1 - q_5)];\\
&12a_2 = l_0 + 0/86600l_1 + 0/5l_2;\\
&12a_3 = (q_0 - q_4) + 0/70710(q_1 - q_3 - q_5);\\
&12a_4 = (k_0 - k_3) + 0/5(k_1 - k_2);\\
&12a_5 = [q_0 + 0/5q_4 + 0/61224(q_1 + q_5)] -\\
&\quad - [0/86600q_2 + 0/70710q_3 + 0/35536(q_1 - q_5)];\\
&12a_6 = l_0 - l_2;\\
&12b_1 = [0/5r_2 + r_6 + 0/61224(r_1 + r_5)] +\\
&\quad + [0/70710r_3 + 0/86600r_4 - 0/35536(r_1 - r_5)];\\
&12b_2 = 0/5m_1 + 0/86600m_2 + m_3;\\
&12b_3 = (r_2 - r_6) + 0/70710(r_1 + r_3 - r_5);\\
&12b_4 = 0/86600(n_1 + n_2);\\
&12b_5 = [0/5r_2 + r_6 + 0/61224(r_1 + r_5)] -\\
&\quad - [0/70710r_3 + 0/86600r_4 - 0/35536(r_1 - r_5)];\\
&12b_6 = m_1 - m_3 \quad \text{(و غیره)}
\end{aligned}\right\} \qquad (۲۸)
$$

بقیهٔ ضریب‌ها، با بیست و چهار عرض، با دقت کمتری به‌دست می‌آیند.

توجه خواننده را به این نکته جلب می‌کنیم: برای به دست‌آوردن ضریب‌های a_1 و a_5، باید عبارت‌های داخل کروشه‌ها را محاسبه و، سپس، (برای a_1) باهم‌جمع و (برای a_5) ازهم کم کرد. همین توجه را دربارهٔ ضریب‌های b_1 و b_5 هم، باید داشته باشیم.

۷۲۹. مثال‌ها. ۱) به دیاگرام نیروی مماسی برمی‌گردیم و به‌کمک بیست و چهار عرض، دوباره آنالیز همساز را درطرح جدید خود می‌دهیم:

r	−۷۲۰۰	−۴۱۵۰	−۳۰۰	۳۲۵۰	۷۰۰۰	۷۲۵۰	۴۳۰۰	۲۷۵۰	۰	−۲۶۵۰	−۵۲۰۰	−۷۷۰۰	−۷۲۰۰
		−۵۱۵۰	۲۵۰	۲۳۰۰	۴۵۰۰	۶۸۰۰	۷۶۰۰	۶۲۰۰	۳۸۵۰	۶۵۰	−۲۲۵۰	−۴۸۵۰	
u	−۷۲۰۰	−۹۳۰۰	−۵۰	۵۵۵۰	۱۱۵۰۰	۱۴۲۵۰	۱۱۹۰۰	۹۱۵۰	۳۸۵۰	−۲۰۰۰	−۷۴۵۰	−۱۲۵۵۰	−۷۴۰۰
v		۱۰۰۰	−۵۵۰	۹۵۰	۲۵۰۰	۶۵۰	−۳۳۰۰	−۳۶۵۰	−۳۸۵۰	−۳۳۰۰	−۲۹۵۰	−۲۸۵۰	

u	−۷۲۰۰	−۹۳۰۰	−۵۰	۵۵۵۰	۱۱۵۰۰	۱۴۲۵۰	۱۱۹۰۰
	−۷۴۰۰	−۱۲۵۵۰	−۷۴۵۰	−۲۰۰۰	۳۸۵۰	۹۱۵۰	
p	−۱۴۶۰۰	−۲۱۸۵۰	−۷۵۰۰	۳۵۵۰	۱۵۳۵۰	۲۳۴۰۰	۱۱۹۰۰
q	۲۰۰	۳۲۵۰	۷۴۰۰	۷۵۵۰	۷۶۵۰	۵۱۰۰	

v	۱۰۰۰	−۵۵۰	۹۵۰	۲۵۰۰	۶۵۰	−۳۳۰۰
	−۲۸۵۰	−۲۹۵۰	−۳۳۰۰	−۳۸۵۰	−۳۶۵۰	
r	−۱۸۵۰	−۳۵۰۰	−۲۳۵۰	−۱۳۵۰	−۳۰۰۰	−۳۳۰۰
s	۳۸۵۰	۲۴۰۰	۴۲۵۰	۶۳۵۰	۴۳۰۰	

p	−۱۴۶۰۰	−۲۱۸۵۰	−۷۵۰۰	۳۵۵۰	s	۳۸۵۰	۲۴۰۰	۴۲۵۰
	۱۱۹۰۰	۲۳۴۰۰	۱۵۳۵۰			۴۳۰۰	۶۳۵۰	
k	−۲۷۰۰	۱۵۵۰	۷۸۵۰	۳۵۵۰	m	۸۱۵۰	۸۷۵۰	۴۲۵۰
l	−۲۶۵۰۰	−۴۵۲۵۰	−۲۲۸۵۰		n	−۴۵۰	−۳۹۵۰	

و از آن‌جا، بنابر دستورهای (۲۸):

$$a_0 = ۴۲۷,\ a_1 = ۱۶۸۵,\ a_2 = -۶۴۲۶,\ a_3 = -۱۱۷۵,\ a_4 = -۷۸۳,$$

$$a_5=-۱۶۳,\ a_6=-۳۰۴,\ b_1=-۹۳۸,\ b_2=۱۳۲۵,\ b_3=-۸۷,$$
$$b_4=-۳۱۸,\ b_5=-۳۹۸,\ b_6=۳۲۵$$

به این ترتیب، به بسط زیر می‌رسیم:

$$T=۴۲۷+۱۶۸۵\cos\varphi-۹۳۸\sin\varphi-۶۴۲۶\cos۲\varphi+۱۳۲۵\sin۲\varphi-$$
$$-۱۱۷۵\cos۳\varphi-۸۷\sin۳\varphi-۷۸۳\cos۴\varphi-۳۱۸\sin۴\varphi-۱۶۳\sin۵\varphi-$$
$$-۳۹۸\sin۵\varphi-۳۰۴\cos۶\varphi+۳۲۵\sin۶\varphi+\cdots$$

و یا، بعد از تبدیل‌ها و گردکردن‌های لازم

$$T=۴۳۰+۱۹۳۰\sin(\varphi+۱۱۹^\circ)+۶۵۶۰\sin(۲\varphi+۲۸۲^\circ)+$$
$$+۱۱۸۰\sin(۳\varphi+۲۶۶^\circ)+۸۴۵\sin(۴\varphi+۲۴۸^\circ)+۴۳۰\sin(۵\varphi+۲۰۲^\circ)+$$
$$+۴۴۵\sin(۶\varphi+۳۱۷^\circ)+\cdots$$

اگر این بسط را، با بسط همین مقدار T که در شمارهٔ **۷۲۷**، ۱) آوردیم، مقایسه کنیم، می‌بینیم که سه هارمونی اول آن‌ها، کم و بیش، برهم منطبق‌اند.

۲) به خواننده پیشنهاد می‌کنیم، بیست وچهار عرض منحنی

$$y=\frac{۱}{\pi^۲}(x-\pi)^۲$$

را، که دربارهٔ آن در شمارهٔ **۷۲۷**، ۳) صحبت کردیم، محاسبه کند و مقدارهای تقریبی ضریب‌های a_0، a_1، a_2، a_3، a_4، a_5، a_6 را به دست آورد.

پاسخ: $a_0\doteq ۰/۳۳۴$، $a_1\doteq ۰/۴۰۷$، $a_2\doteq ۰/۱۰۴$، $a_3\doteq ۰/۰۴۷$، $a_4\doteq ۰/۰۲۸$، $a_5\doteq ۰/۰۱۹$، $a_6=۰/۰۱۴$؛ در ضمن مقدارهای واقعی چنین‌اند:

$$a_0\doteq ۰/۳۳۳,\ a_1\doteq ۰/۴۰۵,\ a_2\doteq ۰/۱۰۱,\ a_3\doteq ۰/۰۴۵,\ a_4\doteq ۰/۰۲۵,$$
$$a_5\doteq ۰/۰۱۶,\ a_6\doteq ۰/۰۱۱$$

علاوه‌براین طرح‌ها، برای محاسبهٔ تقریبی ضریب‌های بسط‌مثلثاتی تابع‌ها، طرح‌های دیگری هم، برای شانزده یا سی‌ودو عرض (درکارهای دریایی) و سی‌ودو عرض (در الکتروتکنیک) وغیره وجود دارد. درهمهٔ این موردها، روش‌کار برای ساده‌کردن‌ضریب‌های فوریه، اساساً با آن‌چه‌گفته‌ایم تفاوت زیادی ندارد.

۷۳۰. مقایسهٔ مقدارهای تقریبی و مقدارهای دقیق ضریب‌های فوریه. اگر تابع

$f(x)$، در بازهٔ $[۰ ،۲\pi]$ به صورت تحلیلی مفروض باشد و بتوان دو بار از آن مشتق گرفت، آن وقت، خطائی را که با دستور تقریبی فوق برای ضریب‌های فوریه حاصل می‌شود، می‌توان طبق معمول پیدا کرد. ولی، در این‌جا، هدف دیگری را دنبال می‌کنیم و می‌خواهیم رابطه‌هایی را جست‌وجو کنیم که مقدار تقریبی ضریب مفروضی را، با مقدار دقیق آن و دیگر ضریب‌ها، معین کنند. این رابطه‌ها، نمی‌توانند خطا را ارزیابی کنند، ولی پرتوی بر تمامی مسأله می‌اندازند و نحوهٔ سمت‌گیری آن را روشن می‌کنند.

فرض می‌کنیم، برای تابع مفروض $y=f(x)$، در بازهٔ $[۰ ،۲\pi]$، بسط فوریه برقرار باشد:

$$y=A_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}A_n\cos nx+\sum_{n=۱}^{\infty}B_n\sin nx$$

دراین‌جا، ضریب‌های فوریه را، به‌عمد، با حرف‌های بزرگ نشان داده‌ایم تا با مقدارهای تقریبی آن‌ها، که با حرف‌های کوچك نشان داده می‌شوند، فرق داشته باشند. دراین برابری فرض می‌کنیم $x=\frac{۲i\pi}{k}$ $(i=۰ ،۱ ،\dots ،k-۱)$ و مقدارهایی از تابع y_i را محاسبه می‌کنیم که در دستورهای (۲۳)، (۲۴) و(۲۵) وجود دارند و مقدارهای تقریبی ضریب‌ها را به دست می‌دهند:

$$y_i=A_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}A_n\cos\frac{۲in\pi}{k}+\sum_{n=۱}^{\infty}B_n\sin\frac{۲in\pi}{k}$$

اگر این مقدارها را در نخستین دستور، از این دستورها، قرار دهیم، بعد از جابه‌جائی مجموع‌ها، به دست می‌آید:

$$a_۰=\frac{۱}{k}\left\{kA_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}A_n\sum_{i=۰}^{k-۱}\cos\frac{۲in\pi}{k}+\sum_{n=۱}^{\infty}B_n\sum_{i=۱}^{k-۱}\sin\frac{۲in\pi}{k}\right\}$$

ولی، به سادگی معلوم می‌شود که مجموع‌های

$$\sum_{i=۰}^{k-۱}\cos\frac{۲in\pi}{k}\quad\text{و}\quad\sum_{i=۱}^{k-۱}\sin\frac{۲in\pi}{k}$$

برابر صفرند، به استثنای حالتی که n، مضربی از k باشد که، در آن صورت، مجموع اول برابر k می‌شود (مجموع دوم، در این حالت هم، برابر صفر است). از آن‌جا، بلافاصله به دست می‌آید:

$$a_0 = A_0 + A_k + A_{2k} + A_{3k} + \cdots \qquad (۲۹)$$

اگر عبارت y_i را در دستور (۲۴) قرار دهیم ودوباره، مجموع‌ها را جابه‌جا کنیم، به ترتیب، به دست می‌آید:

$$a_m = \frac{2}{k}\left\{A_0 \sum_{i=0}^{k-1} \cos i\frac{2m\pi}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{i=0}^{k-1} \cos i\frac{2m\pi}{k} \cos i\frac{2n\pi}{k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sum_{i=0}^{k-1} \cos i\frac{2m\pi}{k} \sin i\frac{2n\pi}{k}\right\} =$$

$$= \frac{1}{k}\left\{2A_0 \sum_{i=0}^{k-1} \cos i\frac{2m\pi}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\sum_{i=0}^{k-1} \cos i\frac{2(n+m)\pi}{k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=0}^{k-1} \cos i\frac{2(n-m)\pi}{k}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[\sum_{i=1}^{k-1} \sin i\frac{2(n-m)\pi}{k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{k-1} \sin i\frac{2(n-m)\pi}{k}\right]\right\}$$

در این‌جا هم، مجموع کسینوس‌ها، تنها وقتی مخالف صفر (و برابر k) است که $n \pm m$ مضربی از k باشد، یعنی برای مقدارهایی از n که به صورت $pk \pm m$ باشند (p، عددی است درست). اگر برای سادگی کار، فرض کنیم: $m \leqslant k$، به‌این رشته برای a_m می‌رسیم:

$$a_m = A_m + A_{k-m} + A_{k+m} + A_{2k-m} + \cdots \qquad (۳۰)$$

وکاملاً شبیه آن، به دست می‌آید:

$$b_m = B_m - B_{k-m} - B_{k+m} - B_{2k-m} + \cdots \qquad (۳۱)$$

و این‌ها، همان دستورهایی هستند که به دنبال آن‌ها بودیم.

می بینیم که، مثلاً تفاوت a_m با A_m، برابر مجموع ضریب‌هایی از A با شماره‌های بزرگتری است، تنها به شرطی که k بزرگ باشد و m، برعکس، چندان بزرگ نباشد. در مسألهٔ مربوط به‌دقت تقریب‌ها، سرعت نزول ضریب‌های فوریه، نقشی اساسی دارد که، همان‌طور که می‌دانیم [۷۰۶ ـ ۷۰۸]، به نوبهٔ خود، به ویژگی‌های دیفرانسیلی تابعی که در تمامی بازهٔ $(+\infty, -\infty)$ ادامه یافته است، مربوط می‌شود. این وضع را به خوبی می‌توان در مثال‌های ۲) و ۳) شمارهٔ **۷۲۷** مشاهده کرد؛ توجه خواننده را، به نقطه‌های زاویه‌ای نمودار در مثال ۳) جلب می‌کنیم.

اگر $k=۱۲$ بگیریم، در حالت خاص خواهیم داشت (به ضریب‌های کسینوس‌ها اکتفا می‌کنیم):

$$a_۰=A_۰+A_{۱۲}+\cdots;\quad a_۱=A_۱+A_{۱۱}+\cdots;$$
$$a_۲=A_۲+A_{۱۰}+\cdots;\quad a_۳=A_۳+A_۹+\cdots;$$

و به موازات آن‌ها

$$a_۵=A_۵+A_۷+\cdots;\quad a_۶=۲A_۶+\cdots$$

و غیره. از این‌جا دیده می‌شود که، در محدودهٔ دو ـ سه هارمونی اول، نمی‌توان انتظار دقت راضی‌کننده‌ای را داشت.

اگر $k=۲۴$ در نظر بگیریم، به این نتیجه‌ها می‌رسیم:

$$a_۰=A_۰+a_{۲۴}+\cdots;\quad a_۱=A_۱=A_{۲۳}+\cdots;$$
$$a_۶=A_۶+A_{۱۸}+\cdots;\qquad \text{و غیره}$$

و در این‌جا می‌توان منتظر دقت خوبی برای هفت ـ هشت هارمونی اول بود.

MATH75.IR

فصل بیستم

رشته‌های فوریه (ادامه)*

§۱. عمل روی رشته‌های فوریه

۷۳۱. انتگرال‌گیری جمله به جمله از رشتهٔ فوریه. تابع $f(x)$ را، طبق معمول، در بازهٔ $[\pi\ ,\ -\pi]$، انتگرال‌پذیر مطلق فرض می‌کنیم. رشتهٔ فوریهٔ آن را، به این صورت می‌گیریم:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad (1)$$

اگر برای $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$، تابع

$$F(x)=\int_0^x\left[f(x)\frac{a_0}{2}\right]dx \qquad (2)$$

را درنظر بگیریم، روشن است که تابعی پیوسته و با تغییر محدود است [۴۸۶، ۷؛ ۵۶۸، ۴°]؛ در عین حال دورهٔ تناوبی برابر 2π دارد، زیرا

$$F(\pi)-F(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx-\pi a_0=0 \qquad (3)$$

درچنین حالتی، بنا به‌قضیهٔ ۶۸۶، این تابع در تمامی بازه به‌رشتهٔ فوریه بسط پیدامی‌کند:

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+B_n\sin nx \qquad (4)$$

---

*) در فصل نوزدهم، به طور عمده، به بسط تابع‌ها، به رشته‌های متقارب فوریه پرداختیم؛ در آن‌جا، با این رشته‌ها، همچون یك دستگاه محاسبه‌ای برخورد کردیم. در این فصل، با دیدگاه کلی‌تری به موضوع می‌نگریم و، بیشتر، به جنبه‌های نظری آن توجه داریم.

(که بنا بر ۶۹۹، به طور یکنواخت به سمت آن میل می‌کند).

بین ضریب‌های دو رشتهٔ (۱) و (۴)، رابطهٔ ساده‌ای وجود دارد. در واقع، اگر از دستور کلی انتگرال‌گیری جزء به جزء [۵۸۰، ۹)] استفاده کنیم، برای $n \geqslant 1$، خواهیم داشت:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}F(x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

یعنی $A_n = -\frac{b_n}{n}$. به همین ترتیب، و این بار با به حساب آوردن برابری (۳)، به دست می‌آید: $B_n = \frac{a_n}{n}$. برای محاسبهٔ A_0، در (۴) فرض می‌کنیم: $x = 0$

$$\frac{A_0}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \qquad (۵)$$

اگر این مقدار ضریب‌ها را در (۴) قرار دهیم، می‌توان آن را به این صورت نوشت:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n(1-\cos nx)}{n}$$

از آن‌جا، با در نظر گرفتن برابری (۲)، داریم:

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x [a_m\cos nx + b_n\sin nx]dx \qquad (۶)$$

روشن است که، برای هر بازهٔ $[x', x'']$، با شرط $-\pi \leqslant x' < x'' \leqslant \pi$، به رابطهٔ مشابهی می‌رسیم:

$$\int_{x'}^{x''} f(x)dx = \int_{x'}^{x''} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x'}^{x''} [a_n\cos nx + b_n\sin nx]dx$$

به این ترتیب، انتگرال تابع $f(x)$، با انتگرال‌گیری جمله به جمله از رشتهٔ فوریهٔ متناظر آن، به دست می‌آید. انتگرال‌گیری جمله به جمله از رشتهٔ فوریه، همیشه دردسترس است و، مهم‌تر این که، آن را بدون فرض مربوط به متقارب بودن خود رشتهٔ (۱) به سمت تابع $f(x)$، ثابت کردیم.

روشن است که، به جای بازهٔ اصلی $[\pi, -\pi]$، می‌توان هر بازهٔ دیگری به طول 2π را انتخاب کرد. در ضمن، همهٔ آن‌چه را که در این جا گفته‌ایم، دربارهٔ رشته‌ای هم که تنها شامل کسینوس‌ها ویا تنها شامل‌سینوس‌ها باشد [۶۸۹] و در بازهٔ $[\pi, 0]$ در نظر گرفته شده باشد، درست است.

با انتگرال‌گیری از بسطهای مثلثاتی معلوم، ممکن است بسطهای دیگری به دست آید. جملهٔ $\frac{a_0 x}{2}$ در (۶)، اگر بسط مثلثاتی داشته باشد، باید به سمت دیگر برابری برده شود. به جملهٔ آزاد $\frac{A_0}{2}$ هم باید اندکی توجه‌کرد: مقدار آن را می‌توان، یا به‌طورمستقیم از مجموع رشتهٔ (۵) و یا با انتگرال‌گیری طبق دستور زیر به دست‌آورد:

$$\frac{A_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]dx$$

این مطلب را، با مثال، روشن می‌کنیم. اگر از بسط

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2}=\frac{\pi-x}{2}\quad(0<x<2\pi)$$

از ۰ تا x انتگرال بگیریم [۶۹۰، ۲) را ببینید]، به دست می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nx}{n^2}=\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{4}x^2$$

از آن جا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{4}x^2-\frac{\pi}{2}x+c\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$$

در ضمن، c، یا به عنوان مجموع رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

و یا به عنوان انتگرال

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{4}x^2\right)dx=\frac{\pi^2}{6}$$

معین می‌شود. به این ترتیب، به بسطی می‌رسیم که، به‌طور مستقیم، در ۶۹۰، ۹) به دست

آمده بود. به‌همین ترتیب، می‌توان بسط در ۷) (a) را از بسط در ۷) (b) به دست‌آورد و غیره.

یادداشت. تأکید می‌کنیم که، با این بحث، درضمن این حقیقت ثابت می‌شود: تابع $f(x)$، که در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ انتگرال‌پذیر مطلق است، هرچه باشد، رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \qquad (۵^*)$$

که در آن، b_n، معرف ضریب‌های سینوس‌ها در رشتهٔ فوریهٔ آن است، باید متقارب باشد [با ۶۹۲، ۲° مقایسه کنید]. بعداً، در ۷۵۸، از این یادداشت استفاده خواهیم کرد.

۷۳۲. مشتق‌گیری جمله به جمله از رشتهٔ فوریه. تابع پیوستهٔ $f(x)$ در بازه $[-\pi, \pi]$ داده شده است، به نحوی که با شرط $f(-\pi)=f(\pi)$ سازگاراست و(به‌جز احتمالاً در تعداد محدودی از نقطه‌های جدا از هم) دارای مشتق $f'(x)$ است؛ سپس، فرض کنید، این مشتق، در بازهٔ مفروض، انتگرال‌پذیر مطلق باشد. در این صورت

$$f(x)=\int_0^x f'(x)dx+f(0)$$

[۳۱۰، ۴۸۱] و، همان طور که هم اکنون دیدیم، رشتهٔ فوریهٔ (۱) تابع $f(x)$، از رشتهٔ فوریهٔ تابع $f'(x)$

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a'_n cosnx+b'_n sinnx \qquad (۷)$$

با انتگرال‌گیری جمله به‌جمله، به‌دست می‌آید، زیرا باتوجه به‌شرط‌های مربوط به$f(x)$، در بسط اخیر، جملهٔ آزاد وجود ندارد:

$$a'_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx=\frac{1}{\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]=0$$

روشن است که عکس مطلب هم درست است: رشتهٔ (۷) برای مشتق $f'(x)$ (۱)، می‌توان از رشتهٔ (۱)، متناظر با تابع مفروض $f(x)$ و با مشتق‌گیری جمله به جمله به دست آورد.

توجه خواننده را به نقشی که، فرض متناوب بودن تابع $f(x)$ در این جا دارد، جلب می‌کنیم. اگر این شرط را کنار بگذاریم، جملهٔ آزاد $\frac{a'_0}{2}$ رشتهٔ‌فوریه برای $f'(x)$، مخالف صفر می‌شود و، آن وقت، نمی‌توان رشتهٔ مذکور را از رشتهٔ (۱)، با مشتق‌گیری

جمله به جمله به دست آورد. مثلاً در حالت بسط (a، عددی درست نیست).

$$\frac{\pi}{۲}\frac{\sin ax}{\sin a\pi}=\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{n}{a^۲-n^۲}\sin nx$$

[۶۶۴، ۷ (b)]، انتگرال گیری به این صورت درمی‌آید:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{n^۲}{a^۲-n^۲}\cos nx$$

که به هیچ وجه یك رشتهٔ فوریه نمی‌تواند باشد، زیرا ضریب‌های آن به سمت صفر میل نمی‌کنند [۶۸۲].

یادداشت. تا این جا، دربارهٔ امکان به دست آوردن رشتهٔ فوریهٔ (۷) برای مشتق $f'(x)$، از راه مشتق گیری جمله به جمله رشتهٔ فوریهٔ تابع اصلی $f(x)$، صحبت کردیم. در ضمن، هیچ بحثی دربارهٔ تقارب رشتهٔ (۷) به سمت تابع $f'(x)$ نداشتیم؛ این تقارب را، باید با استفاده از این یا آن معیار، ثابت کرد [۶۸۴، ۶۸۶].

باید توجه داشت که، با پدیدار شدن ضریب‌های طبیعی n، ضمن مشتق گیری از $\sin nx$ و $\cos nx$، مرتبهٔ کوچکی ضریب‌ها پایین می‌آید و، در نتیجه، شانس تقارب کمتر می‌شود. به جز این، ضمن حل مسأله‌های فیزیك ریاضی، به کمك رشته‌های فوریه، اغلب پیش می‌آید که، باید از این رشته‌ها، چند بار مشتق گرفت. برای تأمین تقارب رشته‌های حاصل، گاهی بهتر است، بخش‌هایی را که بد متقارب می‌شوند، طبق روش آ. ن. کریلوف، جدا کنیم [۷۱۰]. بخش جدا شده، به‌طورمستقیم، مشتق گیری می‌شود، و برای بقیهٔ رشته، می‌کوشند به‌چنان مرتبهٔ بالائی از کوچکی ضریب‌ها برسند که، بعد ازمشتق گیری هم، رشتهٔ متقارب یکنواخت به دست آید.

۷۳۳. تمامیت دستگاه مثلثاتی. اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[\pi,-\pi]$ پیوسته ودارای ضریب‌های فوریهٔ برابر صفر باشد، آن‌گاه خود تابع هم، به صورت اتحادی، منجر به صفر می‌شود. در واقع، در این حالت، همان طور که از برابری (۶) روشن است؛ برای همهٔ xها داریم:

$$\int_{۰}^{x}f(x)dx=۰ \qquad (۸)$$

از این جا، با مشتق گیری نسبت به x و با توجه به پیوستگی تابع زیر انتگرال [۳۰۵، ۱۲°]، به این اتحاد می‌رسیم:

$$f(x)=0$$

به زبان دیگر، به جز تابعی که متحد با صفر باشد، تابع پیوستهٔ دیگری وجود ندارد که، دربازهٔ $[\pi,-\pi]$*، نسبت به همهٔ تابع‌های دستگاه مثلثاتی

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \qquad (9)$$

عمود باشد. به دلیل همین حقیقت است که می‌گویند: دستگاه مثلثاتی: در ردهٔ تابع‌های پیوسته، دستگاهی تام یا کامل است.

اگر دو تابع پیوستهٔ $f_1(x)$ و $f_2(x)$ دارای ضریب‌های فوریهٔ یکسان باشند، به‌ناچار متحد با یکدیگرند، زیرا برای تفاضل آن‌ها، $f_1(x)-f_2(x)$، تمامی ضریب‌های فوریه برابر صفر خواهد بود. به این ترتیب، تابع پیوسته، به صورتی یک ارزشی، به‌وسیلهٔ ضریب‌های فوریهٔ خود معین می‌شود. و این، در واقع، بیان دیگری از ویژگی تمامیت دستگاه مثلثاتی است.

اگر به بررسی تابع‌های ناپیوسته بپردازیم، ممکن است با وضع دیگری رو به رو شویم. تابعی که، مثلاً، در تعداد محدودی از نقطه‌ها، مخالف صفر باشد، دیگر «به طور اتحادی» برابر صفر نیست، ولی درعین‌حال روشن است که، بر هر کدام از تابع‌های (۹) و، درضمن، به همهٔ تابع‌های انتگرال‌پذیر (چه به مفهوم ویژه وچه به مفهوم ناویژه) عمود است. حتی می‌توان تابعی را درنظر گرفت که، در مجموعه‌ای نامتناهی از نقطه‌ها، مخالف صفر باشد و، با این همه، ویژگی اخیر را داشته باشد. به عنوان نمونه‌ای از این گونه تابع‌ها، می‌توان تابع $f(x)$ را به‌این‌ترتیب درنظر گرفت [با ۷۰، ۸)؛ ۳۰۰، ۱) مقایسه کنید] که، به ازای هر کسر ساده نشدنی به صورت $\pm\frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}<\pi\right)$ برابر $\frac{1}{q}$ و به ازای سایر مقدارهای x دربازهٔ $[\pi,-\pi]$ برابر صفر باشد.

با وجود این، تابعی که دربازهٔ مورد بررسی، بر همهٔ تابع‌های انتگرال‌پذیر عمود باشد، تفاوت «واقعی» با صفر ندارد؛ و ما، این گونه تابع‌ها را، هم‌ارز صفر می‌نامیم.

اکنون می‌توان ثابت کرد، اگر تابع $f(x)$، دربازهٔ $[\pi,-\pi]$، به طور مطلق انتگرال‌پذیر و همهٔ ضریب‌های فوریهٔ آن برابر صفر باشد، به ناچار تابعی هم‌ارز صفر است.

درواقع، اگر $g(x)$ را تابعی دلخواه بگیریم که، به‌مفهوم ویژه، انتگرال‌پذیر باشد، آن وقت، با توجه به ۵۷۹، ۱°

---

*) و یا در بازهٔ دیگری به طول 2π.

$$(R)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx=(S)\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dF(x)$$

که در آن $F(x)=\int_{0}^{x} f(x)dx$. به ازای پیش‌فرض‌ها $F(x)=0$ [(۸) را ببینید]، به‌نحوی که $f(x)$، بر $g(x)$ عمود است.

از این‌جا، می‌توان به‌سادگی به‌سراغ حالتی رفت که، در آن، $g(x)$ به مفهوم ناویژه انتگرال‌پذیر باشد. مثلاً فرض کنید، نقطهٔ π، تنها نقطهٔ خاص آن باشد. در این صورت، با فرض $g(x)=g^*(x)$ در $[-\pi,\pi-\varepsilon]$ و $g^*(x)=0$ در $[\pi-\varepsilon,\pi]$ $(\varepsilon>0)$، طبق آن چه ثابت کرده‌ایم، داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi-\varepsilon} f\cdot g\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot g^*\,dx=0$$

تنها این باقی می‌ماند که، به‌ازای $\varepsilon\to 0$، به‌سمت حد برویم.

اگر مفهوم «تمامیت» را اندکی گسترش دهیم، می‌توان گفت که: دستگاه مثلثاتی (۹) در ردهٔ تابع‌های انتگرال‌پذیر مطلق، تام و کامل است. مفهوم این مطلب چنین است: به جز تابع‌های هم‌ارز صفر، تابع انتگرال‌پذیر مطلق دیگری وجود ندارد که، در بازهٔ $[-\pi,\pi]$، بر همهٔ تابع‌های (۹) عمود باشد.

سرانجام، اگر دو تابع انتگرال‌پذیر مطلق، ضریب‌های فوریهٔ یکسان داشته باشند، آن وقت، تفاضل آن‌ها، هم‌ارز صفر است. اگر این تابع‌ها را «درواقع امر» مختلف به حساب نیاوریم، به مفهومی می‌توان گفت که: تابع انتگرال‌پذیر مطلق، به صورت یک ارزشی، به وسیلهٔ ضریب‌های فوریهٔ خود، معین می‌شود.

یادداشت. همهٔ آن چه را در این‌جا گفتیم، می‌توان دربارهٔ دستگاه

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \ldots$$

یا

$$\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \ldots$$

ولی تنها در بازهٔ $[0,\pi]$، صادق دانست.

۷۳۴. تقریب یکنواخت تابع‌ها. قضیهٔ ویرشتراس. اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a,b]$، به‌کمک تابع دیگر $g(x)$ «تقریب شود»*، کیفیت این تقریب را می‌توان، بسته

---

*) یعنی، به‌تقریب با آن برابر شود.

به وضع با روش‌های گوناگونی ارزیابی کرد. ولی، طبیعی است که، در همهٔ حالت‌ها، به‌بررسی تفاضل زیر بپردازیم:

$$r(x)=f(x)-g(x)$$

اگر به همهٔ *نقطه‌های* جداگانه، برخوردی یکسان داشته باشیم و بخواهیم انحراف یکی از دیگری را، در همهٔ نقطه‌ها، به‌یك نحو مورد مطالعه قرار دهیم، آن وقت، به‌عنوان اندازهٔ تقریب، ماکزیمم انحراف را در بازهٔ مفروض درنظر می‌گیریم، یعنی عدد

$$\delta=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|r(x)|$$

درچنین موردی، دربارهٔ تقریب یکنواخت تابع $f(x)$، به‌کمك تابع $g(x)$، صحبت می‌شود.

در این‌جا دو قضیهٔ اساسی ویرشتراس را می‌آوریم که، اولی، تقریب یکنواخت تابع‌های پیوسته را به‌کمك چند جمله‌ای‌های مثلثاتی و، دومی، تقریب همان تابع‌ها را نسبت به چندجمله‌ای‌های عادی (جبری)، بررسی می‌کند.

قضیهٔ ۱. اگر تابع $f(x)$، دربازهٔ $[-\pi, \pi]$، پیوسته باشد و درشرط

$$f(-\pi)=f(\pi)$$

صدق‌کند، آن وقت برای هرمقدار دلخواه $\varepsilon>0$، می‌توان چندجمله‌ای مثلثاتی

$$T(x)=\alpha_0+\sum_{m=1}^{n}(\alpha_m\cos mx+\beta_m\sin mx)$$

را طوری پیدا کرد که، برای همهٔ مقدارهای x دربازهٔ مفروض، به طور یکنواخت داشته باشیم:

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon \qquad (10)$$

قبل از همه، تابع قطعه به قطعه خطی $\varphi(x)$ را طوری می‌سازیم که، همه جا در $[-\pi, \pi]$، این نابرابری برقرار باشد:

$$|f(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (11)$$

برای این منظور، بازهٔ $[-\pi, \pi]$ را، به وسیلهٔ نقطه‌های

$$-\pi=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_k=\pi$$

به چنان بخش‌های کوچکی تقسیم می‌کنیم که، نوسان تابع f در هر یك از آن‌ها، از

$\frac{\varepsilon}{۲}$ کوچکتر باشد. تابع $\varphi(x)$ را در بازهٔ $[\pi\ ،\ \pi-]$، با این فرض تعریف می‌کنیم که، آن را در هریك از بازه‌های جداگانهٔ $[x_i\ ،\ x_{i+۱}]$، برابر با تابع خطی

$$f(x_i)+\frac{f(x_{i+۱})-f(x_i)}{x_{i+۱}-x_i}(x-x_i)$$

می‌گیریم و، درضمن، در دو انتهای بازه منطبق بر $f(x)$ به حساب می‌آوریم. درواقع، صحبت برسر خط شکسته‌ای است که درمنحنی با معادلهٔ $y=f(x)$ محاط شده است. اگر m_i و M_i را، کمترین و بیشترین مقدار تابع f، در بازهٔ iام فرض کنیم، آن وقت با توجه به شرط $M_i-m_i<\frac{\varepsilon}{۲}$ و ازآن‌جاکه مقدارهای هر دو تابع f و φ دراین بازه، بین m_i و M_i قرار دارند، بنابراین، نابرابری (۱۱)، در تمامی بازهٔ $[\pi\ ،\ \pi-]$، برقرار خواهد بود.

تابع $\varphi(x)$، همچون تابع $f(x)$، در بازهٔ $[\pi\ ،\ \pi-]$ پیوسته است و در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)$$

ولی، به جز این، به عنوان تابعی قطعه به قطعه یکنوا، در این بازه، تغییری محدود دارد [۵۶۸، ۱°]. با توجه به این شرطها، بنابر معیار دیریکله ـ ژردان [۶۹۹]، $\varphi(x)$ به رشتهٔ فوریه با تقارب یکنواخت، قابل بسط است:

$$\varphi(x)=\alpha_۰+\sum_{m=۱}^{\infty}\alpha_m cosmx+\beta_m sinmx$$

بنابراین، اگر به‌جای چندجمله‌ای $T(x)$، nامین مجموع جزئی این رشته را، برای n به‌قدر کافی بزرگ، درنظر بگیریم، آن وقت، اختلاف آن با $\varphi(x)$، برای همهٔ مقدارهای مورد نظر x، کمتر از $\frac{\varepsilon}{۲}$ خواهد بود:

$$|\varphi(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{۲} \qquad (۱۲)$$

واز (۱۱) و (۱۲)، می‌توان (۱۰) را نتیجه گرفت.

اکنون، دنبالهٔ $\{\varepsilon_k\}$ را، ازعددهای مثبت، که تا صفر نزولی است، درنظر می‌گیریم و برای هرعدد $\varepsilon=\varepsilon_k$. چندجمله‌ای $T=T_k(x)$ را، که دربارهٔ آن در قضیهٔ ۱ صحبت

کردیم، می‌سازیم؛ دراین‌صورت، به‌دنبالهٔ $\{T_k(x)\}$ از چندجمله‌ای‌های مثلثاتی می‌رسیم که، دربازهٔ $[-\pi, \pi]$، به‌طور یکنواخت به‌سمت تابع $f(x)$ متقارب است. اگر به‌طریق معمول [۴۲۷]، از دنباله به سمت رشتهٔ نامتناهی برویم، به تنظیم دیگری ازقضیه می‌رسیم که هم‌ارزی‌آن با قضیهٔ ۱، روشن است: با شرطهایی که در قضیهٔ ۱ داشتیم، تابع $f(x)$ به رشته‌ای متقارب یکنواخت بسط داده می‌شود که، جمله‌های آن، چندجمله‌ای‌های مثلثاتی‌اند.

از قضیهٔ ۱، می‌توان به‌سادگی نتیجه گرفت:

قضیهٔ ۲. اگر تابع $f(x)$ دربازهٔ $[a, b]$ پیوسته‌باشد، آن‌وقت، هرچه باشد $\varepsilon > 0$، می‌توان چندجمله‌ای جبری صحیح

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

را طوری پیدا کرد که، برای همهٔ مقدارهای x از $[a, b]$، به‌طور یکنواخت داشته باشیم:

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \qquad (۱۳)$$

با تبدیل سادهٔ

$$x = a + \frac{x'}{\pi}(b - a)$$

می‌توان به بازهٔ $[0, \pi]$، برای بررسی، رسید، زیرا وقتی چندجمله‌ای نسبت به x' صحیح باشد، نسبت به x هم صحیح خواهد بود. برای این‌که، کار علامت گذاری‌ها دشوارنشود، بازهٔ اولیه را $[0, \pi]$ به حساب می‌آوریم.

اکنون، با فرض

$$f(-x) = f(x), \quad (0 < x \leqslant \pi)$$

تابع $f(x)$ را به تمامی بازهٔ $[-\pi, \pi]$ گسترش می‌دهیم. تابع، پیوستگی خود را حفظ می‌کند و، به روشنی، با شرط $f(-\pi) = f(\pi)$ سازگار است. به‌این ترتیب، با توجه به‌قضیهٔ ۱، چنان چندجمله‌ای مثلثاتی $T(x)$ پیدا می‌شود که، برای همهٔ مقدارهای x بین $-\pi$ و π، داشته باشیم:

$$|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (۱۴)$$

اگر هریك ازتابع‌های مثلثاتی را، که درترکیب T وارد شده است، با بسط آن برحسب توان‌های x عوض کنیم [۴۰۴]، آن‌وقت، تابع Tهم، به‌صورت مجموع رشتهٔ توانی

$$T(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m$$

درمی‌آید که، در همه‌جا، متقارب است. این رشته، در بازهٔ $[\pi,-\pi]$، تقارب یکنواخت دارد؛ بنابراین، اگر چندجمله‌ای $P(x)$ را با nامین مجموع جزئی این رشته (برای مقدار به اندازهٔ کافی بزرگ n)، متحد کنیم، آن‌گاه، برای همهٔ مقدارهای x در بازهٔ $[\pi,-\pi]$ خواهیم داشت:

$$|T(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (۱۵)$$

و دیگر، کافی است (۱۴) و (۱۵) را باهم مقایسه کنیم.

مثل قضیهٔ ۱، برای قضیهٔ ۲هم، می‌توان تنظیم دیگری ارائه داد: تابع $f(x)$، که در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است، در این بازه به رشته‌ای متقارب یکنواخت بسط داده می‌شود که، جمله‌های آن را، چندجمله‌ای‌های صحیح جبری تشکیل می‌دهند.

۷۳۵. تقریب تابع به طور متوسط. ویژگی‌های مربوط به حداکثر و حداقل در قطعه‌های رشتهٔ فوریه. تقریب تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$، به‌کمک تابع دیگر $g(x)$ را، از دیدگاه دیگری هم می‌توان مورد بررسی قرار داد: به جای نزدیکی یکنواخت این تابع‌ها، می‌توان دربارهٔ نزدیکی آن‌ها «به طور متوسط» صحبت کرد. در این‌حالت، اندازهٔ نزدیکی آن‌ها را، می‌توان به عنوان انحراف متوسط آن‌ها

$$\delta'=\frac{1}{b-a}\int_a^b|r(x)|\,dx$$

و یا، آن‌طور که بعد از این به‌آن تکیه خواهیم کرد، انحراف مربعی متوسط آن‌ها

$$\delta''=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b r^2(x)dx}$$

درنظر گرفت. به‌جای این عبارت، ساده‌تر آن است که مقدار زیر را در بررسی خود درنظر بگیریم:

$$\Delta=\int_a^b r^2(x)dx=(b-a)\delta''^2$$

دوباره، به‌دستگاه تابع‌های $\{\varphi_m(x)\}$ $(m=0,1,2,\dots)$ برمی‌گردیم که در بازهٔ $[a,b]$ متعامد و با مربع‌های خود، انتگرال‌پذیرند [۶۷۹]. $f(x)$ را تابع مفروضی در همان بازهٔ

تابع‌ها می‌گیریم که بازهم، بـا مربع خود، انتگرال‌پذیر باشد و n را، عدد طبیعی ثابتی فرض می‌کنیم. این مساله را دربرابر خود قرار می‌دهیم: از همهٔ ترکیب‌های خطی $n+1$ تابع نخستین φ

$$\sigma_n(x)=\gamma_0\varphi_0(x)+\gamma_1\varphi_1(x)+\cdots+\gamma_n\varphi_n(x) \qquad (16)$$

برای گروه دلخواهی‌ازضریب‌های γ_0، γ_1، ...، γ_n، آن را پیدا کنید که، به‌مفهوم‌انحراف مربعی متوسط، تقریب بهتری برای تابع $f(x)$ باشد. به زبـان دیگر، می‌خواهیم، حداقل این مقدار را پیدا کنیم:

$$\Delta_n=\int_a^b[f(x)-\sigma_n(x)]^2dx$$

اگر دراین‌جا، به‌جای $\sigma_n(x)$، عبارت آن را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\Delta_n=\int_a^b f^2(x)dx-2\sum_{m=0}^{n}\gamma_m\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx+$$

$$+\sum_{m=0}^{n}\gamma_m^2\int_a^b\varphi_m^2(x)dx+2\sum_{k<m}\gamma_k\gamma_m\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_m(x)dx$$

مجموع آخر، با توجه به متعامد بودن دستگاه، حذف می‌شود. اگر ثابت‌های

$$\lambda_m=\int_a^b\varphi_m^2(x)dx$$

و ضریب‌های (تعمیم یافتهٔ) فوریه ازتابع $f(x)$

$$c_m=\frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx$$

را درنظر بگیریم، می‌توان عبارت Δ_n را به‌این صورت نوشت:

$$\Delta_n=\int_a^b f^2(x)dx-2\sum_{m=0}^{n}\lambda_m c_m\gamma_m+\sum_{m=0}^{n}\lambda_m\gamma_m^2$$

برای این‌که، جلو علامت مجموع‌ها، مجذورهای کامل به‌دست آید، باید جمله‌های $\lambda_m c_m^2$ را درآن‌جا اضافه کرد. اگرمثبت‌ومنفی این جمله‌ها را اضافه کنیم،سرانجام به‌دست‌می‌آید:

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m^2 + \sum_{m=0}^{n} \lambda_m (\gamma_m - c_m)^2$$

اکنون روشن است که، Δ_n، وقتی به حداقل مقدار خود می‌رسد که، مجموع آخر، برابر صفر باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\gamma_0 = c_0,\ \gamma_1 = c_1,\ \cdots,\ \gamma_n = c_n$$

به این ترتیب، از همهٔ چندجمله‌ای‌های به‌صورت (۱۶)، قطعه‌های رشتهٔ (تعمیم‌یافتهٔ) فوریه

$$s_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)$$

مقدار Δ_n به حداقل مقدار ممکن خود می‌رسد، برای مقدار

$$\delta_n = \int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m^2 \qquad (۱۷)$$

دوباره، نظر ما به ضریب‌های فوریه جلب می‌شود که، به مفهومی، در بین همهٔ ضریب‌های ممکن، «بهترین» هستند. درضمن، باید یادآوری کرد، این ضریب‌ها، که برای n تثبیت‌شده، «بهترین» از آب درآمدند، برای مقدارهای بزرگ n هم نقش خود را حفظ می‌کنند؛ و تنها ضریب‌های تازه‌ای به ضریب‌های قبلی اضافه می‌شود.

برابری (۱۷) را، اتحاد بسل می‌نامند. از این اتحاد، نابرابری

$$\sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx$$

به‌دست می‌آید، که اگر به‌ازای $n \longrightarrow \infty$، به حد عبور کنیم:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \qquad (۱۸)$$

و این، نابرابری بسل است. جالب است که رشته در (۱۸)، همیشه متقارب است، تنها به‌این شرط که تابع $f(x)$، با مربع آن، انتگرال‌پذیر باشد.

با بزرگ شدن n، مقدار δ_n نزول می‌کند، زیرا در (۱۷)، جمله‌های منفی تازه‌ای پیدا می‌شود. هرچه n بزرگتر باشد، مجموع $s_n(x)$، «به‌طور متوسط»، به تابع مورد نظر $f(x)$ نزدیک‌تر می‌شود. به‌طور طبیعی، پرسشی پیش می‌آید: آیا می‌توان با بزرگ‌کردن n، مقدار انحراف مربعی متوسط را به‌دلخواه کوچک کرد، یعنی آیا به‌ازای $n \longrightarrow \infty$، δ_n

به سمت صفر میل می‌کند؟

اگر این‌طور باشد، آن‌وقت می‌توان گفت که، مجموع $s_n(x)$، «به طور متوسط» به سمت تابع $f(x)$ میل می‌کند (ولی تأکید می‌کنیم که، این مطلب، به‌هیچ وجه به معنای تقارب «دقیق» $s_n(x)$ به سمت $f(x)$، به مفهوم عادی آن، نیست). از اتحاد بسل، روشن است که در این صورت (وتنها در این صورت)، برابری زیر برقرار است [با (۱۸) مقایسه کنید]:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m c_m^2=\int_a^b f^2(x)\,dx$$

و با پیروی از و.آ. ستکلوف، آن را معادلهٔ بسته‌بودن می‌نامیم. ولی‌معمولاً آن را دستور پارسه‌وال می‌نامند (به‌نام M.A.Parseval، دانشمندی که در ابتدای سدهٔ نوزدهم، دستور مشابهی را، البته بدون استدلال، برای دستگاه مثلثاتی به‌دست آورد).

اگر معادلهٔ بسته‌بودن، برای هرتابع $f(x)$، که با مربع خود انتگرال‌پذیر است، صادق باشد، آن‌وقت، خود دستگاه $\{\varphi_n(x)\}$ را بسته می‌نامند.

اکنون، همهٔ این‌ها را، درحالت خاص، درمورد دستگاه مثلثاتی (۹) به‌کار می بریم. به‌جای مجموع به‌صورت (۱۶)، چندجمله‌ای‌های مثلثاتی

$$S_n(x)=A_0+\sum_{m=1}^{n}A_m\cos mx+B_m\sin mx$$

را در نظر می‌گیریم و تقریب «متوسطی» را مورد بررسی قرار می‌دهیم که با مقدار زیر مشخص می‌شود:

$$A_n=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx$$

معلوم می‌شود که، با تثبیت n، حداقل این مقدار، با قطعه‌های رشتهٔ فوریه

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}a_m\cos mx+b_m\sin mx$$

متناظر می‌شود. خود این حداقل مقدار هم، از برابری زیر به دست می‌آید:

$$\delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-s_n(x)]^2dx=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\right\}\qquad(۱۹)$$

(«اتحاد بسل»). از آن، مثل حالت کلی، تقارب رشته‌ای که از مربع ضریب‌های فوریه تشکیل شده است. نتیجه می‌شود:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

(«نابرابری بسل»).

در موقعیتی هستیم که می‌توانیم دستگاه مشخص (۹) را مورد بررسی قرار دهیم و مسأله را در حالت کلی آن حل کنیم که در شمارهٔ بعدی، به‌آن می‌پردازیم.

۷۳۶. بسته بودن دستگاه مثلثاتی. قضیهٔ لیاپونوف. قضیهٔ زیر را می‌آوریم که، اثبات دقیق آن را (برای تابع‌های کران‌دار)، برای نخستین بار، آ. م. لیاپونوف داده است.

قضیه. تابع $f(x)$، که با مربع خود انتگرال‌پذیر است، هرچه باشد، همیشه

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$$

و معادلهٔ بسته‌بودن، برقرار است:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx \qquad (۲۰)$$

اثبات را در چند مرحله می‌دهیم.

۱°. اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ پیوسته و با شرط $f(-\pi)=f(\pi)$ سازگار باشد، بنابر قضیهٔ اول ویرشتراس، چنان چندجمله‌ای مثلثاتی $T(x)$ وجود دارد (که ما درجهٔ آن را N می‌نامیم)، که

$$|f(x)-T(x)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}$$

که در آن، ε، عدد مثبت دلخواهی است که از قبل داده شده است. در این صورت

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2dx<\varepsilon$$

با توجه به ویژگی اکسترمال قطعه‌های رشتهٔ فوریه [۷۳۵]، از آن جا که $T(x)$ را، در صورت لزوم، می‌توان همچون یك چندجمله‌ای مثلثاتی از درجهٔ دلخواه $n\geqslant N$ گرفت، به ازای $n\geqslant N$ داریم:

$$\delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx < \varepsilon$$

به نحوی که، به ازای $n \to \infty$، مقدار δ_n به سمت صفر میل می‌کند.

۲°. برای این که، این نتیجه را، برای حالت‌های دیگر هم به دست آوریم، یک نابرابری کمکی را ثابت می‌کنیم.

اگر تابع $f(x)$، که با مربع خود انتگرال‌پذیر است، به صورت مجموع $f'(x) + f''(x)$ از دو تابع مشابه خود نشان داده شود، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$f(x) - s_n(x) = [f'(x) - s_n'(x)] + [f''(x) - s_n''(x)]$$

و از آن‌جا*

$$[f(x) - s_n(x)]^2 \leqslant 2[f'(x) - s_n'(x)]^2 + [f''(x) - s_n''(x)]^2$$

و سپس

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\left\{\int_{-\pi}^{\pi} [f'(x) - s_n'(x)]^2 dx + + \int_{-\pi}^{\pi} [f''(x) - s_n''(x)]^2 dx\right\}$$

و یا به طور خلاصه

$$\delta_n \leqslant 2\{\delta_n' + \delta_n''\}$$

سرانجام، توجه کنیم که، اگر اتحاد بسل [(۱۹)] را در مورد تابع f' به‌کار بریم، نتیجه می‌شود:

$$\delta_n'' \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f'''^2 dx$$

به این ترتیب، سرانجام به دست می‌آید:

$$\delta_n \leqslant 2\left\{\delta_n' + \int_{-\pi}^{\pi} f'''^2 dx\right\} \qquad (۲۱)$$

---

*) از نابرابری مقدماتی $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ استفاده کرده‌ایم.

و این، همان نابرابری مورد نیاز ماست.

۳°. اکنون فرض کنید، تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$، به معنای ویژه انتگرال‌پذیر باشد (که در نتیجه، کران‌دار خواهد بود). در صورت لزوم، با تغییر مقدار تابع در یکی از دو انتهای بازه، می‌توان $f(\pi)=f(-\pi)$ در نظر گرفت. تابع کمکی $\varphi(x)$ را، شبیه آن‌چه برای اثبات قضیهٔ اول ویرشتراس [۷۳۴] انجام دادیم، می‌سازیم، در ضمن تقسیم بازه را این‌بار طوری می‌گیریم که داشته باشیم:

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{۴\Omega}$$

که در آن، ε مقدار مثبتی است که از قبل و به دلخواه اختیار شده است، ω_i نوسان تابع در iامین بازهٔ جزئی و Ω نوسان کامل تابع f در تمامی بازهٔ از $-\pi$ تا π است [۲۹۷]. فرض می‌کنیم:

$$f' = \varphi, \quad f'' = f - \varphi$$

با توجه به ۱°، به‌ازای $n \to \infty$، δ'_n به‌سمت صفر میل می‌کند، به‌نحوی که با آغاز از جایی

$$\delta'_n < \frac{\varepsilon}{۴}$$

از طرف دیگر، چون در iامین بخش بازه

$$|f''(x)| = |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \omega_i$$

بنابراین

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''^{۲} dx = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+۱}} f''^{۲} dx \leqslant \sum_i \omega_i^{۲} \Delta x_i \leqslant \Omega \sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{۴}$$

اکنون، با توجه به (۲۱)، روشن است که، برای مقدارهای به قدر کافی بزرگ n، داریم:

$$\delta_n < \varepsilon$$

و غیره.

۴°. سرانجام، فرض کنید، تابع $f(x)$، با مربع خود، به‌مفهوم ناویژه، انتگرال‌پذیر باشد. برای سادگی کار، فرض می‌کنیم، تنها نقطهٔ خاص برای f، (و برای $f^{۲}$)، $x=\pi$ باشد. در این صورت با مفروض بودن $\varepsilon > ۰$، می‌توان $\eta > ۰$ را طوری پیدا کرد که داشته باشیم:

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^{۲}dx<\frac{\varepsilon}{۴}$$

در این حالت، فرض می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases} f(x) & (-\pi\leqslant x<\pi-\eta) \\ ۰ & (x\geqslant\pi-\eta) \end{cases}$$

و برعکس

$$f''(x)=\begin{cases} ۰ & (-\pi\leqslant x<\pi-\eta) \\ f(x) & (x\geqslant\pi-\eta) \end{cases}$$

روشن است که

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''^{۲}dx=\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^{۲}dx<\frac{\varepsilon}{۴}$$

از طرف دیگر، در مورد تابع f'، که به مفهوم ویژه انتگرال‌پذیر است، از نتیجه‌ای استفاده می‌کنیم که هم‌اکنون ثابت کردیم. به کمك (۲۱)، نتیجه می‌گیریم که، در این‌جا هم $\delta_n \to ۰$. و به این ترتیب، اثبات قضیهٔ لیاپونوف کامل می‌شود.

اگر در این باره، از اصطلاح‌های معمول استفاده کنیم، می‌توان گفت که: دستگاه مثلثاتی، یك دستگاه بسته است.

۷۳۷. تعمیم معادلهٔ بسته بودن. فرض کنید، تابع‌های $f(x)$ و $\varphi(x)$ در بازهٔ $[\pi, -\pi]$، با مربع‌های خود، انتگرال‌پذیر باشند. می‌دانیم که، در این صورت، تابع‌های $f+\varphi$ و $f-\varphi$ هم، با مربع‌هایشان، انتگرال‌پذیرند [۴۸۳، ۶]. اگر ضریب‌های فوریهٔ f و φ را، به‌ترتیب، a_m، b_m و α_m، β_m بنامیم، آن وقت روشن است که، ضریب‌های فوریه، برای تابع‌های $f\pm\varphi$، برابر $a_m\pm\alpha_m$ و $b_m\pm\beta_m$ خواهد بود.

اگر معادلهٔ بسته بودن را، به طور جداگانه، برای تابع‌های $f+\varphi$ و $f-\varphi$ به‌کار بریم، به دست می‌آید:

$$\frac{(a_۰+\alpha_۰)^{۲}}{۲}+\sum_{m=۱}^{\infty}[(a_m+\alpha_m)^{۲}+(b_m+\beta_m)^{۲}]=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f+\varphi]^{۲}dx,$$

$$\frac{(a_۰-\alpha_۰)^{۲}}{۲}+\sum_{m=۱}^{\infty}[(a_m-\alpha_m)^{۲}+(b_m-\beta_m)^{۲}]=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f-\varphi]^{۲}dx$$

اگر این دو برابری را، جمله به جمله ازهم کم کنیم، با در نظر گرفتن اتحاد

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

به تعمیم معادلهٔ بسته‌بودن می‌رسیم:

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\alpha_m+b_m\beta_m)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi(x)dx \qquad (22)$$

که از آن، می‌توان معادلهٔ (۲۰) را، به ازای $\varphi=f$ به دست آورد. این معادله کلی راهم، دستور پارسه‌وال می‌نامند.

معادلهٔ کلی (۲۲)، رابطهٔ تنگاتنگی با مسألهٔ مربوط به انتگرال‌گیری جمله به جمله از رشتهٔ فوریه دارد. اگر به جای ضریب‌های α_m و β_m، عبارت‌های انتگرالی آن‌ها

$$\alpha_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos mx\,dx,\quad (m=0,1,2,\dots) \qquad \beta_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin mx\,dx\quad (m=1,2,3,\dots)$$

را قرار دهیم، می‌توان برابری (۲۲) را به این صورت نوشت:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\varphi(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\varphi(x)dx=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi(x)dx$$

از این جا روشن است که، برابری مذکور، با گزارهٔ زیر کاملاً هم‌ارز است: اگر همهٔ جمله‌های رشتهٔ فوریهٔ $f(x)$ را (که با مربع خود انتگرال‌پذیر است)، درتابع دلخواه $\varphi(x)$ (که باز هم با مربع خود انتگرال‌پذیر است) ضرب کنیم، می‌توان در بازهٔ از $-\pi$ تا π، جمله به‌جمله، ازآن انتگرال گرفت (به این مفهوم که، در نتیجه، انتگرال حاصل‌ضرب دو تابع به دست آید).

البته، بازهٔ $[\pi,-\pi]$ را، در این جا، می‌توان با هر بخش آن $[x'$ و $x'']$ عوض کرد، زیرا به سادگی منجر به این می‌شود که، مثلاً، تابع φ را با تابع دیگری عوض کنیم که دربازهٔ $[x',x'']$ بر φ منطبق و در بیرون این بازه برابر صفر باشد. به ازای $\varphi=1$، به همان حکمی می‌رسیم که در ۷۳۱ ثابت کردیم، تنها با یك محدودیت: در این جا، تابع f، با مربع خود، انتگرال‌پذیر فرض می‌شود.

دستور (۲۲) را می‌توان با شرطهای نامتقارن برای f و φ هم ثابت کرد، به‌نحوی که این شرطها را برای یکی از تابع‌ها ساده‌تر و برای تابع دیگر، سنگین‌تر کنیم. یونگ (W.H.Young)، این قضیه را آورده است: دستور (۲۲)، با این فرض که تابع $f(x)$، در بازهٔ $[\pi, -\pi]$، انتگرال‌پذیر مطلق باشد، و تابع $\varphi(x)$، تغییر محدود داشته باشد، درست است.

اثبات، با تکیه بر یك ویژگی مجموع جزئی $\sigma_n(x)$ رشتهٔ فوریهٔ تابع $\varphi(x)$ انجام می‌شود[۷۴۴، ۵°]: این مجموع‌ها، به‌طور یکنواخت کران‌دارند، یعنی برای $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ و $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$

$$|\sigma_n(x)| \leqslant L \quad (L - \text{const.})$$

ما، این ویژگی را، فعلاً، بدون اثبات می‌پذیریم.

بدون این‌که به‌کلی بودن مطلب لطمه‌ای وارد آید، می‌توان فرض کرد که، نقطه‌های ناپیوستگی تابع $\varphi(x)$، منظم‌اند [۶۵۸]، به نحوی که همیشه

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x+0)+\varphi(x-0)}{۲}$$

در این صورت، بنا به قضیهٔ دیریکله ـ ژردان [۶۸۶]، برای همهٔ مقدارهای x، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \varphi(x)$$

و درعین‌حال

$$\lim_{n\to\infty} f(x)\sigma_n(x) = f(x)\varphi(x)$$

اگر $f(x)$ کران‌دار باشد

$$|f(x)| \leqslant M \qquad (M = \text{const.})$$

به‌نحوی که

$$|f(x)\sigma_n(x)| \leqslant M \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$$

آن‌وقت، بنا به‌قضیهٔ آرتسل [۵۲۶]، نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sigma_n(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx \qquad (۲۳)$$

درستی این برابری را در حالتی هم که تابع $f(x)$ کران‌دار نباشد (ولی انتگرال‌پذیر

مطلق باشد) می‌توان ثابت کرد. تنها نقطهٔ خاص آن را $x=\pi$ می‌گیریم. در این صورت، ابتدا از روی $\varepsilon>0$ مفروض، $\eta>0$ را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi}|f(x)|dx<\varepsilon$$

که همراه با آن، این نابرابری‌ها هم برقرارند:

$$\left|\int_{\pi-\eta}^{\pi}f(x)\varphi(x)dx\right|<L\varepsilon,\quad\left|\int_{\pi-\eta}^{\pi}f(x)\sigma_n(x)dx\right|<L\varepsilon$$

(در آخری، هرچه باشد n). در بازهٔ $[\pi-\eta,\pi-\eta]$ هم، که تابع $f(x)$ کران‌دار است، شبیه (۲۳) داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi-\eta}f(x)\sigma_n(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi-\eta}f(x)\varphi(x)dx$$

که از آن‌جا، به‌سادگی خود برابری (۲۳) به‌دست می‌آید.

این برابری، که ثابت کردیم، تنها شکل دیگری ازهمان دستور (۲۲) است، زیرا

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sigma_n(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}\alpha_m\cos mx+\beta_m\sin mx\right]dx=$$

$$=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\alpha_m+b_m\beta_m)$$

تعمیم معادلهٔ بسته‌بودن را، که باشرط‌های دیگری به‌جز شرط‌های قبل به‌دست‌آید، بازهم می‌توان همچون گزاره‌ای بیان کرد که مربوط به انتگرال‌گیری جمله به جمله از رشتهٔ فوریه باشد (درضمن، با دوتنظیم مختلف در رابطه باشرط‌های نامتقادن، که دراین‌جا دربارهٔ تابع‌های f و φ درنظر گرفته‌ایم). یادآوری می‌کنیم که، این‌بار، فرض‌شمارهٔ **۷۳۱**، به‌عنوان نتیجه‌ای به‌صورت کاملاً کلی به‌دست می‌آید.

۷۳۸. ضرب رشته‌های فوریه. دو تابع f و φ را، با رشته‌های فوریهٔ آن‌ها درنظر می‌گیریم:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos mx+b_m\sin mx,$$

$$\varphi(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\cos mx+\beta_m\sin mx$$

مسأله‌ای که در برابر خود قرار می‌دهیم، عبارت است از یافتن رشتهٔ فوریه، برای حاصل‌ضرب $f\varphi$ این تابع‌ها:

$$f(x)\varphi(x)\sim\frac{A_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos mx+B_m\sin mx$$

یعنی، بیان ضریب‌های آن، برحسب ضریب‌های مفروض a، b و α، β.

فرض می‌کنیم، تابع‌های f و φ و مربع‌های آن‌ها* انتگرال‌پذیر باشند؛ به‌نحوی که تعمیم معادلهٔ بسته‌بودن (۲۲)، برای آن‌ها برقرار باشد. در این صورت، از آن، بلافاصله به بیان ضریب A_0 می‌رسیم:

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\varphi\,dx=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\alpha_m+b_m\beta_m)$$

تعیین ضریب‌های A_k و B_k هم (برای $k=1, 2, 3, \ldots$)، بدون هیچ دشواری، به استفادهٔ از دستور (۲۲) منجر می‌شود. بیان A_k

$$A_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\varphi\cos kx\,dx$$

با بیان مربوط به A_0، دراین فرق دارد که، φ، با $\varphi\cos kx$ عوض شده است. کوشش می‌کنیم، ضریب‌های فوریه را، برای تابع اخیر پیدا کنیم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos kx\cdot\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos(m+k)x\,dx+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos(m-k)x\,dx\right\}=\frac{1}{2}(\alpha_{m+k}+\alpha_{m-k}),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos kx\cdot\sin mx\,dx=\frac{1}{2}(\beta_{m+k}+\beta_{m-k})$$

درضمن، این‌دستورها، نه‌تنها برای $m\geqslant k$، بلکه برای $m<k$ هم درست‌اند، به‌شرطی که فرض کنیم:

$$\alpha_{-h}=\alpha_h,\quad \beta_{-h}=-\beta_h$$

---

*) به‌جای آن، می‌توان تابع f را انتگرال‌پذیر مطلق وتابع φ را با تغییر محدود، فرض کرد.

اکنون دوباره، و بنا بر دستور (۲۲):

$$A_k=\frac{a_0\alpha_k}{2}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}[a_m(\alpha_{m+k}+\alpha_{m-k})+b_m(\beta_{m+k}+\beta_{m-k})]$$

و به همین ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$B_k=\frac{a_0\beta_k}{2}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}[a_m(\beta_{m+k}+\beta_{m-k})-b_m(\alpha_{m+k}+\alpha_{m-k})]$$

و با این دستورها، مسألهٔ موردنظر ما حل می‌شود.

جالب است یادآوری کنیم که، همین عبارت‌ها را می‌توان از راه ضرب صوری رشته‌های فوریهٔ تابع‌های f و φ، برای ضریب‌های A و B به دست آورد، به‌شرطی که به‌جای کسینوس‌ها و سینوس‌ها، مجموع‌ها و تفاضل‌های آن‌ها را قرار دهیم و جمله‌های متشابه را با هم جمع کنیم. این وضع، بیشتر از این بابت جالب است که، در این‌جا، هیچ فرضی دربارهٔ تقارب رشته‌ها درنظر نگرفتیم.

۷۳۹. برخی کاربردهای معادلهٔ بسته‌بودن. معادلهٔ بسته‌بودن، چه در خود نظریهٔ رشته‌ها وچه درسایر شاخه‌های آنالیز، کاربردهای فراوان دارد. به‌بررسی برخی از آن‌ها، به‌عنوان نمونه، می‌پردازیم.

۱°. تقارب مطلق رشته‌های فوریه. قضیهٔ زیر به آکادمیسین س.ن.برن‌شتین تعلق دارد: اگر تابع $f(x)$ با دورهٔ تناوب 2π، در شرط لیپ‌شیتس

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant L|h|^{\alpha}$$

با نمای $\alpha>\frac{1}{2}$ صدق کند، آن‌گاه، رشتهٔ زیر متقارب است:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

که درآن، a_n و b_n، ضریب‌های فوریهٔ تابع f هستند*.

قبل ازهمه توجه می‌کنیم که، اگر

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos mx+b_m\sin mx$$

---

*) که از آن‌جا، تقارب هریك از رشته‌های $\Sigma|a_n|$ و $\Sigma|b_n|$ و، بنا براین، تقارب مطلق رشتهٔ فوریه متناظر، نتیجه می‌شود.

آن گاه

$$f(x\pm h)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}[(a_m\cos mh\pm b_m\sin mh)\cos mx+$$

$$+(b_m\cos mh\mp a_m\sin mh)\sin mx]$$

[۶۹۰، ۲۶)]. در این حالت

$$f(x+h)-f(x-h)\sim 2\sum_{m=1}^{\infty}\sin mh(b_m\cos mx-a_m\sin mx)$$

و بنابر معادلهٔ بسته‌بودن

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+h)-f(x-h)]^2dx=4\sum_{m=1}^{\infty}\rho_m^2\sin^2 mh$$

اکنون، اگر خود شرط لیپ شیتس را درنظر بگیریم، آن وقت انتگرال سمت چپ، با عدد $Ch^{2\alpha}$ ارزیابی می‌شود که، درآن، C مقداری است ثابت. N را عددی طبیعی و دلخواه می‌گیریم و فرض می‌کنیم $h=\frac{\pi}{2N}$، در این صورت

$$\sum_{m=1}^{\infty}\rho_m^2\sin^2\frac{m\pi}{2N}\leqslant C_1N^{-2\alpha}$$

(در این جا، C_1، ثابت جدیدی است)، و بنابراین، به طور مسلم

$$\sum_{m>\frac{N}{2}}^{N}\rho_m^2\sin^2\frac{m\pi}{2N}\leqslant C_1N^{-2\alpha}$$

ولی، برای $m>\frac{n}{2}$، روشن است که

$$\sin^2\frac{m\pi}{2N}>\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

و می‌توان حکم کرد که

$$\sum_{m>\frac{N}{2}}^{N}\rho_m^2\leqslant 2C_1N^{-2\alpha}$$

در حالت خاص، اگر $N=2^{\nu}$ بگیریم $(\nu=1,2,3,\dots)$، داریم:

$$\sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}}\rho_m^2\leqslant 2C_1\cdot 2^{-2\nu\alpha}$$

ولی بنابر نابرابری آشنای ۱۳۴(5a)

$$\sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}}\rho_m\leqslant\left\{\sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}}\rho_m^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}}1^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{2C_1}\cdot 2^{-\nu\alpha}\cdot 2^{\frac{1}{2}(\nu-1)}=\sqrt{C_1}\cdot 2^{\nu\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}$$

اگر همهٔ این نابرابری‌ها را، برای $\nu=1,2,3,\dots$، جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$\sum_{m=2}^{\infty}\rho_m\leqslant\sqrt{C_1}\sum_{\nu=1}^{\infty}2^{\nu\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}<+\infty$$

زیرا، برای $\alpha>\frac{1}{2}$، رشتهٔ سمت راست متقارب است. قضیه ثابت شد.

این نتیجه‌گیری کاملاً دقیق است، بـه عنوان مثال، می‌توان ثابت کرد کـه، به ازای $\alpha=\frac{1}{2}$، برقرار نیست.

۲°. اثبات بعضی نابرابری‌ها. از معادلهٔ بسته بودن، می‌توان برای اثبات یك رشته نابرابری‌های سودمند استفاده کرد.

از نابرابری آغاز می‌کنیم که، برای نخستین بار، به‌وسیلهٔ و. آ. سنکلوف مطرح شد و توانست در فیزیك ریاضی، کاربردهای زیادی پیدا کند. فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$، در بازهٔ $[0,\pi]$ پیوسته و در آن (به جز، احتمالاً، در تعداد محدودی نقطه‌هـا) دارای مشتق $f'(x)$ باشد که، در ضمن، با مربع خود، انتگرال‌پذیر است. در ایـن صورت، اگر یکی از دو شرط

$$\int_0^{\pi}f(x)dx=0 \quad \text{(a)}$$

، یا

$$f(0)=f(\pi)=0 \quad \text{(b)}$$

برقرار باشد، نابرابری زیر درست است:

$$\int_0^{\pi}[f'(x)]^2dx\geqslant\int_0^{\pi}[f(x)]^2dx \qquad (۲۴)$$

در ضمن، علامت برابری، در حالت (a)، تنها برای تابع به صورت $f(x)=A\cos x$ و در حالت (b)، تنها برای تابع به صورت $f(x)=B\sin x$ برقرار است.

از حالت (a) آغاز می‌کنیم. در این حالت، در بسط تابع $f(x)$ در بازهٔ $[0,\pi]$ برحسب کسینوس‌ها، جملهٔ آزاد وجود ندارد:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

چون برای ادامهٔ زوج تابع $f(x)$، بر بازهٔ $[-\pi,0]$، شرط $f(-\pi)=f(\pi)$ برقرار است، بنابراین بنابر قاعدهٔ شمارهٔ **۷۳۲**

$$f'(x)\sim-\sum_{n=1}^{\infty}na_n\sin nx$$

اکنون، با توجه بـه معادلهٔ بسته بودن، که در بازهٔ $[0,\pi]$، هم برای رشتهٔ برحسب کسینوش‌ها و هم برای رشتهٔ برحسب سینوس‌ها برقرار است، داریم:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x)]^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$$

و در عین حال

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[f'(x)]^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n^2$$

که از آن‌جا، بلافاصله، نابرابری (۲۴) نتیجه می‌شود، درضمن، روشن است که، برابری، تنها وقتی می‌تواند برقرار باشد که داشته باشیم:

$$a_n=0\quad(n\geqslant 2)$$

یعنی وقتی که: $f(x)=a_1\cos x$.

به همین ترتیب، در مورد حالت (b)، برای تـابع $f(x)$، رشتهٔ نسبت به سینوس‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

با ادامهٔ فرد تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-\pi,0]$، با توجه به شرط (b)، پیوستگی تابع برای $x=0$ حفظ و خواست $f(-\pi)=f(\pi)$ برقرار می‌شود، به نحوی که دوباره می‌توان

از قاعدهٔ شمارهٔ ۷۳۲ استفاده کرد:

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} nb_n\cos nx$$

وکاربرد معادلهٔ بسته بودن، در این جا، مسأله را حل می‌کند.

بعدها، ویرتینگر (W.Wirtinger)، نابرابری تا حدی کلی‌تری را ثابت کرد. فرض کنید، تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ پیوسته و در آن (به جز، احتمالاً، در تعداد محدودی نقطه‌ها) دارای مشتق $f'(x)$، که با مربع خود انتگرال پذیر است، باشد. دراین صورت، اگر شرط‌های

$$f(-\pi)=f(\pi) \quad \text{و} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0$$

برقرار باشند، نابرابری زیر برقرار خواهد بود:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2dx\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx \qquad (۲۵)$$

در ضمن، علامت برابری، برای تابع به صورت $f(x)=A\cos x+B\sin x$ برقراراست.

اثبات، مثل بالا، منجر به‌استفاده از معادلهٔ بسته‌بودن، در مورد رشته‌های زیر می‌شود:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n\cos nx-a_n\sin nx)$$

نابرابری‌های ستکلوف را می‌توان از (۲۵) به دست‌آورد، به شرطی که فرض کنیم، تابع $f(x)$: (a) زوج، یا (b) فرد است.

۳°. مسألهٔ هم پیرامونی: می‌خواهیم بین همهٔ منحنی‌های مسطح بسته‌ای که طول مفروضی برابر L دارند، آن را پیدا کنیم که، شکلی با مساحت حداکثر را محصورمی‌کند.

می‌دانیم که، جواب، دایره است؛ اثبات خالص تحقیقی این مسأله را، که متعلق به هورویتس (A.Hurwitz) است، می‌آوریم؛ درضمن، تنها به‌منحنی‌های هموارمی‌پردازیم.

فرض می‌کنیم، منحنی بسته و هموار (L)، به طول L، به صورت پارامتر داده شده باشد؛ در ضمن، نقش پارامتر را به عهدهٔ طول s ازکمان، که از نقطه‌ای به حساب‌آمده

است، می گذاریم:

$$x=x(s),\quad y=y(s)\quad (0\leqslant s\leqslant L)$$

$t=\frac{2\pi s}{L}$ می‌گیریم که، در آن، t از ۰ تا 2π تغییر می‌کند. و معادله را به این صورت می‌نویسیم

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

و به‌خصوص، به برقراری این شرط‌ها توجه می‌کنیم:

$$\varphi(0)=\varphi(2\pi)\quad \text{و}\quad \psi(0)=\psi(2\pi)$$

با توجه به **۷۳۲**، روشن است که از رشته‌های فوریه مربوط به تابع‌های $\varphi(t)$ و $\psi(t)$:

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} a_m\cos mt+b_m\sin mt,$$

$$\psi(t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} c_m\cos mt+d_m\sin mt$$

می‌توان با مشتق‌گیری جمله به جمله، رشته‌های فوریهٔ مشتق‌های آن‌ها را به دست آورد:

$$\varphi'(t)\sim\sum_{m=1}^{\infty} mb_m\cos mt-ma_m\sin mt,$$

$$\psi'(t)\sim\sum_{m=1}^{\infty} md_m\cos mt-mc_m\sin mt$$

اگر در این جا، از معادلهٔ بسته‌بودن استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\varphi'(t)]^2dt=\sum_{m=1}^{\infty} m^2(a_m^2+b_m^2),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\psi'(t)]^2dt=\sum_{m=1}^{\infty} m^2(c_m^2+d_m^2)$$

و چون

$$[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2=(s_t')^2=\frac{L^2}{4\pi^2}\qquad (۲۶)$$

بنا بر این

$$L^2 = 4\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2(a_m^2 + b_m^2 + c_m^2 + d_m^2) \qquad (27)$$

از طرف دیگر، مساحت F شکل، که به وسیلهٔ منحنی مفروض محصور شده است، بنا بر دستور معروف [۵۲۶، (۹)]، به این ترتیب، بیان می‌شود*:

$$F = \int_{(L)} x\,dy = \int_0^{2\pi} x\frac{dy}{dt}\,dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t)\psi'(t)\,dt \qquad (28)$$

این بار، از تعمیم معادلهٔ بسته بودن استفاده می‌کنیم و عبارت مساحت را به این صورت می‌نویسیم:

$$F = \pi \sum_{m=1}^{\infty} m(a_m d_m - b_m c_m) \qquad (29)$$

اگر برابری (۲۹) را در 4π ضرب و، سپس، از برابری (۲۷) کم کنیم، به دست می‌آید:

$$L^2 - 4\pi F = 2\pi^2\left\{\sum_{m=1}^{\infty} m^2(a_m^2 + b_m^2 + c_m^2 + d_m^2) - \sum_{m=1}^{\infty} 2m(a_m d_m - b_m c_m)\right\} =$$

$$= 2\pi^2\left\{\sum_{m=1}^{\infty}(ma_m - d_m)^2 + \sum_{m=1}^{\infty}(mc_m + b_m)^2 + \sum_{m=2}^{\infty}(m^2-1)(b_m^2 + d_m^2)\right\}$$

وچون همهٔ جمله‌های مجموع داخل آکولاد، غیرمنفی هستند، همیشه «نابرابری هم‌پیرامونی» برقرار است:

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0 \;\Rightarrow\; F \leqslant \frac{L^2}{4\pi}$$

علامت برابری، و همراه با آن رسیدن به حداکثر ممکن برای مساحت F، وقتی به دست می‌آید که همهٔ جمله‌ها صفر باشند، یعنی وقتی که

$$d_m = ma_m,\; b_m = -mc_m;\quad \underset{(m=2,3,\ldots)}{b_m = d_m = 0}$$

که هم‌ارز است با رابطه‌های

---

*) به شرطی که فرض کنیم (و ما، این فرض را کرده‌ایم) که، با تغییر پارامتر t از ۰ تا 2π، منحنی در جهت مثبت پیموده شود.

$$d_1 = a_1,\ c_1 = -b_1,\quad a_m = b_m = c_m = d_m = 0\ (m \geqslant 2)$$

ولی در این صورت

$$x = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t,$$

$$y = \frac{1}{2}c_0 - b_1 \cos t + a_1 \sin t$$

و از آن جا

$$\left(x - \frac{1}{2}a_0\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}c_0\right)^2 = a_1^2 + b_1^2$$

که معادلهٔ یك دایره است. و این ویژگی اکسترمال دایره است.

یادآوری می‌کنیم که، اگر از نابرابری (۲۵) استفاده می‌کردیم*، می‌توانستیم، نابرابری هم پیرامونی را بدون تکیه بر معادلهٔ بسته بودن، به دست آوریم. در واقع، می‌توان، بدون این‌که به‌کلی بودن مطلب لطمه‌ای وارد شود، فرض کرد که، مرکز ثقل منحنی، بر محور y قرار دارد، یعنی

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = 0 \qquad (۳۰)$$

در این صورت، از (۲۶) و (۲۸) به دست می‌آید:

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2F = \int_0^{2\pi} [\varphi'^2 + \psi'^2]\,dt - 2\int_0^{2\pi} \varphi\psi'\,dt = \int_0^{2\pi} [\varphi - \psi']^2\,dt +$$

$$+ \int_0^{2\pi} [\varphi'^2 - \varphi^2]\,dt \geqslant 0$$

به‌کمك نابرابری (۲۵) و با به حساب آوردن شرط (۳۰). در ضمن، برابری می‌تواند تنها وقتی تحقق یابد که داشته باشیم:

$$\varphi(t) = A\cos t + B\sin t \quad و \quad \psi(t) = \varphi(t)$$

و از آن جا $\psi(t) = A\sin t - B\cos t + C$ و غیره.

---

*) که البته، با تغییر بازهٔ $[-\pi, \pi]$ به بازهٔ $[0, 2\pi]$ هم برقرار است.

§۲. استفاده از روش‌های تعمیم مجموع در رشته‌های فوریه

۷۴۰. پیش‌قضیهٔ اصلی. برای این کـه در بحث بعدی، از تکرار پرهیز کنیم، چند ملاحظهٔ کلی را در این جا می‌آوریم.

انتگرال کلی $(a>0)$

$$J(\lambda)=\int_0^a g(t)\Phi(t,\lambda)dt \qquad (1)$$

را در نظر می‌گیریم کـه شامل پارامتر λ است. حوزهٔ تغییر پارامتر را مجموعـه‌ای مثل $\Delta=\{\lambda\}$ می‌گیریم که دارای نقطهٔ تجمع (انباشتگی) ω، متناهی یـا نامتناهی، می‌باشد. دربارهٔ تابع $\Phi(t,\lambda)$ فرض می‌کنیم که، برای مقدارهای t در $[0,a]$ و مقدارهای λ از Δ معین باشد، و به ازای مقدار ثابت λ، نسبت بـه t، به معنای ویژه، انتگرال‌پذیر باشد. به جز این، خواست‌های زیر را برای تابع $\Phi(t,\lambda)$ در نظر می‌گیریم:

۱°. $\Phi(t,\lambda)\geqslant 0$.

۲°. هرچه باشد λ از Δ

$$\int_0^a \Phi(t,\lambda)dt=1^*$$

و سرانجام

۳°. به ازای هر δ، $0<\delta<a$، مقدار

$$M(\delta,\lambda)=\sup_{t\geqslant\delta}\Phi(t,\lambda)$$

به ازای $\lambda\longrightarrow\omega$، به سمت صفر میل کند.

تابع Φ را، که با این شرط‌ها سازگار باشد، محض اختصار «هستهٔ مثبت» می‌نامیم.

پیش قضیه. اگر $\Phi(t,\lambda)$ هستهٔ مثبت، و $g(t)$ تابع دلخواه انتگرال‌پذیر مطلق باشد

---

*) کافی است فرض کنیم

$$\lim_{\lambda\to\omega}\int_0^a \Phi(t,\lambda)dt=1$$

ولی ما به‌این تعمیم، علاقه‌ای نداریم.

که برای آن حد $g(+0)$ وجود داشته باشد، آن وقت

$$\lim_{\lambda \to \omega} J(\lambda) = g(+0)$$

اثبات. با توجه به ۲°

$$g(+0) = \int_0^a g(+0)\Phi(t, \lambda)dt$$

که اگر این برابری را از (۱) کم کنیم، به دست می‌آید:

$$J(\lambda) - g(+0) = \int_0^a [g(t) - g(0)]\Phi(t, \lambda)dt$$

با مفروض‌بودن عدد دلخواه $\varepsilon > 0$، اکنون δ را $(0 < \delta < a)$ طوری می‌گیریم که، به ازای $0 < t \leqslant \delta$، داشته باشیم:

$$|g(t) - g(+0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

و انتگرال قبل را، به مجموع دو انتگرال تقسیم می‌کنیم:

$$\int_0^a = \int_0^\delta + \int_\delta^a = J_1 + J_2$$

برای انتگرال اول، با توجه به ۱° و ۲°، بلافاصله به دست می‌آید:

$$|J_1| \leqslant \int_0^\delta |g(t) - g(0)|\Phi(t, \lambda)dt < \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\delta \Phi(t, \lambda)dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

و در ضمن، بدون بستگی به λ. از طرف دیگر

$$|J_2| \leqslant \int_\delta^a |g(t) - g(+0)|\Phi(t, \lambda)dt \leqslant$$

$$\leqslant M(\delta, \lambda) \int_0^a |g(t) - g(+0)|dt \qquad (2)$$

با توجه به ۳°، $J_2 \to 0$، به نحوی که، برای مقدارهای λ، که کافی است نزدیک به ω باشند، داریم $|J_2| < \frac{\varepsilon}{2}$، و در ضمن

$$|J(\lambda)-g(+0)|<\varepsilon$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

به‌آن‌چه گفتیم، نکته‌ای را اضافه می‌کنیم. فرض می‌کنیم، تـابع g، به جز متغیر t، به متغیر دیگر x هم بستگی داشته باشد $(0\leqslant x\leqslant a)$:

$$g=g(t,x)$$

ولی به ازای مقدار ثابت x، با همان شرط‌های قبلی سازگار باشد. دراین صورت اگر ۱) $g(t,x)$ به ازای همهٔ مقدارهای t و x به‌طور یکنواخت کران‌دار باشد

$$|g(t,x)|\leqslant L$$

و ۲) میل $g(t,x)$ به‌سمت $g(+0,x)$، نسبت به x به طوریکنواخت تحقق یابد،آن‌وقت انتگرال

$$J(\lambda,x)=\int_0^a g(t,x)\Phi(t,\lambda)dt$$

به ازای $\lambda\to\omega$، نسبت به x، به طور یکنواخت به سمت حد $g(+0,x)$ میل می‌کند.

در واقع، با توجه به ۲)، عدد δ را،کـه در بحث قبلی دربارهٔ آن صحبت داشتیم، می‌توان بدون ارتباط با x انتخاب کرد. سپس، چون به‌کمك ۱)

$$|g(t,x)-g(+0,x)|\leqslant 2L$$

بنابراین، نابرابری (۲) را می‌توان این طور نوشت:

$$|J_2|\leqslant 2LaM(\delta,\lambda)$$

که بازهم درسمت راست، هیچ‌گونه بستگی به x ندارد. از این جا، روشن است که،برای مقدارهایی از λ که به قدرکافی به ω نزدیك باشند، نابرابری $|J_2|<\frac{\varepsilon}{2}$ و، همراه با آن، نابرابری

$$(J(\lambda,x)-g(+0,x)|<\varepsilon$$

برای همهٔ مقدارهای x برقرار خواهد بود.

۷۴۱. جمع‌رشته‌های فوریه، باروش پواسون ـ آبل. دوباره فرض می‌کنیم، $f(x)$، به معنای تابعی با دورهٔ تناوب 2π و انتگرال‌پذیر مطلق در هر بازه‌ای باشد. رشتهٔ فوریهٔ آن را در نظر می‌گیریم

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos mx+b_m\sin mx \qquad (۳)$$

ودربارهٔ آن، روش جمع تعمیم یافتهٔ پواسون ـ آبل را به‌کارمی‌بریم [۴۱۸]. برای این منظور، جمله‌های این رشته را، به‌ترتیب، در r^m $(m=0,1,2,\dots)$ ضرب می‌کنیم $(0<r<1)$ و این رشته را تشکیل می‌دهیم:

$$f(r,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}r^m(a_m\cos mx+b_m\sin mx) \qquad (۴)$$

از آن‌جا که ضریب‌های a_m و b_m، به‌ازای $m\to\infty$، به سمت صفر میل می‌کنند [۶۵۶]، بنابراین، در مجموع، کران‌دارند:

$$|a_m|,\ |b_m|\leqslant K, \quad (K=\text{const.})$$

به نحوی که، رشتهٔ (۴)، به وسیلهٔ تصاعد $2K\sum_{0}^{\infty}r^m$ محدود می‌شود و، در نتیجه، متقارب است.

برای این که بررسی رفتار مجموع $f(r,x)$ آن را، وقتی $r\to 1$، ساده‌تر کنیم، آن را به‌صورت انتگرال می‌نویسیم. اگردر (۴)، ضریب‌های a_m و b_m را، با عبارت‌های انتگرالی آن‌ها عوض کنیم:

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos mu\,du, \quad (m=0,1,2,\dots) \qquad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\sin mu\,du \quad (m=1,2,\dots)$$

آن وقت، ابتدا به دست می‌آید:

$$f(r,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)du+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}r^m\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos m(u-x)du$$

و سپس

$$f(r,u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}r^m\cos m(u-x)\right\}du$$

عبور به این‌دستور، با استناد به‌نتیجه‌ای انجام‌می‌گیرد که درشمارهٔ ۵۱۰ به‌دست آورده‌ایم: اگر جمله‌های رشتهٔ متقارب یکنواخت (نسبت به x) را که درداخل آکولاد قرار دارد، در تابع انتگرال‌پذیرمطلق ضرب کنیم، آن‌وقت می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت. از آن‌جا

که مجموع رشتهٔ مذکور برای ما معلوم است [مثلاً ۷۴۱، ۲) را ببینید]:

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m(u-x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}$$

بنابراین، سرانجام، به این عبارت می‌رسیم:

$$f(r, x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}\,du \qquad (5)$$

این انتگرال مهم، که به انتگرال پواسون معروف است، در بسیاری از مسأله‌های آنالیز، نقش عمده‌ای به عهده دارد.

در واقع، هم رشتهٔ (۴) و هم انتگرال (۵) (که این رشته به آن منجر می‌شود)، به‌وسیلهٔ پواسون وخیلی قبل از آن‌که اندیشهٔ «جمع تعمیم یافته» پیدا شود، مورد بررسی قرار گرفته بود، ولی استدلال‌های پواسون، چندان‌دقیق نبود. نظریهٔ دقیق انتگرال پواسون، متعلق به شوارتس (H.A.Schwarz) است.

قضیه. فرض کنید، برای تابع $f(x)$، در نقطهٔ مورد نظر x، حدهای راست و چپ $f(x\pm 0)$ وجود داشته باشد. در این صورت

$$\lim_{r\to 1-0} f(r, x)=\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}\,du=$$

$$=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad (6)$$

به ویژه، در نقطهٔ پیوستگی، این حد برابر $f(x)$ است.

و اگر تابع $f(x)$ همه جا پیوسته باشد*، آن وقت $f(r, x)$، نسبت به x، به طور یکنواخت به سمت $f(x)$ میل می‌کند.

اثبات. اگر شبیه آن‌چه به موقع خود دربارهٔ تبدیل انتگرال دیریکله انجام دادیم [۶۸۱]، انتگرال پواسون را تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$f(r, x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt \qquad (7)$$

اگر بخواهیم پیش‌قضیهٔ شمارهٔ قبل را، در مورد این انتگرال به کار بریم، فرض می‌کنیم:

---

*) به یاد بیاوریم که، تابع $f(x)$، دارای دورهٔ تناوب 2π است.

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{۲}=g(t)$$

و به عنوان «هسته»، این تابع را انتخاب می‌کنیم:

$$\Phi(t,r)=\frac{۱}{\pi}\frac{۱-r^۲}{۱-۲r\cos t+r^۲} \qquad (۸)$$

(«هستهٔ پواسون»). در این‌جا، نقش پارامتر λ به عهدهٔ r است که حوزهٔ تغییر آن، بازهٔ $[۰,۱)$ است، و $\omega=۱$. ثابت می‌کنیم، تابع Φ، با همهٔ خواست‌های مطرح شده درشمارهٔ قبل دربارهٔ «هستهٔ مثبت» سازگار است.

قبل از همه $\Phi(t,r)>۰$ [شرط ۱° را ببینید]. در واقع، برای $r<۱$، صورت کسر (۸) مثبت است؛ همین نتیجه را در مورد مخرج آن هم می‌توان به دست آورد، اگر آن را به این صورت بنویسیم:

$$۱-۲r\cos t+r^۲=(۱-r)^۲+۴r\sin^۲\frac{t}{۲} \qquad (۹)$$

سپس، اگر در (۷) فرض کنیم $f\equiv ۱$، آن وقت، هم $f(r,x)\equiv ۱$ و هم

$$\frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi}\frac{۱-r^۲}{۱-۲r\cos t+r^۲}dt=۱$$

یعنی، شرط ۲° هم برقرار است. بالاخره به ازای $\delta\leqslant t\leqslant\pi$ (اگر عدد δ، به دلخواه، بین ۰ و π انتخاب شده باشد) خواهیم داشت $\sin\frac{t}{۲}\geqslant\sin\frac{\delta}{۲}$، به نحوی که [(۹) را ببینید]

$$۱-۲r\cos t+r^۲\geqslant۴r\sin^۲\frac{\delta}{۲}$$

از آن جا

$$M(\delta,r)=\sup_{\delta\leqslant t\leqslant\pi}\Phi(t,r)\leqslant\frac{۱}{\pi}\frac{۱-r^۲}{۴r\sin^۲\frac{\delta}{۲}}$$

روشن است، به ازای $r\to ۱$، داریم $M(\delta,r)\to ۰$ (با ثابت بودن δ)؛ یعنی شرط ۳° هم برقرار است.

در این صورت، بنا بر پیش‌قضیهٔ مذکور، داریم:

$$\lim_{r\to 1-0} f(r,x)=\lim_{t\to +0}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

اکنون تابع $f(x)$ را، همه جا، پیوسته می‌گیریم. در این صورت، این تابع، باید کران‌دار باشد: $|f(x)|\leqslant K$ و در ضمن

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\right|\leqslant K$$

به جز این، با توجه به پیوستگی یکنواخت $f(x)$، عبارت

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$$

به ازای $t\to +0$، نسبت به x، به طور یکنواخت، به سمت حد خودش $f(x)$ میل می‌کند. به این ترتیب، بر اساس ملاحظهٔ اضافی شمارهٔ قبل، حکم نهائی قضیه مورد تأیید قرار می‌گیرد.

به این ترتیب، با توجه به اثبات قضیه، در نقطهٔ x، که در آن‌جا تابع $f(x)$ پیوسته است و یا دست‌کم ناپیوستگی از نوع اول دارد: رشتهٔ فوریه (۳) با روش پواسون - آبل جمع می‌شود و، در ضمن، جمع تعمیم یافته، بسته به حالت، عبارت است از

$$f(x) \quad \text{یا} \quad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

یادداشت. اگر تابع $f(x)$، از ابتدا، تنها در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ داده شود، آن وقت، اگر به طریق معمول [۶۸۷]، به تابع متناوب عبور کنیم، به سادگی متوجه می‌شویم که، برای $-\pi<x<\pi$، همه چیز به‌قوت خود باقی می‌ماند و، برای $x=\pm\pi$، حد انتگرال پواسون، یا «مجموع تعمیم یافته»، برابر می‌شود با

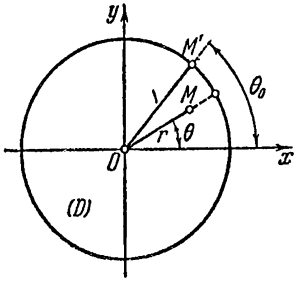
$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

۷۴۲. حل مسأله دیریکله برای دایره. از انتگرال پواسون، که در شمارهٔ قبل به‌دست آوردیم، می‌توان ضمن حل به‌اصطلاح مسأله دیریکله، برای حالتی خاص ولی مهم استفاده کرد. به یاد بیاوریم، تابع $u=u(x,y)$ را در حوزه‌ای همساز (هارمونیک) می‌نامیم، وقتی که در این حوزه، همراه با مشتق‌های خودش $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial u}{\partial y}$، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ پیوسته باشد و در

معادلهٔ با مشتق‌های نسبی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (10)$$

صدق کند («معادلهٔ لاپلاس»). حوزهٔ محدود (D) را، که با دورهٔ بستهٔ (L) محصور شده است، در نظر می‌گیریم. در این صورت، مسألهٔ دیریکله، در این حوزه، به صورت زیر تنظیم می‌شود: روی دورهٔ (L)، تابعی دلخواه از نقطه‌ها داده شده است، می‌خواهیم تابع $u=u(x, y)$ را که در حوزهٔ بستهٔ (D) پیوسته و در داخل آن همساز است، پیدا کنیم، به‌نحوی که در دورهٔ آن، بر تابع مفروض منطبق باشد*.



شکل ۱۴۵

حل این مسأله را، برای حالتی می‌دهیم که، حوزهٔ (D)، دایره‌ای به‌شعاع واحد و به‌مرکز مبداء مختصات باشد (و روشن است که به سادگی می‌توان، از این حالت، به حالت دایرهٔ دلخواه رسید).

به این ترتیب، فرض کنید، روی محیط (L) از دایرهٔ مفروض، تابعی پیوسته از نقطه‌ها داده شده باشد. اگر جای نقطه‌ها بر محیط دایره با زاویهٔ قطبی θ معین شود (شکل ۱۴۵)، آن وقت به تابع مفروض $f(\theta)$ می‌رسیم که پیوسته است (و البته، دورهٔ تناوبی برابر 2π دارد). در درون دایرهٔ (D) هم، به سادگی می‌توان، با تبدیل معادلهٔ (۱۰)، به مختصات قطبی r و θ رفت و به معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=0 \qquad (10^*)$$

رسید [۲۲۲، ۱) را ببینید]؛ بنابراین به‌ازای $r\leqslant 1$، تابع پیوستهٔ $u=u(r, \theta)$ به‌دست می‌آید که به‌ازای $r<1$ در معادلهٔ (10^*) صدق می‌کند و به‌ازای $r=1$ بر $f(\theta)$ منطبق است.

جواب‌های معادلهٔ (10^*) را، با آغاز از ساده‌ترین‌ها (بدون به‌حساب آوردن مقدار ثابت)

$$r^n\cos n\theta, \quad r^n\sin n\theta, \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

می‌توان با روش فوریه به دست آورد [۷۰۱]. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که، این تابع‌ها، در معادله صدق می‌کنند. آن‌ها را در عامل‌های دلخواه A_n و B_n ضرب و، سپس،

---

*) در شمارهٔ ۶۰۲، ۷) ثابت کردیم که، مقدارهای تابع همساز روی دوره، به طور یك ارزشی معین می‌شوند.

مقدار ثابت A_0 را اضافه می‌کنیم و رشتهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\theta+B_m\sin m\theta)r^m$$

که باهم، به‌طور صوری*، درمعادلهٔ (۱۰*) صدق می‌کند. سرانجام، با درنظرگرفتن شرط مرزی $u(1,\theta)=f(\theta)$، به‌دست می‌آید:

$$A_0+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos m\theta+B_m\sin m\theta=f(\theta)$$

که از آن‌جا، طبق معمول، نتیجه می‌شود، A_0، A_m و B_m، عبارتند از ضریب‌های فوریهٔ تابع $f(\theta)$:

$$A_0=\frac{a_0}{2},\quad A_m=a_m,\quad B_m=b_m$$

بالاخره، به‌این جواب (فعلاً صوری) برای مسألهٔ خود می‌رسیم:

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}r^m(a_m\cos m\theta+b_m\sin m\theta) \qquad (11)$$

دراین رشته، به‌سادگی رشته پواسون برای تابع $f(\theta)$ شناخته می‌شود که، درصورت لزوم، می‌توان آن را، به‌صورت انتگرال پواسون تغییر داد:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-\theta)+r^2}\,du \qquad (11^*)$$

این باقی‌مانده است که ثابت کنیم، تابع حاصل، به واقع با همهٔ شرطها سازگار است.

قبل ازهمه، چون ضریب‌های a_m و b_m، درمجموع، کران دارند، بنابراین به‌سادگی دیده می‌شود، اگر فقط مقدارهای $r\leqslant r_0$ را درنظر بگیریم که، درآن، $r_0<1$ ولی به دلخواه می‌تواند به واحد نزدیك باشد. رشته‌هائی که از (۱۱) به دست می‌آیند، با مشتق‌گیری جمله به‌جمله نسبت به r یا θ (یك یا دوبار)، همگی، چه نسبت به r وچه نسبت به θ، به طور یکنواخت متقارب‌اند. در این حالت، مشتق‌های متوالی تابع $u(r,\theta)$ را می‌دهند و، این تابع، در درون دایره، یعنی به‌ازای $r<1$، در معادلهٔ تبدیل یافتهٔ لاپلاس صدق می‌کند، زیرا هرجملهٔ رشته به‌طور جداگانه، درآن صدق می‌کند.

---

*) به شرطی که امکان مشتق‌گیری جمله به جملهٔ آن وجود داشته باشد.

تابع $u(r,\theta)$، در درون دایره، نسبت به متغیرهای (r,θ) پیوسته است؛ و این، نتیجه‌ای‌است ازتقارب یکنواخت رشتهٔ (۱۱) نسبت به‌هر دومتغیر (به‌ازای $r\leqslant r_0<1$)، بنابرقضیهٔ ۱ شمارهٔ ۴۳۱، که به‌سادگی می‌توان آن را برای تابع با دو متغیر تعمیم داد. اکنون ثابت می‌کنیم، تابع $u(r,\theta)$، به‌ازای نزدیك‌شدن نقطهٔ $M(r,\theta)$ در درون دایره، به‌نقطهٔ $M'(1,\theta_0)$ واقع بر محیط دایره، به سمت $f(\theta_0)$ میل می‌کند. درواقع، با توجه به پیوستگی تابع $f(\theta)$، با انتخاب $\varepsilon>0$ دلخواه، می‌توان $\delta>0$ را طوری پیدا کرد که، به‌ازای $|\theta-\theta_0|<\delta$، داشته باشیم:

$$|f(\theta)-f(\theta_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ازطرف دیگر، با توجه به این‌که $u(r,\theta)$، به‌ازای $r\to 1-0$، به‌طور یکنواخت نسبت به θ، به سمت $f(\theta)$ میل می‌کند [۷۴۱]، عدد δ را می‌توان آن‌قدر کوچك گرفت که، برای $|r-1|<\delta$، داشته باشیم:

$$|u(r,\theta)-f(\theta)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

(برای هر θ). به‌این ترتیب سرانجام، برای $|r-1|<\delta$ و $|\theta-\theta_0|<\delta$، داریم:

$$|u(r,\theta)-f(\theta_0)|<\varepsilon$$

که اثبات را به پایان می‌رساند.

۷۴۳. جمع رشته‌های فوریه با روش سه‌زارو-فه‌یر. همان طور که می‌دانیم [۶۸۱]، مجموع جزئی $s_n(x)$ رشتهٔ فوریهٔ (۳) را، می‌توان با انتگرال دیریکله نشان داد:

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x)}\,du$$

دراین‌صورت، واسطهٔ حسابی n جملهٔ اول ازاین‌گونه، به صورت

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x)}\,du$$

و یا بعد از ساده‌کردن [با ۴۱۸، ۲] مقایسه‌کنید] به‌صورت

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\frac{\sin\frac{n}{2}(u-x)}{\sin\frac{1}{2}(u-x)}\right]^2 du$$

نوشته می‌شود. این انتگرال را، انتگرال فه‌یر (*L.Fejér*) می‌نامند، به نام دانشمندی که، برای نخستین بار، توانست از روش واسطه‌ـای حسابی برای تعمیم مجموع رشتهٔ فوریه استفاده کند. قضیهٔ زیرهم، متعلق به فه‌یر است [قضیهٔ شوارتس را ببینید].

قضیه. فرض کنید، برای تابع $f(x)$، در نقطهٔ مورد نظر x، حدهای راست و چپ $f(x\pm 0)$ وجود داشته باشد. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\frac{\sin\frac{n}{2}(u-x)}{\sin\frac{1}{2}(u-x)}\right]^2 du=$$

$$=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad (۱۲)$$

در حالت خاص، در نقطهٔ پیوستگی، این حد برابر $f(x)$ است.

اگر هم، تابع $f(x)$ همه جا پیوسته باشد*، آن وقت مجموع $\sigma_n(x)$، نسبت به x، به‌طور یکنواخت به سمت $f(x)$ میل می‌کند.

اثبات. شبیه انتگرال دیریکله و انتگرال پواسون، انتگرال فه‌یر را هم می‌توان به این صورت نوشت:

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt \qquad (۱۳)$$

این حالت، به‌طرح کلی شمارهٔ **۷۴۰** نزدیک می‌شود، اگر مثل مورد **۷۴۱** فرض کنیم

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}=g(t)$$

و به‌عنوان «هسته» این تابع را بپذیریم:

---

*) به‌یاد بیاوریم که $f(x)$، تابعی متناوب با دورهٔ تناوب 2π است.

$$\Phi(t, n)=\frac{1}{n\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)$$

(«هستهٔ فه‌یر»).

به‌سادگی معلوم می‌شود که این، درواقع، هستهٔ مثبت است، به‌همان صورتی که در ۷۴۰ تعریف کردیم (در این‌جا، به جای λ، پارامتر طبیعی n؛ $n\to+\infty$ ($\omega\to\infty$). درواقع، بلافاصله روشن است که

$$\Phi(t, n)\geqslant 0$$

اگر در (۱۳) فرض کنیم $f\equiv 1$، آن‌وقت $s_n\equiv 1$ و، همچنین $\sigma_n\equiv 1$، به‌نحوی که

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt=1 \qquad (14)$$

یعنی، برای هستهٔ فه‌یر، شرط ۲°، ۷۲۳ برقرار است. آن‌چه به شرط ۳° مربوط می‌شود، به‌سادگی داریم

$$M(\delta, n)=\sup_{\delta\leqslant t\leqslant\pi}\Phi(t, n)\leqslant\frac{1}{n\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود، اگر $n\to\infty$، آن‌وقت $M(\delta, n)\to 0$.

دراین‌صورت، با استفاده از پیش قضیهٔ شمارهٔ ۷۴۰، به‌رابطهٔ حدی (۱۲) می‌رسیم. سرانجام، حکم نهائی قضیه، مثل حالت قضیهٔ شوارتس پایه‌گذاری می‌شود.

این بار، ازقضیه‌ای که ثابت کردیم، روشن است که در نقطهٔ x، که در آن‌جا تابع $f(x)$ پیوسته و یا دست‌کم دارای ناپیوستگی نوع اول است، رشتهٔ فوریهٔ (۳) با روش واسطه‌های حسابی جمع می‌شود و، در ضمن، «مجموع تعمیم یافتهٔ» رشته، به ترتیب، عبارت است از

$$f(x) \quad \text{یا} \quad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

با تکیهٔ بر قضیهٔ فروبه‌نیوس [۴۲۱]، می‌توان از این حکم، به‌عنوان نتیجه، حکمی شبیه شمارهٔ ۷۴۱ دربارهٔ جمع، طبق روش پواسون ـ آبل به‌دست آورد.

اگر تابع $f(x)$، تنها در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ داده شده باشد، آن‌وقت می‌توان همان یادداشت پایان شمارهٔ **۷۴۱** را تکرار کرد.

۷۴۴. برخی کاربردهای جمع تعمیم یافتهٔ رشته‌های فوریه. در این‌جا می‌خواهیم، نتیجه‌هایی را از قضیهٔ فِیِر به دست آوریم (اگرچه برای همین هدف‌ها ــ با اندکی دشوارتر شدن بحث ــ می‌توانستیم از قضیهٔ شوارتس هم استفاده کنیم).

۱°. اگر رشتهٔ فوریهٔ (۳) در نقطهٔ x، که در آن‌جا $f(x)$ پیوسته است یا ناپیوستگی عادی دارد، متقارب باشد، آن‌وقت، مجموع رشته، متناظر با آن‌ها، برابر است با

$$f(x) \quad \text{یا} \quad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

درواقع، بنابر قضیهٔ فِیِر، «مجموع تعمیم یافتهٔ» رشته، که با روش واسطه‌های حسابی به دست می‌آید، چنین می‌شود. با توجه به‌منظم بودن این‌روش [۴۲۰]، از آن‌جا که رشته، به مفهوم عادی دارای مجموع است، باید این مجموع بر «مجموع تعمیم‌یافته» منطبق باشد.

۲°. از قضیهٔ فِیِر، به عنوان نتیجه، می‌توان قضیهٔ دیریکله ــ ژردان را، دربارهٔ تقارب رشتهٔ فوریه برای تابع‌های با متغیر محدود [۷۰۶ را ببینید] به دست آورد.

اگر $f(x)$، تابعی با متغیر محدود در تمامی بازهٔ $[-\pi, \pi]$ باشد، آن وقت در هر نقطهٔ x، برای آن، حدهای $f(x \pm 0)$ وجود دارد و «جمع تعمیم یافتهٔ» رشتهٔ فوریه $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ خواهد بود. از طرف دیگر، می‌دانیم [۷۰۷]، برای تابع با تغییر محدود، ضریب‌های فوریهٔ a_m و b_m از مرتبهٔ $O\left(\frac{1}{n}\right)$ هستند و، در این صورت، بنابر قضیهٔ هاردی [۴۲۲]، نتیجه می‌شود که رشتهٔ (۳) به‌مفهوم کلی خود متقارب است و به‌ویژه، به سمت این مجموع.

ولی این، هنوز قضیهٔ دیریکله ــ ژردان را، که با بیان شمارهٔ **۶۸۶** دارای به اصطلاح «خصلت موضعی» است، نمی‌پوشاند. در آن‌جا، محدودیت تغییر تنها در رابطه با همسایگی دلخواه کوچکی از نقطهٔ مورد نظر، خواسته می‌شود. ولی می‌دانیم [۶۸۳] که، درست مقدارهایی که تابع در این همسایگی قبول می‌کند، رفتار رشتهٔ فوریه و مقدار مجموع آن را در نقطهٔ مفروض مشخص می‌کند. بنابراین، بدون این‌که چیزی در اساس تغییر کند، می‌توانستیم مقدارهای تابع را در بیرون همسایگی مذکور، چنان تغییر دهیم که تابعی با تغییر محدود در تمامی بازهٔ $[-\pi, \pi]$ به دست آید، و آن‌چه را در بالا گفتیم، دربارهٔ آن به‌کار بریم.

۳°. اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ پیوسته باشد و، درعین حال، داشته باشیم:

$$f(-\pi)=f(\pi)$$

آن وقت می‌توان آن را، همچون یك تابع متناوب (با دورهٔ تناوب 2π) و همه جا پیوسته، در تمامی محور عددی مورد بررسی قرار داد. در این حالت، دنبالهٔ مجموع فه‌یری $\{\delta_n(x)\}$، به طور یکنواخت و برای همهٔ مقدارهای x در بازهٔ $[-\pi, \pi]$، به‌سمت $f(x)$ متقارب است. از آن جا که هریك از این مجموع‌ها، یك چندجمله‌ای مثلثاتی است، بنابراین از آن‌جا به‌سادگی قضیهٔ ویرشتراس دربارهٔ تقریب تابع‌های متناوب پیوسته به‌دست می‌آید [۷۳۴].

۴°. ازقضیهٔ فه‌یر می‌توان بلافاصله، حکم مربوط به تمامیت دستگاه مثلثاتی در گروه تابع‌های پیوسته‌را به‌دست آورد[با ۷۳۳ مقایسه کنید]. در واقع،اگرتابع $f(x)$ که دربازهٔ $[-\pi, \pi]$ پیوسته است، نسبت به همهٔ تابع‌های دستگاه مثلثاتی عمود باشد، به نحوی که همهٔ ضریب‌های فوریهٔ آن برابر صفر شود، آن وقت $\sigma_n(x)=0$. در عین‌حال، دست کم دربازهٔ باز $(-\pi, \pi)$، به ازای $n \to \infty$ داریم: $\sigma_n(x) \to f(x)$؛ بنابراین، در داخل بازه و بنابر پیوستگی، در دو انتهای آن $f(x)=0$.

یادداشت زیر را هم، با آن که به قضیهٔ فه‌یر ربطی ندارد (ولی با مجموع فه‌یری مربوط است) می‌آوریم.

۵°. اگر تابع $f(x)$ کران‌دار باشد و با تغییر در بازهٔ $[-\pi, \pi]$، بین m و M قرار گیرد، آن وقت مجموع فه‌یری $\sigma_n(x)$ هم در همان محدوده خواهد بود.

این مطلب، بلافاصله، از تخمین انتگرال (۱۳) و با به حساب آوردن (۱۴) به‌دست می‌آید:

$$m \cdot \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos \frac{n}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t} \right)^2 dt = M \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \left(\frac{\sin \frac{n}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t} \right)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant M.\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt = M$$

برای مجموع‌های جزئی $s_n(x)$ ازرشتهٔ فوریه، این‌استدلال درست نیست: دراین‌جا صحبت بر سر این است که «هستهٔ دیریکله»

$$\frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

برخلاف «هستهٔ فه‌یر»، تغییر علامت می‌دهد. در رابطه بـا این مجموع، صحبت از وجود مرزهای مشترك برآن هم نمی‌توان کرد.

با وجود این، اگر ضریب‌های a_n و b_n تابع $f(x)$، ازمرتبهٔ $O\left(\frac{1}{n}\right)$ باشند، آن‌وقت مجموع‌های جزئی $s_n(x)$ هم، به طور یکنواخت، کران‌دار می‌شوند. یعنی، اگر به ازای $n = 1, 2, \ldots$ داریم:

$$n|a_n| \leqslant A, \quad n|b_n| \leqslant B$$

آن وقت می‌توان حکم کرد که

$$m-(A+B) \leqslant s_n(x) \leqslant M+(A+B)$$

در واقع، اگر در این حالت، از ملاحظه‌هـای شمارهٔ ۴۲۲ استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$s_n(x) = \sigma_{n+1}(x) + \frac{\sum_1^n k(a_k\cos kx + b_k\sin kx)}{n+1}$$

ولی

$$|k(a_k\cos kx + b_k\sin kx)| \leqslant A+B$$

در عین حال، بنابرآن‌چه ثابت کردیم:

$$m \leqslant \sigma_{n+1}(x) \leqslant M$$

که از آن‌جا، حکم موردنظر نتیجه می‌شود.

مثلاً، اگر این بسط را در نظر بگیریم [(۲، ۶۹۰)]

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad (0 < x < 2\pi) \qquad (15)$$

آن وقت در این جا $m = -\frac{\pi}{2}$، $M = \frac{\pi}{2}$، $A = 0$، $B = 1$. بنابراین می‌توان گفت که، مجموع‌های جزئی این رشته از لحاظ قدرمطلق، به طور یکنواخت به وسیلهٔ عدد $1 + \frac{\pi}{2}$ کران‌دارند [با **۷۰۲** مقایسه کنید].

از حکمی که ثابت کردیم، می‌توان حکم کلی‌تری را هم نتیجه گرفت: مجموع‌های جزئی رشتهٔ فوریهٔ تابع بـا تغییر محدود، همگی به طور یکنواخت کران‌دارند [با **۷۳۷** مقایسه کنید]. این مطلب از آن‌جا نتیجه می‌شود که برای چنین تابعی، ضریب‌هـای فوریه، به روشنی، از مرتبهٔ $O\left(\frac{1}{n}\right)$ هستند [**۷۰۷**].

۷۴۵. مشتق‌گیری جمله به جمله از رشته‌های فوریه. اگـر از رشتهٔ فوریـهٔ (۳) تابع $f(x)$، جمله به جمله مشتق بگیریم، آن وقت، رشتهٔ حاصل

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(b_m \cos mx - a_m \sin mx) \qquad (16)$$

در حالت کلی متباعد است، حتی اگر در نقطهٔ مورد بررسی x، برای تـابع $f(x)$، مشتق متناهی $f'(x)$ وجود داشته باشد. به عنوان نمونه، می‌توان از رشتهٔ (۱۵) یـادکرد؛ اگر از آن جمله به جمله مشتق بگیریم، منجر به رشتهٔ زیر می‌شود که در همه جا متباعد است:

$$\sum^{\infty} \cos mx$$

باوجود این، می‌توان گزارهٔ زیر را که متعلق به‌فاتو (P.Fatou) است آورد: اگر در نقطهٔ x، مشتق متناهی $f'(x)$ وجود داشته بـاشد، آن وقت، با جمع کردن رشتهٔ (۱۶)، طبق روش پواسون ـ آبل، به سمت مجموع $f'(x)$ می‌رویم.

برای اثبات، از رشتهٔ پواسون (۴)، نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = \sum_{m=1}^{\infty} r^m m(b_m \cos mx - a_m \sin mx) \qquad (17)$$

این مشتق‌گیری، به مناسبت تقارب یکنواخت رشتهٔ حاصل نسبت به x، مجاز است. اگر از انتگرال پواسون (۵) هم نسبت به x مشتق بگیریم، همین نتیجه به دست می‌آید:

$$\frac{\partial f(r,x)}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{2r(1-r^2)\sin(u-x)}{[1-2r\cos(u-x)+r^2]^2}du$$

در ضمن، در این حالت، بنابر قضیهٔ ۳° شمارهٔ ۵۱۰، می‌توان از زیر علامت انتگرال، مشتق گرفت. انتگرال اخیر را، به این ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{\partial f(r,x)}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{2r(1-r^2)\sin t}{(1-2r\cos t+r^2)^2}dt=$$

$$=r\cdot\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\sin t}\cdot\frac{2(1-r^2)\sin^2 t}{(1-2r\cos t+r^2)^2}dt \qquad (18)$$

فرض می‌کنیم:

$$g(t)=\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\sin t}$$

اگر این عبارت را به صورت زیر بنویسیم:

$$g(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x+t)-f(x)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x)}{-t}\right]\cdot\frac{t}{\sin t}$$

آن وقت روشن می‌شود که

$$g(+0)=f'(x)$$

سپس ثابت می‌کنیم که تابع

$$\Phi(t,r)=\frac{1}{\pi}\frac{2(1-r^2)\sin^2 t}{(1-2r\cos t+r^2)^2}$$

همان «هستهٔ مثبت» به مفهوم شمارهٔ ۷۴۵ است. قبل از همه روشن است که

$$\Phi(t,r)\geqslant 0$$

در (۱۸)، $f(x)=\sin x$ فرض می‌کنیم. در این صورت

$$f(r,x)=r\sin x,\quad \frac{\partial f(r,x)}{\partial x}=r\cos x,\quad \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\sin t}=\cos x$$

اگر همهٔ این‌ها را در نظر بگیریم و به $r\cos x$ ساده کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{2(1-r^2)\sin^2 t}{(1-2r\cos t+r^2)^2}dt=1$$

و سرانجام

$$M(\delta, r)=\sup_{\delta\leqslant t\leqslant\pi}\Phi(t, r)\leqslant\frac{1}{\pi}\frac{2(1-r^2)}{\left(4r\sin^2\frac{\delta}{2}\right)^2}$$

به نحوی که به روشنی، به ازای $r\longrightarrow 1$ داریم: $M(\delta, r)\longrightarrow 0$.

اکنون اگر پیش‌قضیهٔ شمارهٔ ۷۴۵ را بـه کار بریم، می‌بینیم که انتگرال (۱۸)، که مجموع رشتهٔ (۱۷) است، وقتی $r\longrightarrow 1$، به سمت $f'(x)$ میل می‌کند. و ایـن، به معنای آن است که، مجموع رشتهٔ (۱۶)، با روش پواسون ـ آبل، به سمت $f'(x)$ میل می‌کند؛ همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشت. I. قضیه‌ای را که ثابت کردیم، می‌توان دربارهٔ مشتق‌های بعدی هم تعمیم داد: اگردرنقطهٔ مورد بررسی، مشتق متناهی $f^{(p)}(x)$ $(p>1)$ وجود داشته باشد، آن‌وقت، رشته‌ای که با p بار مشتق گرفتن از (۳) به دست می‌آید، با روش پواسون ـ آبل، مجموعی به سمت $f^{(p)}(x)$ پیدا می‌کند.

II. برای جمع با روش سه زارو، حکمی شبیه قضیه فاتو وجود نـدارد. ولی اگر پیوستگی در نقطهٔ مورد بررسی را، در مورد مشتق به شرط‌های خود اضافه کنیم، آن وقت، می‌توان روش پواسون ـ آبل را با جمع با روش سه‌زارو عوض کرد.

§ ۳. منحصر به‌فردبودن بسط مثلثاتی تابع‌ها

۷۴۶. گزاره‌های کمکی دربارهٔ مشتق‌های تعمیم‌یافته. برای این‌که بحث ما دربـارهٔ عنوان این‌بند، درموقع خود، قطع نشود، دراین‌جا به‌برخی ملاحظه‌های کمکی می‌پردازیم.

فرض کنید تابع $F(x)$ دربازهٔ $[a, b]$ مفروض باشد. مقدار x را بین a و b انتخاب می‌کنیم: $a<x<b$؛ دراین صورت، اگر $h>0$ را به‌قدرکافی کوچك اختیارکنیم، تفاضل

$$\Delta_h F(x)=F(x+h)-F(x-h)$$

معنا پیدا می‌کند. اگر حد متناهی زیر وجود داشته باشد:

$$F^{[1]}(x)=\lim_{h\longrightarrow+0}\frac{\Delta_h F(x)}{2h}$$

آن را، مشتق («متقارن») تعمیم یافتهٔ تابع $F(x)$ در نقطهٔ x گویند. اگر مشتق $F'(x)$، به مفهوم عادی آن، وجود داشته باشد، آن‌وقت مشتق تعمیم یافته $F^{[1]}(x)$ هم وجود دارد که برابر آن است. این مطلب، به‌طور مستقیم، از رابطهٔ زیر روشن می‌شود: به‌ازای $h \to 0$

$$\frac{\Delta_h F(x)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\frac{F(x+h)-F(x)}{h} + \frac{F(x-h)-F(x)}{-h}\right] \to F'(x)$$

ولی ممکن است مشتق تعمیم یافته در حالتی وجود داشته باشد که، مشتق معمولی وجود ندارد. مثلاً، این تابع را درنظر می‌گیریم:

$$F(x) = x\sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad F(0) = 0$$

می‌دانیم [۱۰۲، ۱°] که، این تابع، در نقطهٔ $x = 0$ مشتق ندارد، درحالی‌که مشتق تعمیم‌یافتهٔ آن دراین نقطه، برابرصفر است.

اکنون، تفاضل دوم را درنظر می‌گیریم:

$$\Delta_h^2 F(x) = \Delta_h \Delta_h F(x) = \Delta_h F(x+h) - \Delta_h F(x-h) =$$
$$= [F(x+2h) - F(x)] - [F(x) - F(x-2h)] =$$
$$= F(x+2h) - 2F(x) + F(x-2h)$$

اگر حد متناهی زیر وجود داشته باشد:

$$F^{[2]}(x) = \lim_{h \to +0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$$

آن را مشتق تعمیم یافتهٔ مرتبهٔ دوم تابع $F(x)$ در نقطهٔ x گویند. در این‌جا هم می‌توان ثابت کرد که، اگر مشتق دوم $F''(x)$، به معنای معمولی خود، وجود داشته باشد، مشتق دوم تعمیم یافته هم وجود دارد و برابر با آن است. درواقع، اگر از دستور کوشی استفاده کنیم، داریم*:

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} = \frac{F'(x+2\theta h) - F'(x-2\theta h)}{4\theta h}$$

بنابراین، بنابرآن‌چه دربارهٔ مشتق (اول) تعمیم یافته گفتیم، روشن است، وقتی $h \to 0$، عبارت حاصل به‌سمت $F''(x)$ میل می‌کند. به‌عنوان نمونه، این تابع را درنظر می‌گیریم:

---

*) فرض مربوط به‌وجود مشتق دوم $F''(x)$ در نقطهٔ x، به‌خودی‌خود، به‌معنای وجود مشتق اول $F'(x)$ در همسایگی این نقطه است.

$$F(x)=x^{2}\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0),\quad F(0)=0$$

[۱۰۱، ۲° را ببینید]. این تابع نشان می‌دهد که عکس مطلب درست نیست: وجود مشتق تعمیم یافتهٔ $F^{[1]}(x)$، نمی‌تواند به معنای وجود مشتق عادی $F''(x)$ باشد.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که مشتق دوم تعمیم یافته، در بعضی موردها، می‌تواند نقش مشتق عادی را به‌عهده داشته باشد.

قضیهٔ شوارتس. اگر برای تابع $F(x)$، که در بازهٔ $[a, b]$ پیوسته است، مشتق دوم تعمیم یافتهٔ $F^{[1]}(x)$ در درون بازه وجود داشته و برابر صفر باشد، آن وقت تابع $F(x)$، یک تابع خطی است (درست مثل حالتی که برای مشتق عادی داشته‌باشیم: $F''(x)=0$).

برای اثبات، عدد دلخواه $\varepsilon>0$ را انتخاب می‌کنیم و تابع کمکی زیر را می‌سازیم:

$$\varphi(x)=\pm\left\{F(x)-F(a)-\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right\}+\varepsilon(x-a)(x-b)$$

در ضمن، استدلال ما، برای هر دو علامت جلو آکولاد، به یک اندازه، قدرت دارد. دراین‌صورت، در درون بازه خواهیم داشت:

$$\varphi^{[1]}(x)=2\varepsilon \qquad (1)$$

زیرا برای تابع F، مشتق دوم تعمیم یافته برابر صفر است و، برای تابع داخل آکولاد، مشتق دوم عادی برابر صفر است*.

تابع $\varphi(x)$، در دوانتهای بازهٔ $[a, b]$ برابر صفرمی‌شود. ثابت می‌کنیم، در درون این بازه، نمی‌تواند مقدارهای مثبت را قبول کند. درواقع، در غیر این صورت، $\varphi(x)$، به‌عنوان یک تابع پیوسته، باید به‌حداکثر مقدار (مثبت) خود، دریک‌نقطهٔ درونی x_0 برسد. ولی دراین‌صورت باید داشته باشیم:

$$\varphi(x_0\pm 2h)<\varphi(x_0),\quad \Delta_h\varphi(x_0)\leqslant 0$$

و بالاخره

$$\varphi^{[1]}(x)=\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h\varphi(x_0)}{4h^2}\leqslant 0$$

---

*) روشن‌است، اگر دوتابع F و G در نقطهٔ مورد بررسی، دارای مشتق‌های $F^{[1]}$ و $G^{[1]}$ باشند، آن‌وقت برای مجموع یا تفاضل آن‌ها $F\pm G$، مشتق دوم تعمیم‌یافته وجود دارد و، به‌ترتیب، برابر است با $F^{[1]}\pm G^{[1]}$.

که برابری (۱) را نقض می‌کند.

به‌این ترتیب، برای همهٔ مقدارهای x داریم: $\varphi(x)\geqslant 0$، یعنی

$$\pm\left\{F(x)-F(a)-\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon(x-a)(x-b)<\varepsilon(b-a)^2$$

و درضمن، برای هرکدام از علامت‌های مثبت یا منفی، که جلو آکولاد در نظر بگیریم. به این ترتیب

$$\left|F(x)-F(a)-\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right|<\varepsilon(b-a)^2$$

از این‌جا، با توجه به دلخواه بودن ε، نتیجه می‌شود که، سمت چپ نابرابری، برابر صفر است، به‌نحوی که

$$F(x)=F(a)+\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)$$

همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یك باردیگر شرط $F^{[1]}(x)=0$ تایید می‌شود، درهمه‌جا، به جز «نقطه‌های نامعلوم» جداگانه‌ای که، در آن‌جاها، چیزی داده نشده است. دراین صورت، کاربرد زیر پیدامی‌شود:

تعمیم قضیهٔ شوارتس. فرض می‌کنیم، تابع $F(x)$ دربازه $[a, b]$ پیوسته باشد، در ضمن، مشتق $F^{[1]}(x)$ وجود داشته و همه جا در درون این بازه برابر صفر باشد، به جز در تعداد محدودی «نقطه‌های نامعلوم»

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_m<b$$

اگر در هر یك از این نقطه‌ها، دست‌کم، شرط ساده شدهٔ

$$\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h^2F(x)}{2h}=0 \qquad (2)$$

برقرار باشد، آن وقت تابع $F(x)$، دربازهٔ $[a, b]$ یك تابع خطی است.

بنابر قضیهٔ قبل، تابع $F(x)$ در واقع، بین دو نقطهٔ استثنائی، تابعی خطی نسبت به x است، به نحوی که مثلاً در بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ داریم:

$$F(x)=cx+b$$

و در بازهٔ مجاور $[x_i, x_{i+1}]$

$$F(x)=c'x+d'$$

در ضمن، در نقطهٔ $x=x_i$، دو عبارت برهم منطبق‌اند:

$$F(x)=cx_i+d=c'x_i+d' \qquad (۳)$$

از شرط (۲)، برای $x=x_i$، به دست می‌آید:

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{F(x_i+2h)-F(x)}{2h}-\frac{F(x_i-2h)-F(x_i)}{-2h}\right\}=0$$

سمت چپ برابری، در این جا، به طور ساده، معرف تفاضل ضریب زاویه‌های خط‌های راست $y=cx+d$ و $y=c'x+d'$ است. به این ترتیب $c=c'$ و، در این صورت، از (۳) به‌دست می‌آید $d=d'$، یعنی دو پاره خط‌راست، درعمل، در امتداد یکدیگرند. از آن جاکه، این‌وضع، برای هر دو پاره‌خط راست، درست است، بنابراین، نمودار تابع‌ها، در تمامی بازهٔ $[a, b]$ یك خط راست است و با یك تابع خطی سروکارداریم.

۷۴۷. روش ریمانی جمع رشته‌های مثلثاتی. ریمان، روش جمع رشته‌های مثلثاتی

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad (۴)$$

را تکامل داد و روشی به دست‌آورد که، اطلاع بر آن، برای بحث بعدی ما اهمیت دارد. این روش، بـه هیچ وجه رشتهٔ (۴) را، رشتهٔ فوریهٔ یك تـابع در نظر نمی‌گیرد و آن را به صورت رشتهٔ مثلثاتی کاملاً دلخواهی مطرح می‌کند؛ تنها ضریب‌های آن را، در مجموع، کران‌دار فرض می‌کند:

$$|a_m|, |b_m|\leqslant L, \quad (L=\text{const.}) \qquad (۵)$$

اگر از رشتهٔ (۱)، به طور صوری، دوبار انتگرال بگیریم، به این رشته می‌رسیم:

$$F(x)=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2} \qquad (۶)$$

اگر شرط (۵) را در نظر بگیریم، این رشته، به وسیلهٔ رشتهٔ

$$L\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

محدود می‌شود و، بنابراین، در هر بازهٔ تغییر x، به طور یکنواخت متقارب است و تابع پیوستهٔ $F(x)$ را تعریف می‌کند. اگر برای این تابع، در نقطهٔ مفروض x، حد متناهی

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h F(x)}{۴h^۲}$$

یعنی مشتق دوم تعمیم یافتهٔ $F^{[1]}(x)$ وجود داشته باشد، آن وقت، مقدار اخیر را، «مجموع تعمیم یافتهٔ» رشتهٔ (۱) به مفهوم ریمان می‌نامند.

به عنوان نمونه، اگر مثلاً، این روش را در مورد رشتهٔ

$$\frac{۱}{۲}+\sum_{۱}^{\infty} cos\, nx$$

به‌کار بریم، داریم:

$$F(x)=\frac{x^۲}{۴}-\sum_{۱}^{\infty}\frac{cos\, nx}{n^۲}$$

به یاد بیاوریم [۶۶۴، ۹)] که، برای $۰ \leqslant x \leqslant ۲\pi$، مجموع رشتهٔ واقع در سمت راست، برابر است با $\frac{x^۲}{۴}-\frac{\pi x}{۲}+\frac{\pi^۲}{۶}$. در این صورت داریم:

$$F(x)=\frac{\pi x}{۲}-\frac{\pi^۲}{۶}$$

بنابراین، روشن است که، برای $۰<x<۲\pi$، به دست می‌آید:

$$F^{[1]}(x)=F''(x)=۰$$

و «مجموع تعمیم یافتهٔ» رشته برابر صفر می‌شود [با **۴۱۸** و **۴۲۰** مقایسه کنید].

به سادگی تحقیق می‌شود که

$$\Delta_h^۲ cos\, nx=-۲cos\, nx(۱-cos\, ۲nh)=-۴cos\, nx\, sin^۲ nh,$$

$$\Delta_h^۲ sin\, nx=-۴sin\, nx\, sin^۲ nh$$

از آن جا

$$\frac{\Delta_h^۲ F(x)}{۴h^۲}=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n cos\, nx+b_n sin\, nx)\left(\frac{sin\, nh}{nh}\right)^۲ \qquad (۷)$$

به این ترتیب، روش جمع ریمان، منجر به ضرب جمله‌های رشتهٔ (۴) در عامل به صورت $\left(\frac{sin\, nh}{nh}\right)^۲$، در عبور حدی به ازای $h \to ۰$ می‌شود.

روش ریمان را، به این صورت می‌توان در مورد رشتهٔ کاملاً دلخواه

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

هم به‌کار برد. اگر رشتهٔ

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$$

دست‌کم برای مقدارهای به‌قدر کافی کوچك h، متقارب باشد، و مجموع آن $\varphi(h)$، به‌ازای $h \to 0$، به سمت حد U میل کند، آن وقت این، همان «مجموع تعمیم یافتهٔ» رشتهٔ اصلی خواهد بود.

خواننده متوجه می‌شود که، روش (یمان)، به‌طرح کلی شمارهٔ **۴۲۶** نزدیك است. در این جا، h نقش پارامتر x را به عهده دارد (به ازای $\omega = 0$)، و عامل‌های

$$\gamma_n(h) = \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$$

با هر دو شرطی که در آن جا داشتیم سازگارند*. در مورد شرط اول روشن است که

$$\lim_{h \to 0} \gamma_n(h) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 = 1$$

در مورد شرط دوم، با در نظر گرفتن

$$\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n-1)h}{(n-1)h}\right)^2 = \int_{(n-1)h}^{nh} \left[\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right]' dz,$$

$$\left|\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n-1)h}{(n-1)h}\right)^2\right| \leqslant \int_{(n-1)h}^{nh} \left|\left[\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right]'\right| dz$$

خواهیم داشت:

$$|\gamma_0(h)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n(h) - \gamma_{n-1}(h)| =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n-1)h}{(n-1)h}\right)^2\right| \leqslant$$

---

*) برای $\gamma_0(h)$، به طور ساده، واحد را در نظر می‌گیریم.

$$\leqslant 1+\int_0^{\pi}\left|\left[\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right]'\right|dz$$

وجود این انتگرال را به سادگی می‌توان تحقیق کرد، زیرا، برای $z \to \infty$ داریم:

$$\left[\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right]' = 2\sin z\left(\cos z-\frac{\sin z}{z}\right)\frac{1}{z^2}=O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

به این ترتیب، روش مجموع تعمیم یافتهٔ ریمان، منتظم است. این حقیقت را، که در رشته‌های مثلثاتی کار برد دارد، تنظیم می‌کنیم:

قضیهٔ اول ریمان. اگر رشتهٔ مثلثاتی (۴)، در نقطهٔ x، به سمت مجموع S متقارب باشد، آن‌وقت تابع $F(x)$، که‌ازآن، با دوبار انتگرال‌گیری صوری به‌دست می‌آید، دراین نقطه، دارای مشتق دوم تعمیم یافته، برابر S است:

$$F^{[2]}(x)=S$$

توجه کنیم، برای حالت رشتهٔ فوریه، عبارت

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$$

به سادگی به صورت انتگرالی، ازآن‌گونه که در شمارهٔ ۷۴۰ آوردیم، تبدیل می‌شود و، در ضمن، با «هستهٔ مثبت». ازاین راه برای روش جمع ریمان، می‌توان قضیه‌ای را کاملاً شبیه قضیهٔ شوارتس [۷۴۱] و قضیهٔ فه‌یر [۷۴۳] ثابت کرد که ما در این‌جا به آن نمی‌پردازیم؛ آن‌چه برای ما مهم است، بررسی روش ریمان به‌عنوان وسیلهٔ نیرومندی برای بحث دربارهٔ رشته‌های مثلثاتی به طور کلی است*. در این مسیر، باید این قضیهٔ را هم بیاوریم:

قضیهٔ دوم ریمان. اگر ضریب‌های a_m و b_m رشتهٔ (۴) به‌سمت صفر میل کنند، آن‌وقت بدون ارتباط با تقارب رشته، شرط (۲) برقرار است:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^2 F(x)}{2h}=0$$

---

*) خود ریمان، اصلاً به مسألهٔ مربوط به جمع تعمیم یافتهٔ رشته‌ها نپرداخته است. او نظریهٔ خود را، برای حل مسأله‌ای که طرح کرده بود ــ تعیین خصلت کلی تابع‌هایی که، به‌صورت کلی به رشتهٔ مثلثاتی تبدیل می‌شوند ــ تکامل داد. در این‌جا، فرصتی برای طرح این بررسی ریمان نداریم.

برای هر x ثابت فرض می‌کنیم:

$$u_0=\frac{a_0}{2},\quad u_n=a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

دراین صورت، مسأله منجر به اثبات این رابطه می‌شود:

$$\lim_{h\to 0}\left\{u_0+\sum_{n=1}^{\infty}u_n\frac{\sin^2 nh}{n^2h^2}\right\}h=0 \qquad (8)$$

بنابرشرط قضیه $u_n\to 0$، یعنی برای مقدار دلخواه $\varepsilon>0$، می‌توان N را طوری پیدا کرد که، برای $n\geqslant N$، داشته باشیم: $|u_n|<\varepsilon$. اکنون، عبارت مورد علاقهٔ خود را، به‌صورت مجموع دو عبارت درمی‌آوریم:

$$S_1=\left\{u_0+\sum_{n=1}^{N-1}\right\}.h \quad و \quad S_2=\sum_{n=N}^{\infty}.h$$

داریم:

$$S_2<\varepsilon\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2h<\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2h$$

به سادگی روشن می‌شود که، ضریب ε، بدون ارتباط با h، محدود است. مثلاً دیده‌ایم که

$$\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nh}{n^2}=\frac{\pi-h}{2}$$

[۴، ۴۹۴)]. بنابراین

$$|S_2|<\frac{\pi}{2}\varepsilon$$

آن‌چه که به S_1 مربوط می‌شود، روشن است که، همراه با h، به‌سمت صفر میل می‌کند و، به‌ازای مقدارهای کوچک h، ازلحاظ قدر مطلق، کوچکتر از ε است. به‌این‌ترتیب، گزارهٔ (۸) نتیجه می‌شود.

۷۴۸. پیش قضیه‌ای دربارهٔ ضریب‌های رشتهٔ متقارب. پیش قضیه‌ای را که در زیر ثابت خواهیم کرد، علاوه برآن‌که بعداً به‌آن نیاز داریم، به‌خودی‌خود هم جالب است.

پیش قضیهٔ کانتور. اگر رشتهٔ مثلثاتی (۴)

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos mx+b_m\sin mx$$

دست‌کم برای مقدارهای x واقع در بازه‌ای مثل $(d)=[\alpha, \beta]$ متقارب باشد، آن وقت، ضریب‌های a_m و b_m رشته، باید به‌ازای $m \to \infty$، به سمت صفر میل کنند.

جملهٔ عمومی رشته را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx = \rho_m \sin m(x-\alpha_m)$$

که در آن $\rho_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$. باید ثابت کنیم: $\rho_m \to 0$.

فرض می‌کنیم، چنین نباشد؛ دراین‌صورت، برای مجموعه‌ای نامتناهی از مقدارهای m، داریم:

$$\rho_m \geqslant \delta \qquad (۹)$$

که در آن، δ، عدد مثبت ثابتی است.

به طور استقرایی، دنبالهٔ بازه‌های تودرتوی $\{(d_n)\}$ را با اندیس‌های صعودی $\{m_n\}$ $(n = ۱, ۲, \ldots)$ طوری می‌سازیم که

$$|\rho_{m_n} \sin m_n(x-\alpha_{m_n})| > \frac{\delta}{۲} \qquad ((d_n) \text{ برای } x \text{ از}) \qquad (۱۰)$$

به عنوان $m_۱$، نخستین اندیس m را انتخاب می‌کنیم که علاوه بر نابرابری (۹)، در نابرابری

$$md > \pi^*$$

هم صدق کند. ضمن تغییر x در بازهٔ (d)، تابع $\sin m_۱(x-\alpha_{m_۱})$، دست‌کم یک‌بار، مقدار ± ۱ را قبول می‌کند، دراین صورت، با توجه به پیوستگی، می‌توان بازهٔ $(d_۱)$ را در درون (d) طوری پیدا کرد که، این تابع، درهمهٔ نقطه‌های آن، ازلحاظ قدرمطلق، بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$ باشد و، بنابراین، باتوجه به (۹)

$$|\rho_{m_۱} \sin m_۱(x-\alpha_{m_۱})| > \frac{\delta}{۲} \qquad ((d_۱) \text{ برای } x \text{ از})$$

اگر $(d_{n-۱})$ و $m_{n-۱}$ معلوم باشند، آن وقت، کاملاً شبیه آن‌چه هم‌اکنون انجام دادیم، اندیس m_n معین می‌شود. بازهٔ (d_n) در درون بازهٔ $(d_{n-۱})$ طوری ساخته می‌شود که (۱۰) برقرار باشد. دراین‌صورت، به‌سادگی، شرط $m_n > m_{n-۱}$ هم تحقق می‌یابد.

---

*) d را طول بازهٔ $(d)=[\alpha, \beta]$ گرفته‌ایم.

اکنون نقطهٔ x_0 را در درون همهٔ (d_n)ها انتخاب می‌کنیم (چنین نقطه‌ای، دست‌کم یکی، همیشه پیدا می‌شود). درمورد این نقطه، نابرابری (۱۰)، به‌ازای هرمقدار n برقرار است، در این صورت، با وجود شرط لازم تقارب، رشتهٔ (۴)، به ازای $x = x_0$ متباعد می‌شود. تناقض حاصل، اثبات پیش‌قضیه را تمام می‌کند.

۷۴۹. منحصر به فردبودن بسط مثلثاتی. اکنون به یکی از اساسی‌ترین پرسش‌ها، که درواقع هدف این بند بود، می‌پردازیم. اگر تابع $f(x)$ دربازهٔ $[-\pi, \pi]$، به یك رشتهٔ مثلثاتی (۴) بسط داده شده باشد، آیا این بسط منحصر به فرد است؟ این پرسش، از این جهت اهمیت بیشتری پیدا می‌کند که، همان‌طور که به یاد داریم [۶۷۸]، عبارت ضریب‌های رشته به‌کمك دستورهای اولر ـ فوریه، چندان بی‌نقص ومنطقی نبود. قضیهٔ زیر، به‌این پرسش، پاسخ قانع‌کننده می‌دهد.

قضیهٔ هاین ـ کانتور. اگر دو رشتهٔ مثلثاتی

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx, \qquad (۴)$$

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx \qquad (۱۱)$$

در همهٔ نقطه‌های بازهٔ $[-\pi, \pi]$ (حتی اگر احتمالاً تعداد محدودی «نقطه‌های نامعلوم» x_1، x_2، ...، x_k استثنا شده باشد)، به سمت یك مجموع $f(x)$ متقارب باشند، آن‌وقت، این دو رشته متحدند، یعنی

$$a_m = \alpha_m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \qquad , \qquad b_m = \beta_m \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

با کم‌کردن رشته‌های (۴) و (۱۱) از یکدیگر، اثبات قضیه را، منجر به اثبات منحصربودن بسط مثلثاتی صفر می‌کنیم:

اگر رشتهٔ مثلثاتی (۴)، دربازهٔ $[-\pi, \pi]$ (به‌استثنای، احتمالاً، چند نقطهٔ محدود)، به سمت صفر متقارب باشد، آن‌وقت، همهٔ ضریب‌های آن باید برابر صفر شوند

$$a_m = 0, \quad b_m = 0$$

حکم اخیر را ثابت می‌کنیم.

بنابرپیش‌قضیهٔ شمارهٔ قبل، ضریب‌های a_m و b_m به‌سمت صفرمیل می‌کنند؛ ازهمین‌جا نتیجه می‌شود که آن‌ها، درمجموع، کران دارند.

تابع ریمانی $F(x)$ را [(۶) را ببینید] درنظر می‌گیریم، بنابر پیش فرض‌های ما،

این تابع پیوسته است. بنابر قضیهٔ اول دیمان [۷۴۷]، مشتق دوم تعمیم یافتهٔ آن $F^{[1']}(x)$ درهمه‌جا (به‌استثنای «نقطه‌های نامعلوم»)، برابر صفر است. بنابر قضیهٔ دوم دیمان [۷۴۷]*، حتی در «نقطه‌های نامعلوم» شرط ساده‌شده (۲) برقرار است. در این صورت، بنابر قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ شوارتس [۷۴۶]، می‌توان نتیجه گرفت که، تابع $F(x)$، خطی است:

$$\frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{1}^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2} = cx + d$$

باید تأکید کرد که، این برابری، درعمل روی تمامی محور عددی برقرار است، زیرا آن‌چه دربارهٔ بازهٔ $[\pi \cdot -\pi]$ گفتیم، برای هر بازهٔ محدودی درست است. با نوشتن برابری حاصل به‌صورت

$$\frac{a_0 x^2}{4} - cx = d + \sum_{1}^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2}$$

از پیوستگی تابعی که در سمت راست برابری قرار دارد، بلافاصله نتیجه می‌شود $a_0 = c = 0$. به این ترتیب، برای بسط صفر، داریم:

$$0 = d + \sum_{1}^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2}$$

ولی این بار، رشته‌ای که به طور یکنواخت متقارب است. در این حالت [۶۷۸]، برای ضریب‌های آن، لزوماً با دستورهای اولر ـ فوریه بیان می‌شوند و ما به نتیجه نهائی می‌رسیم: $a_m = b_m = 0$.

یادداشت. به ترتیب زیر، می‌توان از استناد به پیش‌قضیهٔ کانتور پرهیز کرد.

x را نقطه‌ای، غیراز «نقطه‌های نامعلوم»، می‌گیریم به‌نحوی که، رشتهٔ (۴)، به‌ازای این مقدار x متقارب باشد و جملهٔ عمومی آن به سمت صفر میل کند:

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx \to 0 \qquad (۱۲)$$

در رشتهٔ (۴)، به جای x مقدارهای $x+\delta$ و $x-\delta$ را قرار می‌دهیم و، سپس، باهم جمع می‌کنیم، به بسط زیر می‌رسیم:

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \cos m\delta$$

---

*) به‌خصوص به این علت از این قضیه استفاده می‌کنیم که، در این جا، ضریب‌های a_m و b_m به سمت صفر میل می‌کنند.

که به ازای همهٔ مقدارهای δ به سمت صفر میل می‌کند، به جز احتمالاً تعداد محدودی از آن‌ها (اگر صحبت بر سر بازه‌ای متناهی از تغییر δ باشد). ولی در ارتباط با این رشتهٔ مثلثاتی با متغیر δ می‌دانیم که، ضریب‌های آن، به سمت صفر میل می‌کنند و اگر دربارهٔ آن (بدون استناد به پیش‌قضیهٔ کانتور) استدلال بالا را به‌کار بریم، به دست می‌آید $a_0 = 0$ و

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx = 0 \qquad (m=1,2,\ldots) \qquad (۱۳)$$

این برابری نه تنها برای نقطه‌های x مخالف با «نقطه‌های نامعلوم»، بلکه، بنابر پیوستگی تابع‌های کسینوس و سینوس، در همه‌جا برقرار است. اگر نسبت به x مشتق بگیریم، به‌این برابری می‌رسیم:

$$b_m \cos mx - a_m \sin mx = 0 \qquad (۱۴)$$

و سرانجام، از (۱۳) و (۱۴) به دست می‌آید: $a_m = b_m = 0$.

۷۵۰. قضیه‌های نهائی دربارهٔ رشته‌های فوریه. به این ترتیب، اگر برای تابع $f(x)$، بسط به رشتهٔ مثلثاتی ممکن باشد، این بسط تنها به یك طریق ممکن است. این طریق منحصربه‌فردکدام است؟آیا این طریق، اجباراً، همان رشتهٔ فوریه تابع $f(x)$ است؟*

تابع‌هایی را می‌شناسیم (حتی تابع‌های پیوسته) که قابل بسط به رشتهٔ فوریه نیستند [۷۰۳]، ولی هنوز برای ما معلوم نیست که آیا نمی‌توان، این تابع‌ها را، با ضریب‌های دیگری، غیر از ضریب‌های فوریه، به یك رشتهٔ مثلثاتی بسط داد.

همهٔ این پرسش‌ها، بیشتر طبیعی به نظر می‌آیند، وقتی که به سادگی می‌توانیم یك رشتهٔ مثلثاتی بسازیم که در همه جا متقارب باشد (و بنابراین، به صورت یك ارزشی تابعی را تعریف کند) و در عین حال، به روشنی، رشتهٔ فوریه نباشد. مثلاً، این رشته را در نظر بگیرید:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

این رشته، درهر بازهٔ بسته‌ای که شامل نقطه‌های به‌صورت $2k\pi$ نباشد $(k = 0, \pm 1, \ldots)$، حتی متقارب یکنواخت است [۴۳۰] وتابع پیوسته‌ای را تعریف می‌کند؛ ولی درنقطه‌های به صورت $2k\pi$، به سمت صفر متقارب است. این رشته، به رشتهٔ فوریه هیچ ربطی ندارد،

---

*) البته با این فرض که تابع $f(x)$، انتگرال‌پذیر مطلق است، زیرا وقتی دربارهٔ رشتهٔ فوریه صحبت می‌کنیم (مثل بالا)، به رشتهٔ فوریه تابع‌های انتگرال‌پذیر مطلق نظر داریم.

زیرا در این‌جا از شرط لازمی که در انتهای شمارهٔ **۷۳۱** آوردیم، خبری نیست [یادداشت را در آن‌جا ببینید]: رشتهٔ $\sum_{۲}^{\infty} \frac{۱}{n \ln n}$ متباعد است [**۳۶۷**، ۶)].

به این پرسش‌ها، در این شماره و در شمارهٔ بعد پاسخ نهائی را خواهیم داد.

از یك پیش‌قضیه آغاز می‌کنیم که متعلق به له‌بگ است.

پیش‌قضیه. اگر تابع $F(x)$، پیوسته در بازهٔ $[a, b]$، همه‌جا در درون این بازه دارای مشتق دوم تعمیم یافتهٔ $F^{[''۱]}(x)$، در محدودهٔ دو مقدار m و M باشد:

$$m \leqslant F^{[''۱]}(x) \leqslant M$$

آن وقت، هر نسبت به صورت $\frac{\Delta_h^۲ F(x_۰)}{۴h^۲}$ هم، در همین محدوده خواهد بود، البته به شرطی که بازهٔ $[x_۰ - ۲h, x_۰ + ۲h]$ به طور کامل در درون بازهٔ $[a, b]$ باشد.

این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$\varphi(x) = f(x_۰) + (x - x_۰) \frac{\Delta_{۲h} f(x_۰)}{۴h} + \frac{(x - x_۰)^۲}{۲} \frac{\Delta_h^۲ f(x_۰)}{۴h^۲}$$

که یك چندجمله‌ای کامل درجهٔ دوم است. با تحقیق مستقیم قانع می‌شویم که در سه نقطهٔ $x_۰ - ۲h$، $x_۰$ و $x_۰ + ۲h$، همان مقدارهای $f(x)$ را قبول می‌کند، به نحوی که در این نقطه‌ها، تفاضل

$$\lambda(x) = f(x) - \varphi(x)$$

برابر صفر می‌شود. تابع $\lambda(x)$ در بازهٔ $[x_۰ - ۲h, x_۰ + ۲h]$ پیوسته و در درون آن، دارای مشتق دوم تعمیم یافته است:

$$\lambda^{[''۱]}(x) = f^{[''۱]}(x) - \frac{\Delta_h^۲ f(x_۰)}{۴h^۲}$$

(برای چندجمله‌ای φ، مشتق دوم تعمیم یافته، برابر با همان مشتق دوم عادی آن است). $\lambda(x)$، حداکثر و حداقل مقدار خود را در نقطه‌های $x_۱$ و $x_۲$ واقع در درون بازهٔ $[x - ۲h, x + ۲h]$ به‌دست می‌آورد*. به‌سادگی ثابت می‌شود که، در این نقطه‌ها به‌ترتیب داریم: $\lambda^{[''۱]}(x_۱) < ۰$ و $\lambda^{[''۱]}(x_۲) > ۰$ [با استدلالی که در قضیه شوارتس، **۷۴۶**، داشتیم، مقایسه کنید]. از آن‌جا

$$f^{[''۱]}(x_۱) \leqslant \frac{\Delta_h^۲ f(x_۰)}{۴h^۲} \leqslant f^{[''۱]}(x_۲)$$

که گزارهٔ مورد نظر را ثابت می‌کند.

---

*) حتی اگر یکی از این مقدارها صفر باشد، باز هم در نقطهٔ $x_۰$، در درون آن بازه است.

اکنون، در موقعیتی هستیم که می‌توانیم قضیهٔ اساسی زیر را ثابت کنیم:

قضیهٔ دو بواریموند (P. du Bois Reymond). اگر تابع $f(x)$، کران‌دار و انتگرال‌پذیر (به معنای ویژه) دربازهٔ $[\pi, -\pi]$، در این بازه، به رشتهٔ مثلثاتی

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+b_n \sin nx \qquad (15)$$

بسط پیدا کند، آن وقت، این رشته، الزاماً، رشتهٔ فوریهٔ آن است.

قبل از همه، از تقارب رشته، کران‌دار بودن ضریب‌های a_n و b_n نتیجه می‌شود [پیش‌قضیهٔ شمارهٔ **۷۴۸**]. اگر تابع ریمانی $F(x)$ را وارد کنیم، برای عبارت $\frac{\Delta_h^2 f(x)}{4h^2}$، بسط به‌رشتهٔ مثلثاتی (۷) را داریم:

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$$

که (برای h ثابت) به طور یکنواخت نسبت به x متقارب است، زیرا به وسیلهٔ رشتهٔ به‌صورت $L\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$ محدود می‌شود. دراین‌صورت [**۶۷۸**]، ضریب‌های این رشته باید ضریب‌های فوریه برای مجموع‌های آن باشند:

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}dx,\\ a_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}dx,\\ b_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}dx \end{aligned}\right\}\ (n=1,2,\ldots) \qquad (16)$$

یادآوری می‌کنیم، اگر تابع $f(x)$ متناوب باشد و بر تمامی محور عددی ادامه پیدا کند، بسط (۱۵) را می‌توان در بیرون بازهٔ $[\pi, -\pi]$ هم دانست. بنابراین، طبق قضیهٔ اول ریمان [**۷۴۷**]، برای همهٔ مقدارهای x داریم:

$$F^{[n]}(x)=f(x)$$

با توجه به کران‌دار بودن تابع $f(x)$:

$$|f(x)|\leqslant K$$

و بنابر پیش‌قضیهٔ قبل، در عین‌حال، برای همهٔ مقدارهای x و h:

$$\left|\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}\right| \leqslant K \qquad (۱۷)$$

اکنون در برابری‌های (۱۶)، به ازای $h \to 0$، به سمت حد می‌رویم، درضمن در سمت راست آن‌ها، بنابر قضیهٔ آدل [۵۲۶]، می‌توان این عمل را در زیر علامت انتگرال انجام داد. به‌این‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \quad (n = ۱, ۲, \ldots) \end{aligned}\right\} \qquad (۱۸)$$

و این، همان چیزی است که اثبات آن را لازم داشتیم.

۷۵۱. تعمیم. اکنون، ازفرض کران‌داربودن تابع $f(x)$ صرف‌نظر می‌کنیم و حتی وجود تعداد محدودی نقطه‌ها را، که درآن‌ها بسط (۱۵) جایی ندارد، مفروض می‌گیریم. دراین صورت بازهم قضیهٔ زیر درست است:

تعمیم قضیهٔ دوبواریموند. اگر تابع $f(x)$، که در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ انتگرال‌پذیر مطلق است، دراین بازه، به‌استثنای احتمالاً در تعداد محدودی نقطه‌ها، به‌رشتهٔ مثلثاتی (۱۵) قابل بسط باشد، آن‌وقت، بسط اخیر به ناچار رشتهٔ فوریهٔ آن است*.

از این‌جا آغاز می‌کنیم که تابع $f(x)$ را، به‌طورمتناوب، روی تمامی محورعددی گسترش دهیم.**

درضمن، بهتر است $f(x)$ را با تابع زیر، که ساده‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرد، عوض کنیم:

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$$

برای این تابع، در هر بازهٔ متناهی (به‌جز احتمالاً در تعداد محدودی نقطه)، بسطی داریم که بدون جملهٔ آزاد است:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

---

*) این تعمیم، به واله پوسن (Ch.J.dela Vallée Poussin) تعلق دارد.

**) اگر تابع $f(x)$ باشرط $f(-\pi) = f(\pi)$ سازگار نباشد، آن‌وقت، برای تحقق این شرط، ازقبل، باید مقدار تابع را، دریکی از دو انتهای بازهٔ $[-\pi, \pi]$، مثلاً در آن‌جاکه بسط (۱۵) امکان ندارد، تغییر دهیم.

ثابت می‌کنیم که اولاً $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)dx = 0$

و ثانیاً، برای $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin nx\,dx \qquad (19)$$

که از آن‌جا، رابطه‌های موردنظر (۱۸) نتیجه می‌شود.

کران‌دار بودن ضریب‌ها [بنا بر پیش‌قضیهٔ شمارهٔ ۷۴۸]، در این‌جا هم، امکان می‌دهد، به‌بررسی تابع ریمانی بپردازیم:

$$\Phi(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\cos nx + b_n\sin nx}{n^2}$$

و این‌بار متناوب (با دورهٔ تناوب 2π).

بازهٔ $[\alpha, \beta]$ را طوری انتخاب می‌کنیم که نه شامل نقطه‌های استثنائی باشد و نه شامل نقطه‌های خاص تابع $\varphi(x)$؛ روشن است که بازهٔ $[\alpha-\delta, \beta+\delta]$ هم، به‌ازای مقدار به‌قدر کافی کوچک δ، از این گونه است. با توجه به کران‌دار بودن تابع φ، مثل بالا، کران‌دار بودن عبارت $\frac{\Delta_h^2\Phi(x)}{4h^2}$ را، به‌ازای $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ و $h \leqslant \delta$ نتیجه می‌گیریم. درضمن

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h^2\Phi(x)}{4h^2} = \varphi(x)$$

برای هر y از $[\alpha, \beta]$، بنا بر قضیهٔ آرتسل [۵۲۶] داریم:

$$\lim_{h\to 0} \int_{\alpha}^{y} \frac{\Delta_h^2\Phi(x)}{4h^2}\,dx = \int_{\alpha}^{y} \varphi(x)dx$$

اگر فرض کنیم: $\Phi_1(y) = \int_{0}^{y} \Phi(t)dt$

آن‌وقت، رابطهٔ اخیر به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\lim_{h\to 0} \left\{\frac{\Delta_h^2\Phi_1(y)}{4h^2} - \frac{\Delta_h^2\Phi_1(\alpha)}{4h^2}\right\} = \int_{\alpha}^{y} \varphi(t)dt$$

چون عبارت داخل آکولاد، به‌ازای $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ و $h \leqslant \delta$، کران‌دار است. بنابراین، با استفاده دوباره از قضیهٔ آرتسل داریم:

$$\lim_{h\to 0} \int_{\alpha}^{x} \{\ldots\}\,dy = \int_{\alpha}^{x} dy \int_{\alpha}^{y} \varphi(t)dt,\quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$$

سپس، اگر فرض کنیم:

$$\Phi_2(x)=\int_0^x \Phi_1(y)dy$$

می‌توانیم رابطهٔ حاصل را به‌این‌ترتیب بنویسیم:

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\Delta_h^2\Phi_2(y)}{4h^2}-\frac{\Delta_h^2\Phi_2(\alpha)}{4h^2}-(x-\alpha)\frac{\Delta_h^2\Phi_1(\alpha)}{4h^2}\right\}=\int_\alpha^x dy\int_\alpha^y \varphi(t)dt$$

ولی روشن است که $\Phi(x)$، مشتق دوم عادی $\Phi_2(x)$ است، به‌نحوی که

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^2\Phi_2(x)}{4h^2}=\Phi(x),\quad \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^2\Phi_2(\alpha)}{4h^2}=\Phi(\alpha)$$

اکنون، اگر حد زیر را (که به روشنی وجود دارد):

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^2\Phi_1(\alpha)}{4h^2}$$

γ بنامیم، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$\int_\alpha^x dy\int_\alpha^y \varphi(t)dt=\Phi(x)-\Phi(\alpha)-\gamma(x-\alpha)$$

اکنون به‌سادگی دیده می‌شود که انتگرال تکراری

$$\int_0^x dy\int_0^y \varphi(t)dt$$

(به‌ازای $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$)، از تابع قبلی، به‌اندازهٔ یک تابع خطی فرق دارد. به‌این‌ترتیب، تابع

$$\Psi(x)=\Phi(x)-\int_0^x dy\int_0^y \varphi(t)dt \qquad (۲۰)$$

در هر بازهٔ به‌صورت $[\alpha,\beta]$، خطی از آب درمی‌آید. یعنی، در هر نقطهٔ x، که غیر از نقطه‌های خاص تابع φ و نقطه‌های استثنائی باشد (دراین نقطه‌ها، بسط (۱۵) وجودندارد)،

$$\Psi^{[n]}(x)=0$$

از طرف دیگر، در همهٔ نقطه‌های x، بدون استثنا، شرط از نوع (۲) برقرار است: عبارت

$$\frac{\Delta_h^2\Psi(x)}{2h}=\frac{\Delta_h^2\Phi(x)}{2h}-\frac{1}{2h}\int_x^{x+2h}dy\int_0^y \varphi(t)dt+\frac{1}{-2h}\int_x^{x-2h}dy\int_0^y \varphi(t)dt$$

به‌ازای $h\to 0$، به سمت صفر میل می‌کند. درواقع، جملهٔ اول سمت راست، با توجه

به قضیهٔ دوم دیمان به سمت صفر میل می‌کند [با توجه به پیش قضیهٔ شمارهٔ ۷۴۸]؛ و بنابرقضیهٔ مربوط به مشتق‌گیری انتگرال نسبت به مرز بالایی متغیر [۳۰۵، ۱۲°]، همین نتیجه درمورد مجموع دو جملهٔ دیگر به‌دست می‌آید.

دراین حالت، با توجه به قضیهٔ تعمیم یافتهٔ شوارتس، [۷۴۶]، برای هر بازهٔ محدود و، بنابراین، برای همهٔ مقدارهای x، داریم:

$$\Psi(x)=cx+d \qquad (۲۱)$$

حالا فرض می‌کنیم:

$$\varphi(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty \alpha_n cosnx+\beta_n sinnx$$

که اگر دوبار، جمله به جمله، انتگرال بگیریم [۷۳۱]، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^x dy\int_0^y \varphi(t)dt=\frac{\alpha_0 x^2}{4}-\sum_1^\infty \frac{\alpha_n cosnx+\beta_n sinnx}{n^2} \qquad (۲۲)$$

ازمقایسهٔ (۲۰)، (۲۱) و (۲۲)، به بسط

$$\frac{\alpha_0 x^2}{4}+cx+d=\sum_1^\infty \frac{(\alpha_n-a_n)cosnx+(\beta_n-b_n)sinnx}{n^2}$$

می‌رسیم که برای هرمقدار حقیقی x درست است.

چون سمت‌راست، تابعی پیوسته ومتناوب، یعنی کران‌دار نسبت به x است، بنابراین باید داشته باشیم $c=0$، و همچنین

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=0$$

اکنون معلوم می‌شود که رشتهٔ

$$-d+\sum_1^\infty \frac{(\alpha_n-a_n)cosnx+(\beta_n-b_n)sinnx}{n^2}$$

همه‌جا به‌سمت صفرمتقارب است و، درضمن، به‌طوریکنواخت. ازاین‌جا [۶۷۸ یا ۷۴۹] نتیجه می‌شود که، همهٔ ضریب‌های آن صفرند، به‌نحوی که شرط (۱۹) برقرار است.

$$a_n=\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)cosnx\,dx,$$

$$b_n=\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)sinnx\,dx$$

که اثبات را به پایان می‌رساند.

MATH75.IR

ضمیمه

دیدگاهی کلی به حد

۷۵۲. گونه‌های مختلف حد. مفهوم حد در تمامی دورهٔ آنالیز نفوذ کرده است، ولی در بخش‌های مختلف آن، شکل‌های کاملاً متفاوتی دارد.

ما از مطالعهٔ ساده‌ترین حالت ــ حد یك واریانت، که دنبالهٔ اندیس‌داری از مقدارها را طی می‌کند [۲۲، ۲۳]، آغاز کردیم و تقریباً، براساس آن، نظریهٔ حد را تکامل دادیم (فصل اول).

سپس، مفهوم حد، به حالت حد تابع‌های با یك یا چند متغیر تعمیم داده شد [۵۲، ۱۶۵]*. روند حدی پیچیده‌تر شد، ولی خصلت کلی خود را حفظ کرد.

محاسبهٔ انتگرالی، ما را به بررسی حد مجموع‌های انتگرالی ریمان و داربو هدایت کرد [۲۹۵، ۲۹۶، ۳۰۱]. در این‌جا، روند حدی، با تقسیم بازهٔ مفروض بستگی پیدا کرد و، در مقایسه با قبل، شکل کاملاً ویژه‌ای به‌خود گرفت.

حدهایی که درفصل دهم، برای تعریف مفهوم طول کمان (حد خط شکسته محاطی، ۳۳۰)، مساحت سطح شکل‌ها (حد مساحت‌های چندضلعی‌های محاطی و محیطی، ۳۳۶) وغیره، با آن برخورد داشتیم، کم و بیش، از این گونه بودند.

سرانجام، درجلد سوم، با تبدیل‌های حدی دیگری آشنا شدیم که، روندهای حدی دیگری، غیر از آن‌چه قبلاً دیده بودیم، داشتند.

همهٔ این انواع حد را، می‌توان اصولاً، با حد واریانت‌ها مربوط کرد. ما این اندیشه را، در تمامی بحث‌های خود دربارهٔ حد، یادآوری کرده‌ایم، منتهی در ابتدا به تفصیل [۵۳، ۱۶۶، ۲۹۵]، وسپس تنها با ذکر این جمله که «تعریف حد، به‌زبان دنباله‌ها هم‌امکان دارد». البته، منجر کردن فرایندهای حدی بغرنج، به حد ساده واریانت‌ها، به‌خودی خود، جالب است، ولی برای ما از این جهت مهم بود که ما را ازطرح مکرر قضیه‌های مقدماتی

---

*) همه‌جا، تعریف حد را، با زبان «δ ــ ε» درنظر گرفته‌ایم.

مربوط به‌نظریه حد، معاف می‌کرد.

اگرچه، این راه، یگانگی همهٔ گونه‌های حد را برای ما روشن می‌کند، ولی خود ضرورت «تشریح» این متغیر و جدا کردن مقدارهای دنباله‌های اندیس‌دار خاص آن از مجموعه، بدون‌شك، نوعی ساختگی به نظر می‌رسد و، بنابراین، تعریف کلی حد این متغیر، همچنان ناگفته می‌ماند.

هدف ما در این‌جا این است که، دیدگاهی کلی در مورد حد پیدا کنیم، به‌نحوی که‌همهٔ صورت‌های مختلف حد را، به‌عنوان حالت‌هایی خاص، دربرگیرد و؛ براساس آن، چارچوب نظریه‌کلی‌حد را مشخص کنیم.

اندیشه‌هایی را که دراین‌جا می‌آوریم، ابتدا شاتونوسکی، دانشمند شوروی و،سپس، مور (E. H. Moore) وسمیت (H. L. Smith)، (دانشمندان‌امریکائی)طرح کردند. باید یادآوری کنیم که، این طرح، تنها نوع ممکن طرح مساله نیست.

۷۵۳. مجموعه‌های مرتب (به‌معنای خاص خود). ضمن‌مطالعه‌شکل‌مختلف متغیرهایی که دارای‌حدهستند، این‌اندیشه‌را تلقین‌می‌کنند که، برای‌این‌که‌بتوانیم دربارهٔ مفهوم‌کلی‌حد متغیرصحبت‌کنیم، حوزهٔ تغییر آن نمی‌تواند «بی‌شکل» و «بی‌نظم» باشد وباید، به‌صورتی، جهت‌دار یا مرتب باشد. به‌همین‌مناسبت، در ابتدا، مفهوم کلی مجموعه‌های مرتب را مطرح می‌کنیم.

مجموعه $\{P\} = \mathfrak{P}$ را، شامل عضوهای P، با طبیعتی دلخواه، در نظر می‌گیریم. اگر برای دوعضو مشخص و مختلف P و P' آن، فرض‌کنیم که یکی‌از آن‌ها (مثلاً P')، به‌دنبال دیگری (P) می‌آید، آن‌وقت آن را به‌صورت $P \prec P'$ نشان می‌دهیم و می‌گوییم، برای دوعضو P و P'، ردیفی‌وجود دارد. قاعده‌ای‌که، ردیف‌را، برای همهٔ زوج‌عضوهای مختلف $\mathfrak{P}$، یا تنها بعضی از زوج‌ها، معین‌کند، در هرحال باید تابع دو شرط زیر باشد:

I) اگر $P_2 \prec P_1$، آن‌وقت نمی‌تواند هم‌زمان با آن $P_1 \prec P_2$ برقرار باشد.

II) اگر $P_2 \prec P_1$ و $P_3 \prec P_2$، آن‌وقت $P_3 \prec P_1$ (یعنی رابطه «دنبال می‌کند»، دارای ویژگی سرایت‌پذیری است).

اگر، طبق قانونی، همهٔ زوج عضوهای مختلف $\mathfrak{P}$، با رعایت شرطهای I و II، ترتیبی داشته باشند، آن‌وقت، مجموعهٔ $\mathfrak{P}$ را مرتب گویند (و یادقیق: مرتب‌به‌معنای خاص که با مجموعهٔ مرتب به معنای عام ــ که درشمارهٔ بعدی دربارهٔ آن صحبت خواهیم کرد ــ فرق‌دارد).

چند مثال از مجموعه‌های مرتب می‌آوریم:

۱) هرمجموعهٔ $\{x\}$ از عددهای‌حقیقی یك مجموعهٔ مرتب است، به‌شرطی که‌عددهای

آن به‌ردیف صعودی (دراین‌جا $x \prec' x'$ به‌معنای $x < x'$ است)* یا ردیف نزولی ($x' \prec x$ به‌معنای $x' < x$) قرار گرفته باشند.

همین مثال را، به‌صورت هندسی آن، می‌توان به‌این‌ترتیب بیان کرد: هرمجموعه‌ای از نقطه‌های واقع برخط راست افقی، مرتب است، وقتی که از هردو نقطه، آن‌را که درسمت راست (یا سمت چپ) قرار دارد، نقطه بعدی به‌حساب آوریم.

۲) اکنون مجموعهٔ $\mathcal{M} = \{M(x, y)\}$ را درنظر می‌گیریم که شامل نقطه‌های $M(x, y)$ ازفضای دوبعدی است. این‌مجموعه را می‌توان، مثلاً به‌صورت زیر مرتب کرد:

$$M(x, y) \prec M'(x', y'),$$ وقتی $x < x'$؛ و به‌ازای $x = x'$، وقتی $y < y'$.

درهمهٔ این حالت‌ها می‌توان تحقیق کرد که، شرط‌های I و II رعایت شده‌اند.

برای این‌که بتوانیم از مفهوم مجموعهٔ مرتب، ساده‌تر در بررسی حد متغیر استفاده کنیم، اضافه بر آن‌چه گفتیم، فرض می‌کنیم، در مجموعهٔ مورد بررسی $\mathcal{P}$، عضو «آخر» (یعنی عضوی که به‌دنبال همهٔ بقیهٔ عضوها آمده است) وجودنداشته باشد. بنابراین، هرعضو دلخواه P را که از $\mathcal{P}$ درنظر بگیریم، همیشه عضوی مثل P' پیدا می‌شود که برای آن داریم: $P \prec P'$.

۷۵۴. مجموعه‌های مرتب (به‌معنای عام آن). همان‌طور که خواهیم‌دید، اغلب با این موقعیت روبه‌رو می‌شویم که، برای هردوعضو مجموعهٔ موردنظر $\mathcal{P}$، ردیفی برقرار کنیم و، درضمن، کافی است این ردیف را (با رعایت شرط‌های I و II) تنها برای بعضی زوج‌ها قایل باشیم. ولی، درچنین موردهایی، باید شرط سومی را هم درنظر بگیریم:

III) برای هر دو عضو P و P' از مجموعهٔ $\mathcal{P}$، بتوان عضو P'' از این مجموعه را طوری پیدا کرد که «به دنبال» هر دو عضو P و P' آمده باشد:

$$P \prec P'', \quad P' \prec P''$$

[در ضمن، برای ما بی‌تفاوت است که، آیا برای خود عضوهای P و P'، ردیفی وجود دارد یا نه.]

این شرط، به‌خودی خود، وجود «آخرین عضو» را در $\mathcal{P}$، ناممکن می‌کند.

به‌سادگی معلوم می‌شود، هرمجموعه‌ای که به‌معنای خاص خودمرتب باشد، تنها به‌شرطی که «عضو آخر» نداشته باشد، باید در شرط III هم صدق کند. درواقع، عضوهای P و P' را به هرصورتی از $\mathcal{P}$ انتخاب کنیم، دراین حالت، برای آن‌ها ردیفی وجود دارد: مثلاً

---

*) همین مثال ساده، عادی بودن نماد $\prec$ را، برای «دنبال می‌کند»، روشن می‌کند، شبیه نماد $<$ برای «بزرگتر است از».

$P \prec P'$. چون P' «عضو آخر» نیست، بنابراین در $\mathfrak{P}$ می‌توان عضو P'' را پیدا کرد که برای آن داشته باشیم: $P' \prec P''$؛ که بنابرویژگی سرایت‌پذیری برای $\prec$، درضمن‌خواهیم داشت $P \prec P''$.

وقتی هم‌که تنها برای بعضی از عضوهای مجموعهٔ $\mathfrak{P}$، ردیفی با رعایت شرط‌های I و II و III وجود داشته باشد، مجموعهٔ $\mathfrak{P}$ را مرتب (به‌معنای عام) گویند*.

نمونه‌هایی از این گونه مجموعه‌ها را می‌آوریم.

۳) مجموعهٔ $\mathfrak{M}$ را شامل‌عددهای حقیقی x، که برای آن‌ها، a، نقطهٔ تجمع است [۵۲] درنظر می‌گیریم؛ درضمن، فرض‌کنید، خود نقطهٔ a، متعلق به $\mathfrak{M}$ نباشد.

فرض را براین می‌گیریم که

اگر $|x'-a|<|x-a|$، آن‌گاه $x \prec x'$

به‌نحوی، مقداری را «بعدی» به‌حساب آوریم که به a نزدیک‌تر باشد.

روشن است که شرط‌های I و II رعایت شده‌اند. اگر در $\mathfrak{M}$، به‌مقدارهایی از x برخورد نکنیم که از a به‌یک‌فاصله باشند، ولی در دوسمت متفاوت نسبت به a واقع باشند، آن‌وقت مجموعهٔ $\mathfrak{M}$، به معنای خاص خود، مرتب است. ولی اگر زوج‌نقطه‌های هم‌فاصله نسبت به x وجود داشته باشند. آن‌وقت، برای آن‌ها، ردیفی وجود نخواهد داشت.

برقراری شرط III را مورد تحقیق قرار می‌دهیم. عددهای دلخواه x و x' را از $\mathfrak{M}$ درنظر می‌گیریم. چون این دو عدد با a فرق دارند و، درضمن، a نقطهٔ تجمع مجموعهٔ $\mathfrak{M}$ است، بنابراین در $\mathfrak{M}$، الزاماً نقطهٔ x'' پیدا می‌شود که، نسبت به x و x'، به a نزدیک‌تر باشد؛ دراین‌صورت $x \prec x''$ و $x' \prec x''$.

به‌این‌ترتیب، مجموعهٔ $\mathfrak{M}$، در هرحال، مجموعه‌ای مرتب به‌معنای عام است.

۴) $\mathfrak{M}$ را مجموعه‌ای عددی، با نقطهٔ تجمع ∞ می‌گیریم. این مجموعه را می‌توان به‌شرط زیر، مرتب کرد:

اگر $|x| \prec |x'|$، آن‌وقت $x \prec x'$

هر سه‌شرط I، II و III برقرارند. درحالتی که، دو مجموعه، مقدارهایی که تنها از نظر علامت باهم اختلاف‌دارند، وجود نداشته باشد، آن‌وقت مجموعه، به‌معنای خاص‌خود، مرتب است. و اگر چنین زوج‌هایی وجود داشته باشند، آن‌وقت، برای آن‌ها نمی‌توان ردیفی درنظر گرفت و، بنابراین، تنها می‌توان ازمرتب‌بودن مجموعه، به‌معنای عام، صحبت کرد.

---

*) گاهی‌هم، به‌این‌مجموعه‌ها، «نیمه‌مرتب» یا «مرتب‌در بخشی‌ازخود» و یا «مرتب‌ناقص» هم‌می‌گویند.

۵) اکنون، مجموعهٔ $\mathscr{M}=\{M(x, y)\}$، نقطه‌های فضای دوبعدی با نقطهٔ تجمع $M_0(a, b)$ را در نظر می‌گیریم [۱۵۳]. هر دو مختص a و b را متناهی فرض می‌کنیم و نقطهٔ M_0 را متعلق به $\mathscr{M}$ نمی‌گیریم.

با این شرط موافقت می‌کنیم که اگر

$$\max(|x'-a|, |y'-b|)<\max(|x-a|, |y-b|)$$

آن‌وقت

$$M'(x', y')\prec M(x, y)$$

شبیه ۳)، دراین‌جا هم، همهٔ شرط‌های I، II و III برقرارند. مثلاً، شرط III را آزمایش می‌کنیم. دونقطهٔ $M(x, y)$ و $M'(x', y')$ را مفروض می‌گیریم، چون هر دوی آن‌ها با M_0 فرق دارند، بنابراین

$$\sigma=\max(|x-a|, |y-b|)>0,$$

$$\sigma'=\max(|x'-a|, |y'-b|)>0$$

بین این دو عدد، کوچکترین آن‌ها را، δ می‌نامیم؛ با توجه به این‌که M_0 نقطهٔ تجمع $\mathscr{M}$ است، بنابراین در $\mathscr{M}$ نقطه‌ای مثل $M''(x'', y'')$ پیدا می‌شود که، برای آن داشته باشیم:

$$|x''-a|<\delta, \quad |y''-b|<\delta$$

در این‌صورت

$$M''\prec M, \quad M''\prec M'$$

به‌این‌ترتیب، مجموعهٔ $\mathscr{M}$، یك مجموعهٔ مرتب (به‌معنای عام) است.

اگر یکی از دو مختص M_0، مثلاً a، برابر ∞ باشد، می‌توان توافق را تغییر داد و مثلاً $|x-a|$ را با $\frac{1}{|x|}$ عوض کرد وغیره.

۶) روش دیگری برای مرتب‌کردن مجموعهٔ $\mathscr{M}$، که هم‌اکنون دربارهٔ آن صحبت کردیم، می‌دهیم (a و b را متناهی می‌گیریم). می‌توان به‌این ترتیب شرط کرد که اگر

$$|x'-a|+|y'-b|<|x-a|+|y-b|$$

آن‌وقت

$$M'(x', y')\prec M(x, y)$$

و یا به‌این‌ترتیب که اگر

$$\sqrt{(x'-a)^2+(y'-b)^2}<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

آن‌وقت

$$M'(x', y')\prec M(x, y)$$

به خواننده پیشنهاد می‌کنیم، در هـر دوحالت، سازگاری شرط‌های I، II و III را مورد تحقیق قرار دهد.

۷) $\mathcal{M}$ را مجموعهٔ نقطه‌های«درست» (m, n) می‌گیریم که، درآن، m و n عددهایی طبیعی‌اند؛ نقطهٔ تجمع مجموعه‌را $(+\infty, +\infty)$ فرض‌می‌کنیم. شبیه ۵)، این‌مجموعه‌را می‌توان طبق قانون زیر، مرتب کرد:

اگر $\min(m', n')>\min(m, n)$، آن‌وقت $(m', n')\prec(m, n)$

و یا ساده‌تر، با این قانون

اگر $m'>m$ و $n'>n$، آن‌وقت $(m', n')\prec(m, n)$

در این‌جاهم، شرط‌های I، II و III برقرارند.

۸) حالا نمونه‌ای از حوزهٔ دیگری انتخاب می‌کنیم. مجموعهٔ $\mathcal{R}$ را همهٔ تقسیم‌های ممکن R از بازهٔ مفروض $[a, b]$، به‌تعداد محدودی بخش به کمك نقطه‌های تقسیم

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$$

فرض می‌کنیم.

اگر λ را بزرگترین طـول این بخش‌ها بگیریم، آن‌وقت تقسیم‌های مختلف R را می‌توان، به‌طور طبیعی، برحسب مقدارهای نزولی λ مرتب کرد؛ به‌این ترتیب، تقسیمی به «دنبال» تقسیم دیگر می‌آیدکه، درآن، λ مقدار کوچکتری باشد.

تامین شرط‌های I و II روشن است. شرط III را هم می‌توان به‌سادگی موردتحقیق قرار داد: دوتقسیم مختلف، متناظر با λ و λ' درنظر می‌گیریم؛ همیشه تقسیمی با بخش‌های کوچکتر وجود داردکه با λ'' متناظر است و، در ضمن، λ'' از λ و λ' کوچکتر باشد.

به‌این‌ترتیب $\mathcal{R}$ مجموعه‌ای مرتب است، ولی تنها به‌معنای عام: برای دوتقسیم مختلفی که، درآن‌ها، مقدار λ برابر باشد، نمی‌توان ردیفی برقرارکرد.

۹) برای همین مجموعهٔ $\mathcal{R}=\{R\}$، می‌توان به‌صورت دیگری، مرتب بودن مجموعه را درنظر گرفت: تقسیم R' به‌دنبال‌تقسیم R می‌آید، وقتی‌که، از R، با اضافه‌کردن‌نقطه‌های تقسیم تازه‌ای به نقطه‌های تقسیم آن به‌دست آمده باشد. این توافق هم، منجر به‌مجموعه‌ای

مرتب، منتهی تنها به‌معنای عام آن، می‌شود: برای دو تقسیم R و R'، که در نقطه‌های تقسیم خود، به‌کلی با هم فرق دارند، نمی‌توان ردیفی قایل شد.

۷۵۵. متغیر مرتب و حد آن. متغیر x را با حوزهٔ تغییر $\mathfrak{X}$ درنظر می‌گیریم. می‌توان پیش خود فرض کرد که، این حوزهٔ $\mathfrak{X}$، به‌طور مستقیم، مرتب است (به‌معنای خاص یا عام) و یا ـ کلی‌تر ـ مقدارهای x از $\mathfrak{X}$، در تناظر یك به یك، با عضوهای P از مجموعهٔ مرتب $\mathfrak{P}=\{P\}$، که عضوهای آن طبیعت دلخواهی دارند، قرار دارد. درچنین حالتی، خودمتغیر x را هم، مرتب گویند.

با استناد به $\mathfrak{P}$، مجموعهٔ مقدارهای $x=x_P$ هم مرتب می‌شود، زیرا می‌توان به‌حساب آورد که

$$\text{اگر در } \mathfrak{P}\text{: } P\prec P' \text{، آن‌گاه } x_P\prec x_{P'}$$

و این، در واقع تجدید عهدی است، منتهی به‌صورتی کلی‌تر، با واریانت x_n، که مقدارهای آن را درتناظر با دنبالهٔ طبیعی عددها ـ «اندیس‌ها» ـ قرار می‌دادیم و آن‌ها را، برحسب این اندیس‌های صعودی مرتب می‌کردیم:

$$\text{اگر } n'>n\text{، آن‌گاه } x_n\prec x_{n'}$$

اگر بتوانیم عضوهای P از مجموعهٔ $\mathfrak{P}$ را از هم تمیز دهیم، آن‌وقت می‌توانیم مقدارهای $x=x_P$ از متغیرمان را هم، به کمك همین «اندیس» P از یکدیگر تمیز دهیم. دراین‌جا هم (مثل مورد واریانت‌ها)، ممکن است با «اندیس‌های» برابر یا مختلف روبه‌رو شویم.

تاکید بر این نکته لازم است که، وقتی دربارهٔ متغیر مرتب صحبت می‌کنیم، درواقع هیچ‌گونه تصور یا نمایشی دربارهٔ وضع مقدارهای آن درفضا یا زمان، با آن مربوط نمی‌کنیم. مقدار «بعدی»، نسبت به‌مقدار «قبلی»، «جای دورتری» را اشغال نمی‌کند؛ مقدار «بعدی» به‌معنای مقداری که بعد از قبلی قرار گرفته باشد، نیست و غیره. اگر معمولاً از عبارت‌هایی از نوع «با آغاز از جایی» یا «از یك لحظهٔ تغییر» و غیره استفاده می‌شود، تنها به‌این خاطر است که بیان مطلب ساده‌تر شود و یا این‌که، «زبان»، امکان بیان دیگری به ما نمی‌دهد.

تعریف حد متغیر مرتب $x=x_P$ (یا ـ آن‌طور که گاهی می‌گویند ـ حد مجموعهٔ مرتب $\{x_P\}$)، کاملاً شبیه تعریف حد واریانت (یا دنباله) است:

متغیر $x=x_P$ دارای حد متناهی a است، وقتی‌که برای هرعدد $\varepsilon>0$، بتوان چنان «اندیس» P_ε از $\mathfrak{P}$ را پیداکرد که، برای هر $P\succ P_\varepsilon$، مقدارهای متناظر $x=x_P$، درنابرابری زیر صدق کنند:

$$|x-a|=|x_P-a|<\varepsilon$$

در تعریف شمارهٔ ۲۳، نقش P_ε به عهدهٔ N_ε بود: در واقع، رابطهٔ $n\geqslant N_\varepsilon$ با نابرابری $n>N_\varepsilon$ هم‌ارز است.

تعریف حد نامتناهی هم، به‌همین ترتیب، داده می‌شود:

متغیر $x=x_P$ دارای حد ∞ است، وقتی‌که برای هر عدد $E>0$، «اندیس» P_E از $\mathcal{P}$ پیدا شود، به‌نحوی‌که

$$|x|=|x_P|>E$$

تنها برای $P\geqslant P_E$.

به‌سادگی می‌توان تعریف بعدی را، برای حالتی که بر سر بی‌نهایت با علامت معین است ($+\infty$ یا $-\infty$) تنظیم کرد.

درضمن، آن‌طور که معمول است، می‌نویسند:

$$x\to a(\infty,\ +\infty,\ -\infty)\text{ یا }x=a(\infty,\ +\infty,\ -\infty)\text{ حد}$$

به چند مثال بپردازیم.

۷۵۶. مثال‌ها. با نمونه‌ای از متغیر x آغاز می‌کنیم که، در آن، حوزهٔ تغییر $\mathcal{P}$، به‌طور مستقیم، مرتب است.

۱) $\mathcal{P}=\{x\}$ را مجموعه‌ای از عددهای حقیقی با نقطهٔ تجمع a می‌گیریم که، برحسب مقدارهای نزولی $|x-a|$ مرتب شده باشد [مثال ۳) شمارهٔ **۷۵۴** را ببینید]. روشن است که، متغیر متناظر x، دارای حد a است: $\varepsilon>0$ را هرطور انتخاب کنیم، می‌توان x_ε را در $\mathcal{P}$، غیر از a، طوری انتخاب کرد که داشته باشیم: $|x_\varepsilon-a|<\varepsilon$، در این صورت، برای $x\geqslant x_\varepsilon$، به‌طور مسلم $|x-a|<\varepsilon$.

به‌همین ترتیب، اگر نقطهٔ تجمع $\mathcal{P}=\{x\}$، ∞ باشد و، این مجموعه، برحسب مقدارهای صعودی $|x|$ مرتب شده باشد [مثال ۴) **۷۵۴** را ببینید]، آن‌وقت $x\to\infty$.

ولی، اغلب با حالت‌هایی مواجه‌می‌شویم که، مقدارهای متغیر، در تناظر با «اندیس‌های» P از یك مجموعهٔ مرتب $\mathcal{P}$ قرار دارند. مثال‌هایی از این قبیل که در زیر آورده‌ایم، اهمیت خاص خود را دارند: این مثال‌ها به‌خوبی روشن می‌کنند، گونه‌های مختلف حد، که در این کتاب دربارهٔ آن‌ها صحبت کرده‌ایم، در واقع، می‌توانند به عنوان حالت‌های خاصی از تعریف کلی حد (که در بالا آوردیم)، درنظر گرفته شوند.

۲) مفهوم حد تابع

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \qquad (۱)$$

را، که برای سادگی در حالت متناهی بودن a و A در نظر می‌گیریم، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید، تابع $f(x)$، درحوزهٔ $\mathscr{D} = \{x\}$، که دارای نقطهٔ تجمع a است، تعریف شده باشد؛ خود مقدار a متعلق به $\mathscr{D}$ نیست و یا، دست‌کم، ضمن تعیین حد (۱) به حساب نمی‌آید. دراین‌جا، این تابع، همان متغیری است که دربارهٔ حد آن صحبت می‌کنیم، و x هم، نقش «اندیس» P را به‌عهده دارد. بیان $x \to a$ را به‌این معنا می‌فهمیم که حوزهٔ تغییر x، یعنی $\mathscr{D}$، برحسب مقدارهای نزولی $|x-a|$ مرتب شده است [۷۵۴، ۳)]. دراین صورت، مجموعهٔ مقدارهای تابع‌های $\{f(x)\}$ هم، به‌ترتیب متناظری مرتب می‌شوند، و برابری (۱) ــ بنابر تعریف کلی ــ مفهوم معینی پیدا می‌کند؛ یعنی برای $\varepsilon > 0$ مفروض، همیشه مقدار x_ε از $\mathscr{D}$ پیدا می‌شود که نابرابری

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad (۱)$$

برای x ـ x_ε، یعنی تنها وقتی که $|x-a| < |x_\varepsilon - a|$، برقرار باشد.

با فرض $\delta = |x_\varepsilon - a|$، شرط اخیر را می‌توان به‌صورت $|x-a| < \delta$ نوشت. برعکس، اگر نابرابری (۲)، به‌ازای $|x-a| < \delta$ برقرار باشد، آن‌وقت با انتخاب x_ε، به‌شرط $|x_\varepsilon - a| < \delta$، می‌توان حکم کرد که (۲)، برای x ـ x_ε برقرار است. به‌این ترتیب، تعریف جدید حد تابع، با تعریف قبلی [۵۲] هم‌ارز است.

۳) تعریف حد تابع با دو متغیر

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A \qquad (۳)$$

را می‌توان، با اصطلاح متغیر مرتب، به‌صورت کاملاً مشابهی بیان کرد.

تابع $f(M) = f(x, y)$ را درحوزهٔ $\mathscr{M} = \{M(x, y)\}$ با نقطهٔ تجمع $M_0(a, b)$ معین می‌گیریم؛ خود نقطهٔ M_0، بنابر تعریف برابری (۳)، به‌حساب نمی‌آید. نقطهٔ $M(x, y)$ از $\mathscr{M}$، نقش «اندیس» را به‌عهده دارد. مجموعهٔ $\mathscr{M}$ را به‌همان‌صورتی مرتب می‌کنیم که در شمارهٔ ۷۵۴، ۵) انجام دادیم (به‌این‌مفهوم، متوجه‌معنای $M \to M_0$ یا $x \to a$ و $y \to b$ می‌شویم)؛ دراین‌صورت، مجموعهٔ مقدارهای تابع‌های $\{f(M)\} \equiv \{f(x, y)\}$ هم مرتب می‌شود. به‌این‌ترتیب، برابری (۳)، با توجه به‌تعریف کلی حد متغیر مرتب، معنا پیدا می‌کند.

دراین‌جا هم، بلافاصله‌روشن می‌شود که، درک جدید برابری (۳)، با درک قبلی ما از آن [۱۶۵]، هم‌ارز است.

اگر به‌جای قانون مرتب کردن مجموعهٔ $\mathfrak{M}=\{M(x,y)\}$، که در ۷۵۴، ۵) آورده‌ایم، از قاعده‌ای استفاده کنیم که در ۶) داشتیم، بازهم تعریف حد، به قوت خود باقی می‌ماند.

۴) برای متغیر $x_{m,n}$، که به دو مقدار طبیعی m و n بستگی دارد، مفهوم حد

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} x_{m,n}=A$$

با قانون مرتب کردن زوج‌های (m,n) ساخته می‌شود:

اگر $\min(m',n')>\min(m,n)$، آن‌گاه $(m',n')\dashv(m,n)$

[۷۵۴، ۷) را ببینید]. این، بر همان تعریفی منطبق است که در پایان شمارهٔ ۱۶۵ دربارهٔ آن صحبت کردیم.

اگر ازقانون‌ساده‌تر مرتب کردن زیر هم، که در۷) داشتیم، استناد می‌کردیم، بازهم به‌همین نتیجه می‌رسیدیم:

اگر $m'>m$ و $n'>n$، آن‌گاه $(m',n')\dashv(m,n)$

تعمیم آن‌چه در این‌جا گفته شد، دربارهٔ تابع‌های با چند متغیر، دشوار نیست.

۵) سرانجام، به مسالهٔ حد ریمان یا داربو، برای تابع کران‌دار $f(x)$ در بازهٔ مفروض $[a,b]$ می‌پردازیم. این مجموع، به‌تقسیم‌های R از بازهٔ $[a,b]$ به بخش‌هایی مربوط می‌شود که به‌کمک نقطه‌های دلخواه

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$$

به‌دست آمده‌اند. درضمن، روند حدی در جهتی است که $\lambda\to 0$، که در آن داریم: $\lambda=\max\Delta x_i$. در ۷۵۴، ۸)، مجموعهٔ همهٔ تقسیم‌های ممکن بازه به بخش‌های R را $\mathfrak{R}=\{R\}$، برحسب λ نزولی، مرتب کردیم. متناظر با آن، مقدارهای مجموع‌های داربو، s و S را نیز می‌توان مرتب کرد.

برای ساختن مجموع ریمانی σ، به‌جز تقسیم بازه به بخش‌ها، باید در هر بخش، نقطه‌ای را هم انتخاب کرد. به‌این‌ترتیب: مجموع ریمانی، نه‌تنها با گروه نقطه‌های تقسیم، بلکه درضمن، با گروه نقطه‌های بینابینی هم مشخص می‌شود؛ اگر گروه‌ها (و همراه با آن‌ها مجموع‌های ریمانی را، می‌توان برحسب λ نزولی مرتب کرد.

اکنون روشن است که حدهای

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma,\quad \lim_{\lambda\to 0}s,\quad \lim_{\lambda\to 0}S$$

هم، با همان طرح کلی که دراین‌جا پیش بردیم، هماهنگی دارند.

درضمن توجه کنیم، این‌حدها را هم، در واقع، درهمهٔ حالت‌ها، با استفادهٔ ازقاعدهٔ ۹) شمارهٔ **۷۵۴** برای مرتب کردن مجموعه‌های $\{\sigma\}$، $\{s\}$ و $\{S\}$، می‌توان به‌دست آورد. به‌خواننده پیشنهاد می‌کنیم، این مطلب را، با تکیه بر نتیجه‌های شماره‌های **۲۹۷** و **۳۰۱**، ثابت کند.

به‌همین ترتیب می‌توان دربارهٔ مساله‌های دیگر مربوط به‌حد، که ضمن تعریف طول کمان [۳۳۰]، مساحت شکل‌های مسطح [۳۳۶]، انتگرال‌های دوگانه و انتگرال‌های روی سطح [۵۴۴، ۵۵۰، ۵۸۹، ۶۳۱، ۶۳۶] وغیره، با آن‌ها برخورد داشته‌ایم، مورد بررسی قرارداد.

۷۵۷. یادداشتی دربارهٔ حد تابع‌ها. وقتی دربارهٔ حد (۱) صحبت می‌کردیم، تنها به یك صورت مشخص، مجموعهٔ $\{x\} = \mathfrak{X}$ [۷۵۴، ۳)] و، همراه با آن، مجموعهٔ مقدارهای تابع‌های $\{f(x)\}$ را، مرتب کردیم. تعریف حد مقدارهای تابع، که بر اساس قانون «استاندارد» نزدیك‌شدن x به a، درنظر گرفته می‌شود، کاملاً با تعریفی که درشمارهٔ **۵۲**، «به‌زبان $\varepsilon - \delta$» داده بودیم، هم‌ارز است.

با وجود این، می‌توان از قانون «استانداردشدهٔ» نزدیك‌شدن x به a صرف‌نظر کرد و فرض را براین گرفت که x، درطول مجموعهٔ $\mathfrak{X}$ یاهریك از بخش‌های آن، تغییر می‌کند، درحالی که a را به‌عنوان نقطهٔ تجمع آن‌درنظر گرفته‌ایم و آن‌را، طبق قانون دلخواهی مرتب کرده‌ایم، تنها با این شرط که a، حد آن‌ها باشد. مقدارهای تابع $f(x)$ هم، همیشه، موافق با x، مرتب می‌شوند.

به‌این ترتیب، برابری (۱) را به‌صورت زیر هم، می‌توان فهمید:

متغیر مستقل x، به‌هر صورتی و با هر قانونی، به سمت حد a میل کند، تابع $f(x)$ همیشه به‌سمت یك حد مشخص A میل می‌کند.

این تعریف، نزدیك به تعریفی است که درشمارهٔ **۵۳**، «به‌زبان دنباله‌ها» داشتیم؛ تنها تفاوت دراین است که، دراین‌جا، به‌جای دنبالهٔ دلخواهی که به‌سمت a میل می‌کند، به‌طور کلی، از مجموعهٔ مرتب دلخواهی صحبت شده است که حدی برابر a دارد.

برای اثبات هم‌ارزی تعریفی که دراین‌جا آوردیم، با تعریف شمارهٔ قبل، کافی‌است ثابت کنیم که از وجود حد (۱)، به‌مفهوم شمارهٔ **۵۲**، می‌توان گزاره‌ای که تنظیم کرده‌ایم، به‌دست آورد. فرض کنید، برای‌هر $\varepsilon > 0$، می‌توان $\delta > 0$ را طوری پیدا کرد که‌نابرابری (۲) تنها وقتی برقرار باشد که داشته باشیم: $|x - a| < \delta$. xطبق هرقانونی به‌سمت aمیل کند، بنابر خود تعریف حد، باید مقدار $\bar{x}$ وجود داشته باشد، به‌نحوی که برای $\bar{x}$ ـع x داشته‌باشیم $|x - a| < \delta$؛ دراین‌صورت، برای‌همین مقدارهای x، نابرابری (۲) هم برقرار خواهد بود، یعنی درواقع $f(x) \longrightarrow A$.

همین یادداشت را دربارهٔ تابع با دو یا چند متغیر هم می‌توان آورد.

۷۵۸. گسترش نظریهٔ حد. سرانجام، تلاش می‌کنیم، گزاره‌ای را که در فصل اول برای واریانت‌ها ثابت کرده‌ایم، به حالت کلی متغیر مرتب گسترش دهیم. اگر گام‌به‌گام، ساختمان نظریهٔ حد واریانت‌ها را دنبال کنیم، به‌این تعمیم دست خواهیم یافت.

هرجاکه در نظریهٔ حد واریانت‌ها، صحبت بر سر برقراری رابطه‌ای برای مقدار x_n با اندیسی بزرگتر از N است، دراین‌جا از برقراری همان رابطه، برای $x=x_P$، با اندیسی که بعد از P' آمده است، صحبت می‌کنیم.

به‌عنوان نمونه، گزارهٔ شبیه **۲۶**، ۱° را ثابت می‌کنیم.

اگر متغیر مرتب x_P به‌سمت حد a میل کند و $a>p$ (یا $a<q$)، آن‌وقت $x_P>p$ (یا $x_P<q$) هم، دست‌کم با آغاز از جایی برقرار است.

$\varepsilon<a-p$ (یا $\varepsilon<q-a$) را انتخاب و P' را طوری پیدا می‌کنیم که برای $P\leftarrow P'$ داشته باشیم: $|x-a|<\varepsilon$؛ روشن است که برای همین x_Pها داریم:

$$x_P>a-\varepsilon>p \quad (\text{یا } x_P<a+\varepsilon<q)$$

به‌همین ترتیب، می‌توان گزاره‌های **۲۶**، ۲° تا ۴° را هم تعمیم داد. گزارهٔ آخر را باید، به‌این‌صورت تنظیم کرد: اگر متغیر x، دارای حد (متناهی) a باشد آن‌وقت این متغیر، دست‌کم با آغاز از جایی، کران‌دار خواهد بود. [با **۵۵**، ۱، ۴° مقایسه کنید].

برای اثبات منحصربه‌فردبودن حد [**۲۶**، ۵°]، باید از شرط III استفاده کرد [**۷۵۴**].

از برهان خلف بهره می‌جوییم و فرض می‌کنیم که به‌طور هم‌زمان $x_P\to a$ و $x_P\to b$، درضمن $a<b$. اگر r را، بین a و b بگیریم، ازیک‌طرف برای $P\leftarrow P'$ داریم $x_P<r$ و، از طرف دیگر، برای $P\leftarrow P''$ داریم: $x_P>r$. ولی به‌این ترتیب، بنابر شرط III، می‌توان «اندیس» P را طوری پیدا کرد که، برای آن، هر دو رابطهٔ $P\leftarrow P'$ و $P\leftarrow P''$ برقرار باشد؛ دراین‌صورت، باید به‌طور هم‌زمان داشته باشیم: $x_P<r$ و $x_P>r$. تناقض حاصل، درستی حکم را دربارهٔ منحصربودن حد ثابت می‌کند.

تعریف یکنوابودن متغیر را هم، می‌توان برای متغیرمرتب، به‌صورت زیر تعمیم داد: متغیر x_P را، صعودی یکنوا (یا صعودی یکنوا به مفهوم وسیع آن) گویند، وقتی‌که $P\leftarrow P'$ همیشه منجر به $x_{P'}>x_P$ (یا $x_{P'}\geqslant x_P$) بشود.

نمونه این‌گونه متغیر، تابع صعودی یکنوای $f(x)$ است، به‌شرطی که مقدارهای آن به‌ترتیب‌صعودی متغیرمستقل x مرتب شده باشند، یا برای مجموع جزئی $A_m^{(n)}$ رشتهٔ دوگانهٔ مثبت

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}$$

به‌ازای $m' > m$ و $n' \geqslant n$ داشته باشیم:

$$A_{m'}^{(n)} > A_{m}^{(n')}$$

مفهوم نزولی یکنوا هم، به‌همین صورت تنظیم می‌شود.

با توجه به‌ویژگی معلوم مجموع‌های s و S داربو [۲۹۶]، به‌شرطی که تقسیم‌بازه‌ها را طبق مثال ۹) شمارهٔ ۷۵۴ مرتب کرده باشیم، روشن می‌شود که، مجموع پایینی s، متغیری صعودی یکنوا، و مجموع بالایی S، متغیری نزولی یکنواست. اگر روش دیگر برای مرتب‌کردن انتخاب کنیم [۷۵۴، ۸)]، آن‌وقت دیگر نمی‌توان چنین گزاره‌ای تنظیم کرد.

اکنون می‌توانیم قضیهٔ شمارهٔ ۳۴ را، دربارهٔ واریانت یکنوا، تعمیم دهیم.

متغیر صعودی یکنوای $x = x_P$، همیشه دارای حد است. اگر متغیر از بالا کران‌دار باشد، این حد متناهی است در غیر این صورت برابر $+\infty$ می‌شود.

اگر متغیر را کران‌دار بگیریم، فرض می‌کنیم $a = \sup\{x_P\}$، به‌نحوی که همیشه $x_P \leqslant a$؛ ازطرف دیگر، $\varepsilon > 0$ هرچه باشد، می‌توان «اندیس» P_ε را طوری پیدا کرد که داشته باشیم: $x_{P_\varepsilon} > a - \varepsilon$. ولی‌دراین‌صورت، باشرط $P \nless P_\varepsilon$ خواهیم‌داشت $x_P > x_{P_\varepsilon}$ بنابراین $x_P > a - \varepsilon$. به‌این‌ترتیب، برای $P \nless P_\varepsilon$، نابرابری $|x_P - a| < \varepsilon$ برقرار است، یعنی $x_P \to a$.

اگر متغیر x_P کران‌دار نباشد، آن‌وقت برای هرعدد $E > 0$، چنان P_E پیدامی‌شود که $x_{P_E} > E$. دراین‌صورت، برای $P \nless P_E$ خواهیم‌داشت $x_P > E$، یعنی $x_P \to +\infty$.

ازاین قضیه، می‌توان به‌عنوان حالت‌های خاص، قضیهٔ شمارهٔ ۳۴ را دربارهٔ حد واریانت صعودی، و قضیهٔ شمارهٔ ۵۷ را دربارهٔ وجود حد برای تابع یکنوا، و همچنین قضیهٔ شمارهٔ ۳۹۴ را دربارهٔ تقارب رشتهٔ دوگانهٔ مثبت، نتیجه گرفت. بحثی که دراین‌جا داشتیم قضیه‌های جداگانه‌ای را که جابه‌جا ثابت کرده بودیم، تنها به‌صورت کلی خود بازسازی می‌کند.

یادآوری می‌کنیم، از این قضیهٔ کلی، می‌توان بلافاصله، وجود حدهای متناهی را، برای مجموع‌های s و S داربو نتیجه گرفت، تنها با این شرط که، به آن‌ها، از دیدگاه مثال ۹) شمارهٔ ۷۵۴ بنگریم؛ انطباق آن‌ها با حدهایی‌هم، که در ۳۰۱ بررسی کردیم، به‌خودی‌خود ثابت می‌شود.

به‌عنوان مثالی بغرنج‌تر، به‌اثبات اصل تقارب می‌پردازیم [با ۳۹ مقایسه شود].

برای این‌که متغیر مرتب x_P، حدی متناهی داشته باشد، لازم و کافی است‌که، برای هر $\varepsilon > 0$، چنان «اندیس» P_ε وجود داشته باشد که نابرابری

$$|x_P - x_{P'}| < \varepsilon$$

تنها برای $P \nless P_\varepsilon$ و $P' \nless P_\varepsilon$ برقرار باشد.

با بیان استدلال شمارهٔ ۳۹، قبل از همه لازم بودن شرط را ثابت می‌کنیم. اگر $x_P \to a$، از روی‌عدد $\frac{\varepsilon}{2}$، چنان $\bar{P}$ پیدا می‌شود که برای $P \leftarrow \bar{P}$ داشته باشیم: $|x_P - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. فرض کنید $P \leftarrow \bar{P}$ و $P' \leftarrow \bar{P}$، در این صورت $|x_P - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ و $|a - x_{P'}| < \frac{\varepsilon}{2}$، به‌نحوی که $|x_P - x_{P'}| < \varepsilon$، دراین‌حالت، به عنوان P_ε، می‌توان $\bar{P}$ را درنظر گرفت.

برای اثبات کافی‌بودن، فرض می‌کنیم شرط برقرار است.

درحوزهٔ همهٔ عددهای حقیقی، برشی طبق قانون زیر انجام می‌دهیم: در طبقهٔ A، همهٔ عددهای‌حقیقی α را قرار می‌دهیم که، برای آن‌ها، باآغاز از جایی، داشته باشیم: $x > \alpha$. همهٔ بقیهٔ عددهای حقیقی α' را در طبقهٔ A' می‌گذاریم. به سادگی روشن می‌شود که، به‌این ترتیب، در واقع با یك برش سروکار داریم. تنها به‌اثبات این مطلب می‌پردازیم که، ازاین دوطبقه، هیچ‌کدام تهی نیستند.

به‌ازای $\varepsilon > 0$ دلخواه، بنابر فرض، P_ε متناظر با آن طوری پیدا می‌شود که، تنها اگر $P \leftarrow P_\varepsilon$ و $P' \leftarrow P_\varepsilon$، آن‌وقت

$$|x_P - x_{P'}| < \varepsilon \quad \text{یا} \quad x_{P'} - \varepsilon < x_P < x_{P'} + \varepsilon$$

ازاین‌جا روشن است که (به‌ازای $P' \leftarrow P_\varepsilon$)، $x_{P'} - \varepsilon$ یکی ازعددهای α و $x_{P'} + \varepsilon$ یکی از عددهای α' است؛ در این‌جا، به‌خصوص باید از شرط III استفاده کرد: اگر $x_{P'} + \varepsilon$ یکی از عددهای α باشد، به‌نحوی که‌نابرابری $x_P > x_{P'} + \varepsilon$، مثلاً برای $P \leftarrow \bar{P}$ برقرار باشد، آن‌وقت (بنابر III)، با انتخاب P، به‌نحوی که $P \leftarrow P_\varepsilon$ و $P \leftarrow \bar{P}$، به ناچار باید داشته باشیم: $x_P < x_{P'} + \varepsilon$، که با $x_P > x_{P'} + \varepsilon$ متناقض است.

بنابر قضیهٔ ددکیند [۹]، عدد a، در بین این دوطبقه وجود دارد

$$\alpha \leqslant a \leqslant \alpha'$$

به‌خصوص، به‌ازای $P' \leftarrow P_\varepsilon$

$$x_{P'} - \varepsilon \leqslant a \leqslant x_{P'} + \varepsilon \Rightarrow |x_{P'} - a| \leqslant \varepsilon$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود: $x_P \to a$.

این قضیه، کاربردهای جالب زیادی دارد. نه تنها قضیه‌های شماره‌های ۳۹ و ۵۸ را می‌توان حالت‌خاصی از آن‌دانست، بلکه نتیجه‌های تازه‌ای هم می‌توان از آن به‌دست آورد؛

مثلاً، به کمك آن، اصل تقارب، برای تابع‌های بـا چند متغیر، برای رشته‌های دوگانه و غیره تعمیم داده می‌شود. همچنین، شرط راستاپذیری کمان‌ها راهم [۳۳۰] می‌توان از آن نتیجه گرفت. به خواننده پیشنهاد می‌کنیم، خود، این شرط را به‌دست آورد، تنها یادآوری می‌کنیم، اگر این شرط برای تمامی کمان‌برقرار باشد، برای بخشی از آن‌هم برقرارخواهد بود؛ به‌این‌ترتیب، می‌توان حکم‌را با دوکلمه ثابت‌کرد، درحالی‌که، قبلاً، برای‌اثبات آن، به‌استدلالی مفصل نیاز داشتیم [۲۴۷].

۷۵۹. متغیرهایی که به صورتی یکسان مرتب شده‌اند. برای‌تعمیم این گزاره‌ها، در موردهایی‌که با دو (یا چند) متغیر سروکار داریم، مفهوم متغیرهای یکسان مرتب را وارد می‌کنیم. دو متغیر x و y را، وقتی «یکسان مرتب» می‌نامیم‌که بتوان آن‌ها را، به‌کمك یك مجموعهٔ مرتب $\mathfrak{P}=\{P\}$ مرتب‌کرد، به‌نحوی‌که مقدارهای هردو متغیر در تناظر یك‌به‌یك باعضوهای این‌مجموعه قرارگیرند (x_P و y_P را، با «اندیس»یکسان P، متناظرمی‌گیریم).

مثلاً اگر دوتابع $f(x)$ و $g(x)$ از یك متغیر مستقل x را، با حوزهٔ تغییر مرتب $\mathfrak{X}$ در نظر بگیریم، آن‌وقت، این تابع‌ها، متغیرهای یکسان مرتبی خواهند بود. مقدارهایی را متناظر با هم می‌گیریم که، به کمك یـك مقدار x، معین شده باشند (همین مقدار x، نقش «اندیس» P را به‌عهده دارد).

یك‌مثال دیگر. فرض‌کنید، برای تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$، که دربازه‌ای مثل $[a, b]$ تعریف شده‌اند، این مجموع‌های انتگرالی را بسازیم:

$$\sigma=\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \quad و \quad \tau=\sum_i g(\xi_i)\Delta x_i$$

روشن است که، دراین‌جا، مجموع‌هایی که به‌وسیلهٔ یـك گروه از نقطه‌های x_i و نقطه‌های بینابینی ξ_i معین می‌شوند، متناظر با یکدیگرند؛ همین گروه دراین‌جا، نقش «اندیس» P را به‌عهده دارد؛ اگـر آن‌ها را، و همراه با آن‌ها، مجموع‌هـای σ و τ را، بـرحسب نزول $\lambda=\max\Delta x_i$ مرتب‌کنیم، دوباره به متغیرهای یکسان مرتب‌شده‌ای می‌رسیم.

اکنون، اگر متغیرهای x وy را با اندیس‌های برابر، یا با اندیس‌های‌عمل‌های‌حسابی درنظر بگیریم، آن‌وقت، این متغیرها را، یکسان مرتب‌به‌حساب می‌آوریم و، روشن‌است‌که دراین‌جا، صحبت بـر سر مقدارهای متناظر آن‌ها x_P و y_P با «اندیس‌های» برابر است. اگر باتوجه به‌اندیس‌ها، مثل سابق، به‌شماره‌های nمقدارهای واریانت‌توجه‌کنیم، به‌سادگی می‌توانیم همهٔ بحث‌های مربوط به واریانت‌ها را بازسازی‌کنیم.

برای مثال، تعمیم پیش‌قضیهٔ ۲ درشمارهٔ ۲۹ را ثابت می‌کنیم.

اگر متغیر x_P (دست‌کم از جایی به‌بعد) کران‌دار باشد، و متغیر α_P که به‌طور یکسان

با آن مرتب شده‌است، بی‌نهایت‌کوچك باشد، آن‌وقت، حاصل‌ضرب آن‌ها هم، بی‌نهایت کوچك است.

فرض‌کنید، برای $P \prec P'$ داشته باشیم:

$$|x_P| \leqslant M$$

با مفروض‌بودن $\varepsilon > 0$، برای عدد $\frac{\varepsilon}{M}$، می‌توان P'' را طوری پیدا کرد که، به‌ازای $P \prec P''$ داشته باشیم:

$$|\alpha_P| < \frac{\varepsilon}{M}$$

با توجه به‌شرط III، می‌توان P_0 را طوری پیدا کرد که

$$P_0 \prec P' \quad و \quad P_0 \prec P''$$

اکنون، اگر $P \prec P_0$، آن‌وقت (با توجه به II)، به‌طور هم‌زمان داریم:

$$P \prec P' \quad و \quad P \prec P''$$

به‌نحوی که هردو نابرابری قبل برقرار می‌شوند و دراین‌صورت

$$|x_P \alpha_P| = |x_P| \cdot |\alpha_P| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

که درنتیجه، حکم ما را ثابت می‌کند.

با توجه به‌این مثال‌ها، برای خواننده روشن‌می‌شود که، تمامی نظریهٔ حد را (باحفظ خط‌های اصلی اثبات)، می‌توان درحالت کلی متغیرهای مرتب، بازسازی کرد.

۷۶۰. مرتب‌کردن به‌کمك پارامتر عددی. در تمامی حالت‌های کاربرد مفهوم حد در آنالیز، «اندیس‌هایی» که برای مقدارهای متغیر x در مجموعهٔ مرتب $\mathcal{P} = \{P\}$ در نظر می‌گرفتیم، به‌صورتی یکسان تنظیم می‌شدند. درحالت کلی، برای مرتب کردن، می‌توان از روش زیر استفاده کرد.

هر عضو P از $\mathcal{P}$ را متناظر با مقدار t از یك پارامتر قرار می‌دهیم، درضمن، ممکن است چند P، متناظر با یك t باشند؛ مجموعهٔ همهٔ این‌گونه Pها را $\mathcal{P}_t$ می‌نامیم. $t > 0$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم، چنان‌مقدارهای به‌دلخواه کوچك t وجود داشته باشند که، برای آن‌ها، $\mathcal{P}_t$، مجموعه‌ای تهی نباشد.

اکنون شرط می‌کنیم، از دوعضو P، آن‌را عضو بعدی به‌حساب آوریم که متناظر با

مقدار کمتری از پارامتر t باشد (یعنی، عضوهای P «برحسب نزول پارامتر» قرار گرفته باشند). برای دوعضو P، که متناظر با یك‌مقدار t هستند، به‌نحوی‌که هر دوی آن‌ها، متعلق به‌یك مجموعهٔ $\mathcal{P}_t$ باشند (درست مثل مقدارهای متناظر x)، ترتیبی وجود ندارد. درضمن، همهٔ شرطهای I و II و III رعایت‌شده‌اند برقراری‌شرطهای I و II روشن‌است؛ برقراری شرط III را تحقیق می‌کنیم. P و P' را دوعضو از مجموعهٔ $\mathcal{P}$ می‌گیریم که متناظر با مقدارهای t و t' باشند. بنابر فرض، می‌توان مقدار t'' را، کوچکتر از t و t'، طوری پیدا کرد‌که، برای آن، $\mathcal{P}_{t''}$ تهی نباشد، دراین‌صورت، هر P'' از $\mathcal{P}_{t''}$، بعد از P و بعد از P' قرار دارد.

خواننده می‌تواند به سادگی تحقیق کندکه، همهٔ حالت‌های استفاده از مفهوم حد، به این طرح نزدیك‌اند. برای واریانت x_n با «اندیس» n، می‌توان $t=\frac{1}{n}$ گرفت. اگر صحبت بر سر تابع $f(x)$ وحد آن به‌ازای $x\to a$ باشد، آن‌وقت مجموعهٔ «اندیس‌های» x، برحسب نزول پارامتر $t=|x-a|$ مرتب می‌شوند. به‌همین‌ترتیب، درمورد تابع با دومتغیر $f(M)=f(x,y)$، که در آن نقش «اندیس» به‌عهدهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ است، تعریف حد تابع به‌ازای $x\to a$ و $y\to b$ را می‌توان، با روندی به‌کمك هر یك از پارامترهای

$$t_1=\max\{|x-a|,|y-b|\},\quad t_2=|x-a|+|y-b|,$$

$$t_3=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

انجام داد. برای مجموع‌های داربو

$$s=\sum_i m_i\Delta x_i \quad و \quad S=\sum_i M_i\Delta x_i$$

«اندیس» همان گروه نقطه‌های تقسیم است؛ ضمن عبور به‌حالت ریمان

$$\sigma=\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

باز هم‌گروه نقطه‌های ξ_i به‌آن مربوط موشود. در هر دو حالت، این «اندیس‌ها» به کمك پارامتر $t=\max\Delta x_i$ مرتب می‌شوند. ضمن تعریف طول کمان، نقش پارامتر به‌عهدهٔ بزرگترین قطرکمان‌های جزئی است و غیره.

درهمهٔ حالت‌هایی‌که حوزهٔ تغییر $\mathfrak{M}$ ازمتغیر x، یا صحیح‌تر، مجموعهٔ «اندیس‌های» $\mathcal{P}=\{P\}$، به‌ترتیبی‌که دربالا گفتیم، به‌کمك پارامتر عددی t مرتب شده باشد، روشن‌است که می‌توان، تعریف حد را (به‌حالت حد متناهی اکتفا می‌کنیم) به‌صورت زیر داد: عدد a

را حد x گوییم، وقتی‌که به هر عدد $\varepsilon>0$، چنان $\delta>0$ متناظر باشدکه

$$|x-a|<\varepsilon$$

تنها مقدار پارامتر $t<\delta$ نظیر آن باشد.

ما در جلد سوم کتاب هم از مرتب کردن، به کمك پارامتر عددی استفاده کرده‌ایم. با وجود این، این‌روش ساده‌مرتب کردن، هنوز همهٔ نیازهای آنالیز ریاضی را درشاخه‌های بالاتر خود برطرف نمی‌کند. به‌عنوان نمونه‌ای از مرتب کردن، که با چنین روشی (یعنی به‌کمك پارامتر عددی) قابل انجام نیست، می‌توان از قاعدهٔ ۹) شمارهٔ **۷۵۴** یادکرد؛ این موضوع، با توجه به بحث شمارهٔ بعد، روشن می‌شود.

۷۶۱. تبدیل به واریانت. در همهٔ موردهای شخصی‌که تاکنون بامفهوم حد برخورد داشتیم، به‌مفهومی، این امکان وجود داشت‌که، مساله‌را، منجر به‌حد واریانت کنیم. این‌امکان بیان مفهوم حد به «زبان دنباله‌ها» در بحث‌های قبلی، نقش مهمی را، به‌عهده داشت. اکنون به‌بررسی وضع، درحالت‌کلی متغیر مرتب $x=x_P$ می‌پردازیم.

برای این‌منظور، مفهوم زیردنبالهٔ «محصور» (confinal) را، برای مجموعهٔ‌مرتب مفروض $\mathcal{P}=\{P\}$ وارد می‌کنیم، دنبالهٔ

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots \qquad (۴)$$

را به‌این نام می‌نامیم، وقتی که عضوهای آن‌متعلق به $\mathcal{P}$ باشند وشرط زیر برای آن‌ها برقرار باشد: هرعضو P' را که از $\mathcal{P}$ انتخاب کرده‌ایم، عضوهای P_n، به ازای مقدارهای به‌قدر کافی بزرگ «اندیس»، بعد از P' باشند:

$$P_n \mathrel{\mathcal{E}} P' \quad (\text{برای } n>N)$$

اگر متغیر x، به‌کمك «اندیس» P از $\mathcal{P}$ مرتب‌شده‌باشد، آن‌وقت به‌ازای زیردنبالهٔ «محصور» (۴) برای مجموعهٔ $\mathcal{P}$، انتخاب زیردنبالهٔ مقدارهای x

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \qquad (۵)$$

$(x_n=x_{P_n})$ از $\mathfrak{X}$، زیر دنبالهٔ «محصور» برای $\mathfrak{X}=\{x\}$ نامیده می‌شود.

قبل از هرچیز، مسالهٔ مربوط به وجود دست‌کم یك زیر دنبالهٔ (۴) را، که برای $\mathcal{P}$ «محصور» باشد، و یا زیردنبالهٔ (۵) را، که برای $\mathfrak{X}$ «محصور» باشد، مطرح می‌کنیم.

باید بگوییم، درهرحالتی‌که مرتب‌بودن مجموعهٔ $\mathcal{P}$ به‌کمك‌پارامتر عددی t (آن‌طور که درشماره قبل‌دیدیم)، عملی‌شده‌باشد، ساختن زیردنباله به‌هیچ‌دشواری برخورد نمی‌کند: دنبالهٔ $\{t_n\}$ را، $t_n \to 0$، طوری درنظر می‌گیریم که همهٔ مجموعه‌های $\mathcal{P}_{t_n}$ غیرتهی باشند

و از هر $\mathcal{P}_{tn}$ عضو P_n را انتخاب می‌کنیم: دنباله‌ای که از آن‌ها تشکیل می‌شود، یعنی دنبالهٔ $\{P_n\}$، همان دنبالهٔ موردنظر است.

البته، درحالت کلی، برای مجموعهٔ $\mathcal{P}=\{P\}$، ممکن است حتی یک زیردنبالهٔ «محصور» وجود نداشته باشد.

به‌عنوان مثال، مجموعهٔ $\mathcal{R}=\{R\}$ را، که شامل تقسیم‌های مختلف بازهٔ $[a, b]$ به تعداد محدودی بخش است، در نظر می‌گیریم*؛ درضمن، این مجموعه را طبق قاعدهٔ ۹) شمارهٔ **۷۵۴** مرتب کرده باشیم. با استفاده از برهان خلف، فرض می‌کنیم، برای $\mathcal{R}$، زیردنبالهٔ «محصور»

$$R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$$

از تقسیم‌ها، وجود داشته باشد. هر R_n متناظر با گروهی با تعداد محدود از نقطه‌های تقسیم است. به سادگی می‌توان بازه‌ای مثل $[a_1, b_1]$ راساخت $(a<a_1<b_1<b)$ که، در آن، هیچ نقطه‌ای از R_1 نباشد. سپس، بازهٔ $[a_2, b_2]$ را می‌سازیم $(a_1<a_2<b_2<b_1)$ که از نقطه‌های تقسیم R_2، آزاد باشد و غیره تا بی‌نهایت. در گام nام، بازهٔ

$$[a_n, b_n] \quad (a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1})$$

را ساخته‌ایم که، در آن، هیچ کدام از نقطه‌های تقسیم R_n وجودندارند. اگر درضمن، توجه کنیم که $b_n - a_n \longrightarrow 0$ آن‌وقت با توجه به پیش‌قضیهٔ مربوط به بازه‌های تودرتو [۳۸]، نقطهٔ منحصر به‌فرد

$$c=\lim a_n=\lim b_n$$

پیدا می‌شود که به همهٔ بازه‌های $[a_n, b_n]$ تعلق دارد. روشن است که، این نقطه، منطبق بر هیچ کدام از نقطه‌های تقسیم یکی از R_nها نیست. اکنون اگر تقسیمی مثل R' از بازهٔ $[a, b]$ را درنظر بگیریم، که نقطهٔ c هم‌جزو نقطه‌های تقسیم آن باشد، آن‌وقت بنابر قاعدهٔ ۹) شمارهٔ **۷۵۴**، هیچ کدام از R_nها را نمی‌توان بعداز R' به‌حساب آورد که تعریف زیردنبالهٔ «محصور» را نقض می‌کند. این تناقض نشان می‌دهد که، در واقع، چنین زیر دنباله‌ای وجود ندارد.

[ازاین‌جا، این نتیجه‌هم به‌دست می‌آید که، این‌روش مرتب کردن مجموعهٔ $\mathcal{R}=\{R\}$،

---

*) این Rها، می‌توانندنقش «اندیس‌ها» را، مثلاً برای مجموعه‌های داربو از تابعی که در بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده است، به‌عهده داشته باشند.

به مفهوم شمارهٔ قبل، تن به پارامتری کردن نمی‌دهد.]

اکنون فرض می‌کنیم، مجموعهٔ «اندیس‌های» $\mathcal{P}$ و، همراه با آن، حوزهٔ تغییر $\mathfrak{X}$ با متغیر مرتب x، شامل زیردنبالهٔ «محصور» باشد: دراین‌حالت (و البته، تنها دراین حالت)، مسالهٔ مربوط به‌حد متغیر x، منجر به مساله مربوط به حد واریانت می‌شود:

برای این‌که متغیر x، دارای حد a باشد، لازم و کافی است که هر واریانت x_n، که زیردنبالهٔ «محصور» $\mathfrak{X}$ را می‌پیماید، به‌سمت این حد میل کند.

درواقع، اگر $x \to a$ (که در این‌جا، برای مشخص بودن وضع، a را متناهی می‌گیریم)، آن‌وقت برای هر $\varepsilon > 0$ داریم:

$$|x_P - a| < \varepsilon \quad (P \in P_\varepsilon \text{ تنها وقتی که})$$

ولی اگر یك زیردنبالهٔ «محصور» (۴) را انتخاب کنیم، آن‌وقت، برای مقدارهای به قدر کافی بزرگ n، بنا به‌تعریف داریم: $P_n \in P_\varepsilon$، به‌نحوی که

$$|x_n - a| = |x_{P_n} - a| < \varepsilon$$

و این به‌معنای آن‌است که واریانت $x_n \to a$.

برعکس، فرض کنید، هر واریانتی از این‌گونه، به‌سمت a میل کند. برای اثبات این‌که $x \to a$، از برهان‌خلف استفاده و فرض می‌کنیم، برای مقداری از $\varepsilon > 0$، P' از $\mathcal{P}$ را هرجور بگیریم، $P \in P'$ پیدا شود به‌نحوی که داشته باشیم: $|x_P - a| \geqslant \varepsilon$. زیردنبالهٔ «محصور» مشخص $\{P'_n\}$ را برای $\mathcal{P}$ در نظر می‌گیریم. بنابرآن‌چه دیدیم، برای هر P'_n، می‌توان در $\mathcal{P}$، عضو $P_n \in P'_n$ را پیدا کرد که، برای آن، داشته باشیم:

$$|x_n - a| = |x_{P_n} - a| \geqslant \varepsilon, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

به‌سادگی معلوم می‌شود که، دنبالهٔ $\{P_n\}$ هم، برای $\mathcal{P}$، یك زیردنبالهٔ «محصور» است، یعنی دنبالهٔ $\{x_n\}$ برای $\mathfrak{X}$ «محصور» است و، بنابراین، نابرابری قبل، فرض مارا نقض می‌کند.

۷۶۲. بزرگترین و کوچکترین حد برای متغیر مرتب. متغیر مرتب x را در نظر می‌گیریم که، مقدارهای آن، با «اندیس‌های» P از $\mathcal{P}$ مجهز شده‌اند. برای هر P مجموعهٔ $\mathfrak{X}_P$ را، شامل مقدارهایی از x که بعد از x_P آمده‌اند، یعنی متناظر با «اندیس‌های» $P' \in P$ هستند، می‌سازیم و مرزهای آن‌را پیدا می‌کنیم:

$$\inf \mathfrak{X}_P \text{ و } \sup \mathfrak{X}_P$$

(که البته، بی‌نهایت هم می‌توانند باشند). هرکدام از این‌ها، با «اندیس‌های» P، متغیری مرتب‌اند و، درضمن، اولی نزولی یکنوا، و دومی صعودی‌یکنواست (به‌مفهوم‌شمارهٔ ۷۵۸). دراین‌صورت، بنا به قضیهٔ مربوط به متغیر یکنوا، حدهای معین (متناهی یا نامتناهی)

$$M^* = \text{حد}\sup(\mathfrak{C}_P),\ M_* = \text{حد}\inf(\mathfrak{C}_P) \qquad (۶)$$

وجود دارند*. این‌ها را، در حالت کلی، به‌ترتیب، بزرگترین وکوچکترین حد متغیر x می‌نامند و می‌نویسند:

$$M^* = \overline{\text{حد}}\, x \quad و \quad M_* = \underline{\text{حد}}\, x$$

برابری این دو حد، شرط لازم و کافی برای وجود حد متغیر x، به معنای عادی آن است [۷۵۵].

در واقع، اگر حد متناهی

$$a = \text{حد}\, x \qquad (۷)$$

وجود داشته باشد، آن‌وقت برای هر $\varepsilon > 0$، چنان «اندیس» P_ε پیدا می‌شود که

$$a-\varepsilon < x_P < a+\varepsilon \quad (\text{برای } P \in P_\varepsilon) \qquad (۸)$$

که در این‌صورت

$$a-\varepsilon \leqslant \inf \mathfrak{C}_{P_\varepsilon} \leqslant M_* \leqslant M^* \leqslant \sup \mathfrak{C}_{P_\varepsilon} \leqslant a+\varepsilon$$

به‌نحوی که، برای ε دلخواه

$$M^* = M_* = a$$

برعکس، اگر این برابری برقرار باشد (برای مقدار متناهی a)، آن‌وقت با توجه به (۶)، دوباره از روی $\varepsilon > 0$، چنان P_ε پیدا می‌شود که

$$a-\varepsilon < \inf \mathfrak{C}_{P_\varepsilon} < \sup \mathfrak{C}_{P_\varepsilon} < \alpha+\varepsilon$$

به‌نحوی که (۸) و از آن‌جا (۷) برقرار است.

به‌خواننده پیشنهاد می‌کنیم، برای حالت $a = \pm\infty$، استدلال لازم را تنظیم کند.

عددهای M^* و M_*، در حالت متناهی‌بودن آن‌ها، ویژگی‌هایی دارند که کاملاً شبیه ویژگی‌های I و II در ۴۲ هستند. به‌عنوان نمونه، روی M^* متوقف می‌شویم.

اگر $\varepsilon > 0$ دلخواه و «اندیس» P_0 را در نظر بگیریم، آن‌وقت، چنان $P_\varepsilon \in P_0$ پیدا می‌شود که

$$M^*-\varepsilon < \sup \mathfrak{C}_{P_\varepsilon} < M^*+\varepsilon$$

که از آن‌جا، بنا به تعریف مرز بالا، نتیجه می‌شود:

ویژگی I عدد M^*. برای هر $P \in P_\varepsilon$ داریم:

$$x_P < M^*+\varepsilon$$

---

*) این وضع که، این متغیرها، می‌توانند مقدارهای ناویژهٔ $\pm\infty$ را هم اختیار کنند، مشکلی به‌وجود نمی‌آورد.

ویژگی II عدد M^*. دست‌کم یك مقدار $x_{P'}$ پیدا می‌شود (که در آن $P'\in P_0$)، به‌نحوی که

$$x_{P'}>M^*-\varepsilon$$

اکنون فرض کنید مجموعهٔ $\mathcal{P}=\{P\}$ دارای زیردنباله‌های «محصور» (۴)، متناظر با زیردنباله‌های «محصور» (۵) برای $\mathfrak{M}$، از مقدارهای متغیر ما، باشد. اگر یکی از این دنباله‌ها، حدی داشته باشد، آن‌وقت آن‌را حد جزئی متغیر x گویند [با ۴۰ و ۵۹ مقایسه کنید].

دراین‌حالت می‌توان ثابت کرد، بزرگترین وکوچکترین حد M^* و M_*، که در بالا تعریف کردیم، درعین‌حال، همان بزرگترین و کوچکترین حد، در بین همهٔ حدهای جزئی متغیر x، هستند. [مثل موردی که در ۴۰ یا ۵۹ داشتیم].

درواقع (اگر دوباره تنها به‌حالت بزرگترین‌حد وآن‌هم، به‌صورت‌متناهی‌بپردازیم)، از ویژگی I بلافاصله روشن می‌شود که، هیچ کدام از حدهای جزئی، نمی‌توانند از M^* تجاوز کنند. برای این‌که دنبالهٔ (۵) را، که برای $\mathfrak{M}$ «محصور» باشد، بسازیم، به‌نحوی که به‌سمت M^* میل کند (و معلوم شود که خود M^*، یك‌حد جزئی است)، از زیردنباله‌ای مثل

$$P'_1, P'_2, \dots, P'_n, \dots$$

آغاز می‌کنیم که برای $\mathcal{P}$ «محصور» است. سپس، به‌کمك ویژگی‌های I و II [با ۴۰ مقایسه کنید]، دنبالهٔ (۴) را، به‌طور استقرایی، طوری می‌سازیم که اولاً داشته باشیم:

$$P_n\in P'_n$$

(به‌نحوی که (۴) هم، برای $\mathcal{P}$، «محصور» باشد) و ثانیاً، $x_n=x_{P_n}$، درنابرابری دوگانهٔ

$$M^*-\varepsilon_n<x_n<M^*+\varepsilon_n$$

صدق کند که، در آن، ε_n، واریانت مثبت دلخواهی است که به‌سمت صفرمیل می‌کند. روشن است که، دنبالهٔ (۵)، که برای $\mathfrak{M}$ «محصور» است، دارای حد M^* است.

می‌توان نمونهٔ دیگری برای بزرگترین و کوچکترین حد، از حوزه‌ای که برای خواننده آشناست، آورد: انتگرال‌های بالایی و پایینی داربو (I^* و I_*) [۲۹۶، ۳۰۱]، به‌ترتیب، بزرگترین وکوچکترین حد، برای مجموع انتگرالی (مجموع ریمان)

$$\sigma=\Sigma f(\xi_i)\Delta x_i$$

به‌ازای $\lambda=\max\Delta x_i\to 0$ هستند.

پایان